

王道计算机考研
www.cskaoyan.com

本节内容

特殊矩阵 压缩存储

王道考研/CSKAOYAN.COM

1

知识总览

```
graph LR; A[矩阵的压缩存储] --- B[数组的存储结构]; A --- C[特殊矩阵]; B --- D[一维数组]; B --- E[二维数组]; C --- F[对称矩阵]; C --- G[三角矩阵]; C --- H[三对角矩阵]; C --- I[稀疏矩阵];
```

矩阵的压缩存储

- 数组的存储结构
 - 一维数组
 - 二维数组
- 特殊矩阵
 - 对称矩阵
 - 三角矩阵
 - 三对角矩阵
 - 稀疏矩阵

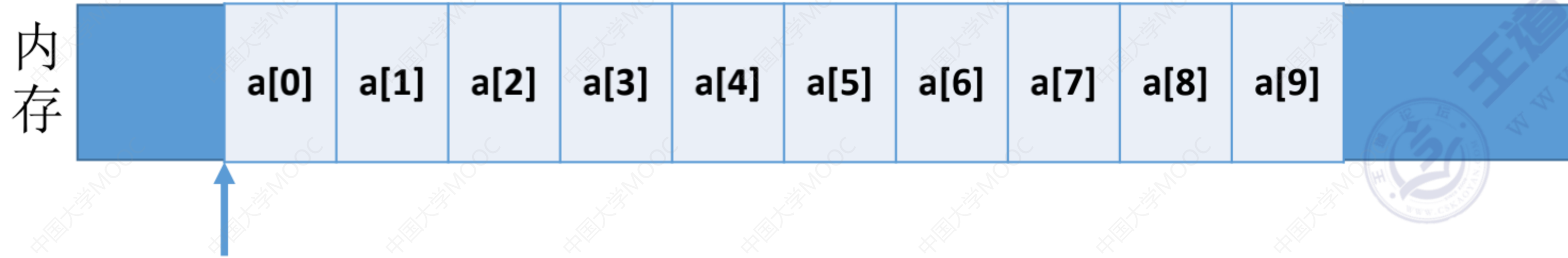
王道考研/CSKAOYAN.COM

2

一维数组的存储结构

```
ElemType a[10]; //ElemType型一维数组
```

C语言定义一维数组



起始地址: LOC

各数组元素大小相同, 且物理上连续存放。

数组元素a[i] 的存放地址 = $LOC + i * sizeof(ElemType)$ ($0 \leq i < 10$)

注: 除非题目特别说明, 否则数组下标默认从0开始

注意审题! 易错!

3

二维数组的存储结构

```
ElemType b[2][4]; //2行4列的二维数组
```

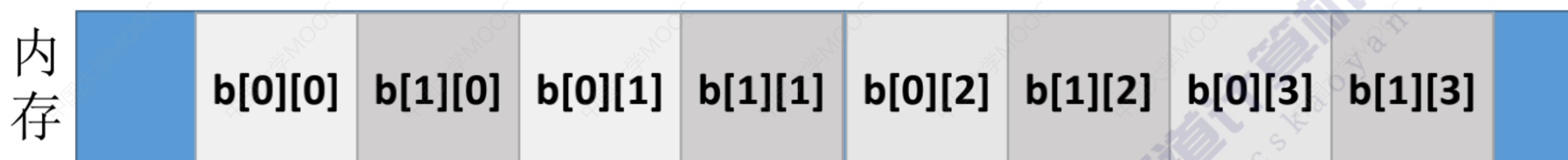
C语言定义二维数组

b[0][0]	b[0][1]	b[0][2]	b[0][3]
b[1][0]	b[1][1]	b[1][2]	b[1][3]

逻辑视角



行优先存储



列优先存储

4

二维数组的存储结构

`ElemType b[2][4]; //2行4列的二维数组` C语言定义二维数组

<code>b[0][0]</code>	<code>b[0][1]</code>	<code>b[0][2]</code>	<code>b[0][3]</code>
<code>b[1][0]</code>	<code>b[1][1]</code>	<code>b[1][2]</code>	<code>b[1][3]</code>

