

第一章 函数 极限 连续

第一节 函数

一、考试内容要点精讲	二、常见题型技巧及方法
(1) 函数的概念及常见函数	题型一：复合函数
(2) 函数的性态 (*)	题型二：函数性态 (*)

一、考试内容要点精讲

(一) 函数概念及常见函数

1. 函数概念

定义 1: 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的法则总共有一个确定的 y 和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记为 $y = f(x)$ 。常称 x 为自变量, y 为因变量, D 为定义域。

定义域: $D_f = D$

值域: $R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$

【注】: 函数概念的两个基本要素: 定义域, 对应法则

2. 复合函数

定义 2: 设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , $u = g(x)$ 的定义域为 D_g , 值域为 R_g , 若 $D_f \cap R_g \neq \emptyset$, 则称函数 $y = f[g(x)]$ 函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合函数, 它的定义域为:

$$\{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

3. 反函数

定义 3: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 R_y , 若对任意 $y \in R_y$, 有唯一确定的 $x \in D$, 使得 $y = f(x)$, 则记为 $x = f^{-1}(y)$, 称其为函数 $y = f(x)$ 的反函数。

4. 初等函数

定义 4: 将幂函数、指数、对数、三角、反三角统称为基本初等函数。了解它们的定义域、性质、图形

幂函数: $y = x^\mu$ (μ 为实数)

指数函数: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

三角函数: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$

反三角函数: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$

定义 5: 由常数和基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到的且能用一个解析式表示的函数, 称为初等函数



(二) 函数的性态

1. 单调性

定义：单调增 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ 【严格单调增】

单调不减 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ 【单调增】

单调减 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

单调不减 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

应用：1) 根的个数（严格单调增或减）

2) 不等式 $[a, b]$

$f(a) = 0$ 且严格单调增 $\Rightarrow f(x) > 0 \quad x \in (a, b]$

$f(a) = 0$ 且单调增 $\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad x \in (a, b]$

判定：1) 定义

2) 导数：设 $f(x)$ 在 I 上可导，则：

a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调增

b) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 单调不减

2. 奇偶性

定义：偶函数 $f(x) = f(-x)$ 奇函数 $f(-x) = -f(x)$ 【定义域对称】

【注】：1) 奇函数 $\sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, \ln \frac{1-x}{1+x}, \ln(x + \sqrt{1+x^2})$,

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1}, f(x) - f(-x)$$

偶函数 $x^2, |x|, \cos x, f(x) + f(-x)$

2) 奇函数关于原点对称， $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义， $f(0) = 0$

偶函数关于 y 轴对称

判定：1) 定义

2) 设 $f(x)$ 可导，则

a) $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是偶函数

b) $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是奇函数

3) 连续的奇函数其原函数都是偶函数

连续的偶函数其原函数之一是奇函数

【注】：设 $f(x)$ 连续

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数， $\int_a^x f(t)dt$ (✓)

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数， $\int_a^x f(t)dt$ (×)

1. (2021年2) 设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x=0$ 处的二次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$ ，则：()

(A) $a=1, b=-\frac{1}{2}$

(B) $a=1, b=\frac{1}{2}$

(C) $a=0, b=-\frac{1}{2}$

(D) $a=0, b=\frac{1}{2}$



2. (2021年1) $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的三次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$, 则: ()

(A) $a=1, b=0, c=-\frac{7}{6}$

(B) $a=1, b=0, c=\frac{7}{6}$

(C) $a=-1, b=-1, c=-\frac{7}{6}$

(D) $a=-1, b=-1, c=\frac{7}{6}$

3. 周期性

定义: $f(x+T) = f(x)$

【注】: (1) $\sin x, \cos x, T=2\pi, \sin 2x, |\sin x|, T=\pi$

(2) 若 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期

判定: (1) 定义

(2) 可导的周期函数及其导函数为周期函数

(3) 周期函数的原函数不一定是周期函数

【注】: (1) 设 $f(x)$ 连续且以 T 为周期

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ 是以 } T \text{ 为周期的函数} \Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx = 0$$

(2) 周期函数的原函数是周期函数的充要条件是在一个周期上积分为 0

4. 有界性

定义: 若 $\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有上界

【注】: $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, |\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, |\arctan x| \leq \frac{\pi}{2}, |\arccos x| \leq \pi$

判定: (1) 定义

(2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界

(3) $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $f(a^+), f(b^-)$ 存在
 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a, b) 上有界

(4) $f'(x)$ 在区间 I (有限) 上有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 I 上有界