逻辑视角

内存 行优先存储

<code>b[0][0]</code>	<code>b[0][1]</code>	<code>b[0][2]</code>	<code>b[0][3]</code>	<code>b[1][0]</code>	<code>b[1][1]</code>	<code>b[1][2]</code>	<code>b[1][3]</code>
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

起始地址: LOC

M行N列的二维数组 `b[M][N]` 中, 若按行优先存储, 则
`b[i][j]` 的存储地址 = $LOC + (i * N + j) * \text{sizeof}(\text{ElemType})$

王道考研/CSKAOYAN.COM

5

二维数组的存储结构

`ElemType b[2][4]; //2行4列的二维数组` C语言定义二维数组

<code>b[0][0]</code>	<code>b[0][1]</code>	<code>b[0][2]</code>	<code>b[0][3]</code>
<code>b[1][0]</code>	<code>b[1][1]</code>	<code>b[1][2]</code>	<code>b[1][3]</code>

逻辑视角

内存 列优先存储

<code>b[0][0]</code>	<code>b[1][0]</code>	<code>b[0][1]</code>	<code>b[1][1]</code>	<code>b[0][2]</code>	<code>b[1][2]</code>	<code>b[0][3]</code>	<code>b[1][3]</code>
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

起始地址: LOC

M行N列的二维数组 `b[M][N]` 中, 若按列优先存储, 则
`b[i][j]` 的存储地址 = $LOC + (j * M + i) * \text{sizeof}(\text{ElemType})$

王道考研/CSKAOYAN.COM

6

普通矩阵的存储

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,n-1}$	$a_{3,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$a_{m,3}$	$a_{m,n-1}$	$a_{m,n}$

特殊矩阵

- 对称矩阵
- 三角矩阵
- 三对角矩阵
- 稀疏矩阵

都是方阵

可用二维数组存储

注意：描述矩阵元素时，行、列号通常从1开始；而描述数组时通常下标从0开始
(具体看题目给的条件，注意审题！)

某些特殊矩阵可以压缩存储空间

王道考研/CSKAOYAN.COM

7

对称矩阵的压缩存储

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,n-1}$	$a_{3,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	$a_{n-1,3}$	$a_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$

若 n 阶方阵中任意一个元素 $a_{i,j}$ 都有 $a_{i,j} = a_{j,i}$ 则该矩阵为对称矩阵

普通存储: $n*n$ 二维数组

压缩存储策略: 只存储主对角线+下三角区 (或主对角线+上三角区)

上三角区: $i < j$

主对角线: $i = j$

下三角区: $i > j$

王道考研/CSKAOYAN.COM

8

对称矩阵的压缩存储

策略：只存储主对角线+下三角区

按**行优先**原则将各元素存入一维数组中。

B[0]	B[1]	B[2]	B[3]	...	B[?]
a _{1,1}	a _{2,1}	a _{2,2}	a _{3,1}	a _{n,n-1} a _{n,n}

思考：

- ①数组大小应为多少？
- ②站在程序员的角度，对称矩阵压缩存储后怎样才能方便使用？

① $(1+n)*n/2$

②可以实现一个“映射”函数
矩阵下标 → 一维数组下标

王道考研/CSKAOYAN.COM

9

对称矩阵的压缩存储

策略：只存储主对角线+下三角区

按**行优先**原则将各元素存入一维数组中。

B[0]	B[1]	B[2]	B[3]	...	B[$\frac{n(n+1)}{2}-1$]
a _{1,1}	a _{2,1}	a _{2,2}	a _{3,1}	a _{n,n-1} a _{n,n}

矩阵下标 $a_{i,j}$ ($i \geq j$) → 一维数组下标 B[k]

Key: 按**行优先**的原则， $a_{i,j}$ 是第几个元素？

$[1+2+\dots+(i-1)] + j$ → 第 $\frac{i(i-1)}{2} + j$ 个元素

→ $k = \frac{i(i-1)}{2} + j - 1$

王道考研/CSKAOYAN.COM

10

对称矩阵的压缩存储

策略：只存储主对角线+下三角区

按**行优先**原则将各元素存入一维数组中。

B[0]	B[1]	B[2]	B[3]	...	B[$\frac{n(n+1)}{2}-1$]
a _{1,1}	a _{2,1}	a _{2,2}	a _{3,1}	a _{n,n-1} a _{n,n}

矩阵下标 → 一维数组下标
 $a_{i,j} (i < j) \rightarrow B[k]$
 $a_{i,j} = a_{j,i}$ (对称矩阵性质)
 $\rightarrow k = \frac{j(j-1)}{2} + i - 1$

王道考研/CSKAOYAN.COM

11

对称矩阵的压缩存储

策略：只存储主对角线+下三角区

按**行优先**原则将各元素存入一维数组中。

B[0]	B[1]	B[2]	B[3]	...	B[$\frac{n(n+1)}{2}-1$]
a _{1,1}	a _{2,1}	a _{2,2}	a _{3,1}	a _{n,n-1} a _{n,n}

矩阵下标 → 一维数组下标
 $a_{i,j} \rightarrow B[k]$
 $a_{i,j} = a_{j,i}$ (对称矩阵性质)
 $k = \begin{cases} \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, & i \geq j \text{ (下三角区和主对角线元素)} \\ \frac{j(j-1)}{2} + i - 1, & i < j \text{ (上三角区元素 } a_{ij} = a_{ji} \text{)} \end{cases}$

王道考研/CSKAOYAN.COM

12

对称矩阵的压缩存储

策略：只存储主对角线+下三角区

按**列优先**原则将各元素存入一维数组中。

B[0] B[1] B[2] B[3] ... B[$\frac{n(n+1)}{2}-1$]

$a_{1,1}$	$a_{2,1}$	$a_{3,1}$	$a_{4,1}$	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$
-----------	-----------	-----------	-----------	-------	-------------	-----------

矩阵下标 \rightarrow 一维数组下标
 $a_{i,j} \rightarrow B[k]$
 $a_{i,j} = a_{j,i}$ (对称矩阵性质)

出题方法

- 存储上三角? 下三角?
- 行优先? 列优先?
- 矩阵元素的下标从0? 1? 开始
- 数组下标从0? 1? 开始

王道考研/CSKAOYAN.COM

13

三角矩阵的压缩存储

下三角矩阵: 除了主对角线和下三角区, 其余的元素都相同

上三角矩阵: 除了主对角线和上三角区, 其余的元素都相同

王道考研/CSKAOYAN.COM

14

三角矩阵的压缩存储

下三角矩阵: 除了主对角线和下三角区, 其余的元素都相同

压缩存储策略: 按**行优先**原则将**橙色区**元素存入一维数组中。并在**最后一个位置**存储**常量c**

B[0] B[1] B[2] B[3] ... B[$\frac{n(n+1)}{2}-1$] B[$\frac{n(n+1)}{2}$]

a _{1,1}	a _{2,1}	a _{2,2}	a _{3,1}	a _{n,n}	c
------------------	------------------	------------------	------------------	-------	------------------	---

矩阵下标 → 一维数组下标
a_{i,j} (i ≥ j) → B[k]

Key: 按**行优先**的原则, a_{i,j}是第几个元素?

$$k = \begin{cases} \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, & i \geq j \text{ (下三角区和主对角线元素)} \\ \frac{n(n+1)}{2}, & i < j \text{ (上三角区元素)} \end{cases}$$

王道考研/CSKAOYAN.COM

15

三角矩阵的压缩存储

上三角矩阵: 除了主对角线和上三角区, 其余的元素都相同

压缩存储策略: 按**行优先**原则将**绿色区**元素存入一维数组中。并在**最后一个位置**存储**常量c**

B[0] B[1] B[2] B[3] ... B[$\frac{n(n+1)}{2}-1$] B[$\frac{n(n+1)}{2}$]

a _{1,1}	a _{1,2}	a _{1,3}	a _{1,4}	a _{n,n}	c
------------------	------------------	------------------	------------------	-------	------------------	---