二、常考题型的方法和技巧

题型一：复合函数

【例1】已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0, a]$, ($a > 0$), 则 $f(x)$ 的定义域为: ()

- (A) $[-1, a-1]$ (B) $[1, a+1]$
(C) $[a, a+1]$ (D) $[a-1, a]$

题型二：函数性态

【例1】已知函数 $f(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 则 α 的取值范围应为: ()

- (A) $(0, +\infty)$ (B) $(0, 3]$
(C) $(0, 2)$ (D) $(1, 3]$

【例2】以下四个命题中正确的是: ()

- (A) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界;
(B) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界;
(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界;
(D) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

【例3】设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得: ()

- (A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加;
(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少;
(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$, 有 $f(x) > f(0)$;
(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$, 有 $f(x) > f(0)$.

【注】 $f'(x_0) > 0 \xrightarrow{x} f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增

【例4】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$, 试证:

- (1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 也是偶函数;
(2) 若 $f(x)$ 为单调不增, 则 $F(x)$ 单调不减;



第二节 极限

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
1. 极限的概念	题型一：极限的概念性质及存在法则
2. 极限的性质	题型二：求极限
3. 极限存在准则	题型三：确定极限的参数
4. 无穷小	题型四：无穷小量阶的比较
5. 无穷大	

一、考点内容要点精讲

(一) 极限的概念

1、数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时}, |a_n - A| < \varepsilon$

【注】(1) 几何意义

(2) 数列 $\{x_n\}$ 的极限与前有限项无关

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a$

2、函数极限

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } x > X \text{ 时}, |f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } x < -X \text{ 时}, |f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时}, |f(x) - A| < \varepsilon$

定理 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时}, |f(x) - A| < \varepsilon$

【注】 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A = f(x_0^-) = f(x_0 - 0)$

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A = f(x_0^+) = f(x_0 + 0)$

需要分左右极限求极限的三种常见情况：

(1) 分段函数在分界点的极限

(2) e^∞ 型极限 (如 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}, \lim_{x \rightarrow \infty} e^x, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$)

(3) $\arctan \infty$ 型极限 (如 $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$)

【例】(2021年3) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right]$ 存在, 求 a 的值

$$\left[a = \frac{e^{-1} - e}{\pi} \right]$$



(二) 极限性质

1、局部有界性：若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内有界

2、保号性：设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

(1) 若 $A > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$

(2) 如果当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq 0$, 那么 $A \geq 0$

【注】：由保号性不难得保序性： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

(1) $A > B \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > g(x)$

(2) 若 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq g(x) \Rightarrow A \geq B$

3、函数值与极限值之间的关系

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$

(三) 极限存在准则

1、夹逼准则 (n 项和)

若 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

2、单调有界准则：单调有界的数列必有极限

单调增，有上界的数列必有极限

单调减，有下界的数列必有极限

(四) 无穷小

1、无穷小量

$f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零，则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小

2、无穷小的比较：设 $\lim \alpha(x) \rightarrow 0, \lim \beta(x) \rightarrow 0$

(1) 高阶：若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

(2) 同阶：若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$;

(3) 等价：若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

(4) 无穷小的阶： $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$, 称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

3、无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的和仍为无穷小

(2) 有限个无穷小的积仍为无穷小

(3) 无穷小量与有界量的积仍为无穷小



(五) 无穷大

1、无穷大量

$f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时趋于无穷, 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大

2、常用无穷大量的比较

(1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时

$$\ln^\alpha x \ll x^\beta \ll a^x \quad (\alpha > 0, \beta > 0, a > 1)$$

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n \quad (\alpha > 0, \beta > 0, a > 1)$$

3、无穷大量与无界变量的关系

(1) 数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量

$$\forall M > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时, 恒有 } |x_n| > M$$

(2) 数列 $\{x_n\}$ 是无界变量

$$\forall M > 0, \exists N > 0, \text{使 } |x_N| > M$$

无穷大 $\Rightarrow$ 无界变量

4、无穷大量与无穷小量的关系

在同一极限中, 如果 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小; 反之 $f(x)$ 是

无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大

二、常考题型的方法和技巧

题型一：极限的概念、性质及存在准则

【例1】设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大的时有: ()

- (A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ (B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$
(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$ (D) $a_n < a + \frac{1}{n}$

【例2】设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有: ()

- (A) $a_n < b_n$, 对任意 n 成立;
(B) $b_n < c_n$, 对任意 n 成立;
(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在;
(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.