矩阵下标 → 一维数组下标
a_{i,j} (i ≤ j) → B[k]

Key: 按**行优先**的原则, a_{i,j}是第几个元素?

$$k = \begin{cases} \frac{(i-1)(2n-i+2)}{2} + (j-i), & i \leq j \text{ (上三角区和主对角线元素)} \\ \frac{n(n+1)}{2}, & i > j \text{ (下三角区元素)} \end{cases}$$

王道考研/CSKAOYAN.COM

16

三对角矩阵的压缩存储

三对角矩阵，又称**带状矩阵**：
当 $|i-j| > 1$ 时，有 $a_{ij} = 0$ ($1 \leq i, j \leq n$)

压缩存储策略：
按**行优先**（或列优先）原则，只存储带状部分

B[0]	B[1]	B[2]	B[3]	B[3n-3]
$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{n,n-1}$ $a_{n,n}$

矩阵下标 a_{ij} ($|i-j| \leq 1$) \rightarrow 一维数组下标 $B[k]$

Key: 按**行优先**的原则， a_{ij} 是第几个元素？

前 $i-1$ 行共 $3(i-1)-1$ 个元素
 a_{ij} 是 i 行第 $j-i+2$ 个元素
 a_{ij} 是第 $2i+j-2$ 个元素 $\rightarrow k = 2i+j-3$

数组下标从0开始

王道考研/CSKAOYAN.COM

17

三对角矩阵的压缩存储

若已知数组下标 k ，如何得到 i, j ？
 $B[k] \rightarrow a_{ij}$

第 $k+1$ 个元素，在第几行？第几列？

前 $i-1$ 行共 $3(i-1)-1$ 个元素
 前 i 行共 $3i-1$ 个元素
 显然， $3(i-1)-1 < k+1 \leq 3i-1$

$i \geq (k+2)/3$ 可以理解为“刚好”大于等于

$i = \lceil (k+2)/3 \rceil$ 向上取整即可满足“刚好”大于等于

王道书的计算逻辑： $3(i-1)-1 \leq k < 3i-1$

$i \leq (k+1)/3+1$ 可以理解为“刚好”小于等于

$i = \lfloor (k+1)/3+1 \rfloor$ 向下取整即可满足“刚好”小于等于

王道考研/CSKAOYAN.COM

18

三对角矩阵的压缩存储

$a_{1,1}$ $a_{1,2}$ 0 0 0
 $a_{2,1}$ $a_{2,2}$ $a_{2,3}$ 0 0
 0 $a_{3,2}$ $a_{3,3}$ 0 0
 ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
 0 0 0 $a_{n-1,n-1}$ $a_{n-1,n}$
 0 0 0 $a_{n,n-1}$ $a_{n,n}$

若已知数组下标k, 如何得到 i, j?
 $B[k] \rightarrow a_{i,j}$

第 k+1 个元素, 在第几行? 第几列?

$i = \lfloor (k+2)/3 \rfloor$ 或 $i = \lfloor (k+1)/3 + 1 \rfloor$

由 $k = 2i + j - 3$, 得
 $j = k - 2i + 3$

王道考研/CSKAOYAN.COM

19

三角矩阵的压缩存储

$a_{1,1}$ c c c c
 $a_{2,1}$ $a_{2,2}$ c c c
 $a_{3,1}$ $a_{3,2}$ $a_{3,3}$ c c
 ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
 $a_{n-1,1}$ $a_{n-1,2}$ $a_{n-1,3}$ $a_{n-1,n-1}$ c
 $a_{n,1}$ $a_{n,2}$ $a_{n,3}$ $a_{n,n-1}$ $a_{n,n}$

压缩存储策略: 按行优先原则将绿色区元素存入一维数组中。并在最后一个位置存储常量c

$B[0]$ $B[1]$ $B[2]$ $B[3]$ $B[\frac{n(n+1)}{2}-1]$ $B[\frac{n(n+1)}{2}]$

$a_{1,1}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{3,1}$	$a_{n,n}$	c
-----------	-----------	-----------	-----------	-------	-----------	---

矩阵下标 \rightarrow 一维数组下标
 $a_{i,j} (i \geq j) \rightarrow B[k]$

Key: 按行优先的原则, $a_{i,j}$ 是第几个元素?


思考: 如何用k推出 i, j?

$$k = \begin{cases} \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, & i \geq j \text{ (下三角区和主对角线元素)} \\ \frac{n(n+1)}{2}, & i < j \text{ (上三角区元素)} \end{cases}$$

王道考研/CSKAOYAN.COM

20

稀疏矩阵的压缩存储



青少年

稀疏矩阵： 非零元素远远少于矩阵元素的个数

压缩存储策略：
顺序存储——三元组 <行, 列, 值>


i (行)	j (列)	v (值)
1	3	4
1	6	5
2	2	3
2	4	9
3	5	7
4	2	2

(注：此处行、列标从1开始)

王道考研/CSKAOYAN.COM

21

稀疏矩阵的压缩存储



青少年

压缩存储策略二：
链式存储——**十字链表法**

向下域 down, 指向第 j 列的第一个元素

向右域 right, 指向第 i 行的第一个元素

行	列	值
1	3	4
1	6	5
2	2	3
2	4	9
3	5	7
4	2	2

非零数据
结点说明：

行	列	值
指向同列的下一个元素	指向同行的下一个元素	

王道考研/CSKAOYAN.COM

22

知识回顾与重要考点

特殊矩阵
压缩存储

- 对称矩阵

 - 特点: 对方阵中的任意一个元素, 有 $a_{i,j} = a_{j,i}$
 - 压缩: 只存储主对角线+下三角区 (或主对角线+上三角区)
- 三角矩阵

 - 特点: 上三角区全为常量 (下三角矩阵); 或下三角区全为常量 (上三角矩阵)
 - 压缩: 按行优先/列优先规则依次存储非常量区域, 并在最后一个位置存放常量c
- 三对角矩阵
(带状矩阵)

 - 特点: 当 $|i - j| > 1$ 时, 有 $a_{i,j} = 0$ ($1 \leq i, j \leq n$)
 - 压缩: 按行优先/列优先规则依次存储带状区域
- 稀疏矩阵

 - 非零元素个数远小于零元素个数
 - 压缩: 只存储非零元素
 - 顺序存储: 顺序存储三元组 <行,列,值>
 - 链式存储: 十字链表法

王道考研/CSKAOYAN.COM

23

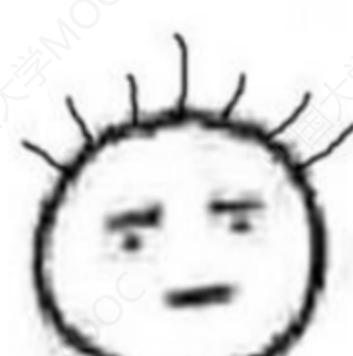
知识回顾与重要考点

常见考题

- 矩阵的压缩存储需要多长的数组

 - 由矩阵行列号 $\langle i, j \rangle$ 推出对应的数组下标号 k 数列求和
 - 由 k 推出 $\langle i, j \rangle$
 - 如何处理不等式中的“刚好大于等于/小于等于”
 - 向上取整/向下取整
- 易错点

 - 存储上三角? 下三角?
 - 行优先? 列优先?
 - 矩阵元素的下标从0? 1? 开始
 - 数组下标从0? 1? 开始



问题 是否忘了, 等差数列求和???

王道考研/CSKAOYAN.COM

24

王道计算机考研
www.cskaoyan.com

bilibili
@王道论坛

新浪微博 weibo.com
@王道计算机考研备考
@王道咸鱼老师-计算机考研
@王道楼楼老师-计算机考研

抖音 短视频
@王道计算机考研

知乎
@王道计算机考研

微信视频号
@王道计算机考研

微信公众平台
@王道在线

等撩

等撩

25