【例4】设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是 ()

- (A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散;
- (B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界;
- (C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小;
- (D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小.

【例5】设 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 ()

- (A) 充分必要条件
- (B) 充分非必要条件
- (C) 必要非充分条件
- (D) 既非充分也非必要条件

.....

【例6】(1) 证明, 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{1+n} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

(2) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n (n=1, 2, \dots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛

题型二：求极限

一. 求极限的常用方法

方法 1: 利用有理运算法则求极限

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 那么:

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

推论: 1) 若 $\lim f(x) = A \neq 0$, 则 $\lim f(x)g(x) = A \lim g(x)$;

即: 极限非零的因子可先求出来



2) 若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, $\lim g(x)=0 \Rightarrow \lim f(x)=0$;

3) 若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=A \neq 0$, $\lim f(x)=0 \Rightarrow \lim g(x)=0$

【注】存在 $\pm$ 不存在=不存在 不存在 $\pm$ 不存在=不一定

【例】已知数列 $\{a_n\}$ 单调减, $\{b_n\}$ 单调增, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, 则: ()

- (A) $\{a_n\}$ 收敛, $\{b_n\}$ 不收敛;
- (B) $\{b_n\}$ 收敛, $\{a_n\}$ 不收敛;
- (C) $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都收敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$;
- (D) $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都收敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

方法 2: 利用基本极限求极限

常用的基本极限:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e & \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x &= e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \quad (a > 0) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & (n=m) \\ 0, & (n < m) \\ \infty, & (n > m) \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \infty, & |x| > 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ \text{不存在}, & |x| = -1 \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{nx} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ +\infty, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

方法 3: 利用等价无穷小代换求极限

1. 常用等价无穷小, $x \rightarrow 0$ 时

$$1) x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2, \quad a^x - 1 \sim x \ln a$$



$$2) \quad x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}, \quad \tan x - x \sim \frac{x^3}{3}, \quad x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}, \quad x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$$

3) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$,

$$\text{则 } \int_0^x f(t) dt \sim \int_0^x g(t) dt$$

2. 等价无穷小替换原则

1) 乘除关系可以换;

$$\text{若 } \alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \text{ 则 } \lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta}$$

2) 加、减条件一定条件下可以换

$$(1) \text{ 若 } \alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \text{ 且 } \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1, \text{ 则 } \alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$$

$$(2) \text{ 若 } \alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \text{ 且 } \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1, \text{ 则 } \alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$$

【例】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

方法 4: 利用洛必达法则求极限

若 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0(\infty)$;

2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

【注】: 适用类型 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \Leftarrow \begin{cases} 0 \cdot \infty \Leftarrow \begin{cases} 1^\infty \\ \infty^0 \\ 0^0 \end{cases} \\ \infty - \infty \end{cases}$$



方法 5: 利用泰勒公式求极限

定理 (泰勒公式): 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$$

特别是当 $x_0 = 0$ 时:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

意义: $f(x)$ 和 $f^{(n)}(x)$ 联系起来

用多项式逼近 $f(x)$

几个常用的泰勒公式:

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(5) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

【例】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin^2 x}$

方法 6: 利用夹逼准则求极限

【例】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right]$

方法 7: 利用定积分的定义求极限

【例】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right]$



方法 8：利用单调有界准则求极限

【例】设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n}), n = 1, 2, \dots$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

方法 9：利用中值定理求极限

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a), \quad (a < c < b)$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx, \quad (a \leq c \leq b)$$

【例 1】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right]$

【例 2】设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$.

二. 求极限常见的题型

(一) 函数的极限

七种不定式 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$

1、“ $\frac{0}{0}$ ”型极限

常用方法三种 $\begin{cases} 1) \text{ 洛必达法则} \\ 2) \text{ 等价无穷小代换} \\ 3) \text{ 泰勒公式} \end{cases}$

原式化简 $\begin{cases} 1) \text{ 极限非零的因子极限先求出} \\ 2) \text{ 有理化} \\ 3) \text{ 变量代换} \end{cases}$



【例1】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$

【例2】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$

【例3】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$

【例4】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^2 - \sin^2 x}$

【例5】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{(1+x)^x - 1}$

【注】当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, 这个结论可推广
若 $\alpha(x) \rightarrow 0, \alpha(x)\beta(x) \rightarrow 0$,
则 $(1+\alpha(x))^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$

【例6】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]}$



2、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限

常用方法两种 $\begin{cases} 1) \text{ 洛必达法则} \\ 2) \text{ 分子分母同除以分子和分母各项中最高阶的无穷大} \end{cases}$

【例1】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt}{xe^{x^2} + x^2}$

【例2】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + x^{100}}{2e^x + \ln^{10} x}$

【例3】求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$

3、“ $\infty - \infty$ ”型极限

常用方法三种 $\begin{cases} 1) \text{ 通分化为 } \frac{0}{0} \text{ (适用于分式差)} \\ 2) \text{ 根式有理化 (适用于根式差)} \\ 3) \text{ 提无穷因子, 然后等价代换或变量代换、泰勒公式} \end{cases}$

【例1】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$

【例2】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$



【例3】求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$

【例4】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right)$

4、“0·∞”型极限

常用方法是化为 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$

【例1】求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln |1-x|$

5、“1[∞]”型极限

常用方法三种 $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ 凑基本极限 } \lim [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e, \text{ 其中 } \lim \varphi(x) \neq 0 \quad (\varphi(x) \neq 0) \\ 2) \text{ 改写成指数 } \lim [f(x)]^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln f(x)} \text{ 用洛必达法则} \\ 3) \text{ 利用结论, 若 } \lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty, \text{ 且 } \lim \alpha(x)\beta(x) = A \\ \text{ 则 } \lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A \end{array} \right.$

可以归纳为三步 $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ 写标准形式 原式} = \lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} \\ 2) \text{ 求极限 } \lim \alpha(x)\beta(x) = A \\ 3) \text{ 写结果 原式} = e^A \end{array} \right.$

【例1】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$



【例2】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

【例3】极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x = (\quad)$
 (A) 1 (B) e (C) e^{a-b} (D) e^{b-a}

【例4】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

6、“ $\infty^0, 0^0$ ”型极限

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln f(x)}$$

【例1】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x-1)}$

(二) 数列的极限

1、不定式的极限

【例1】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\arctan n - \frac{\pi}{2} \right]$

【例2】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n$



2、n 项和的数列极限

常用方法 $\begin{cases} 1) \text{ 夹逼原理} \\ 2) \text{ 定积分定义} \\ 3) \text{ 级数求和} \end{cases}$

【例1】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right]$

【例2】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right]$

小结 $\begin{cases} 1. \text{变化部分是主体次量级, 用夹逼定理} \\ 2. \text{变化部分是主体同量级, 用定积分定义} \end{cases}$

【例3】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$

【例4】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$

【例5】设 $x_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (\quad)$ (数学二不要求)



【例6】证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1 \leq i \leq m} a_i$, 其中 $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$,

并利用结论求下列极限:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} \quad (0 < a < b)$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0)$

3、n 项连乘的数列极限

常用方法 $\begin{cases} 1) \text{ 夹逼定理} \\ 2) \text{ 取对数化为 } n \text{ 项和} \end{cases}$

【例1】设 $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

【例2】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1) \cdot (n+2) \cdots (n+n)}$

4、递推关系 $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \cdots)$ 定义的数列

常用方法 $\begin{cases} 1) \text{ 先证 } \{x_n\} \text{ 收敛 (单调有界准则), 然后等式 } x_{n+1} = f(x_n) \\ \text{两端取极限得 } A = f(A), \text{ 由此求极限} \\ 2) \text{ 先令 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \text{ 然后等式 } x_{n+1} = f(x_n) \text{ 两端取极限解得 } A \\ \text{最后再证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \end{cases}$

单调性判定常用的三种方法

1) $x_{n+1} - x_n \geq 0 (\leq 0)$

2) 若 $\{x_n\}$ 不变号, 且 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 (\leq 1)$



3) 设数列 $\{x_n\}$ 由 $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n) (n=1, 2, \dots)$ 所确定

(1) 若 $f(x)$ 单调增, 则

当 $x_1 \leq x_2$ 时, $\{x_n\}$ 单调增; 当 $x_1 \geq x_2$ 时, $\{x_n\}$ 单调减;

(2) 若 $f(x)$ 单调减, 则 $\{x_n\}$ 不单调

【例1】设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}, (n=1, 2, \dots)$,

证明: 数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限

【例2】设 $x_1 = \sqrt{6}, x_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}}, \dots, x_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6}}}}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

【例3】设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + e^{-x_n}, n=1, 2, \dots$

(1) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

(2) 求极限 $\frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n-1}}$

【例4】设 $x_1 = 2, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} (n=1, 2, \dots)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$



【例5】设 $f(x)$ 可微, 且 $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2+x^2}$, 数列 $x_0 = A, x_n = f(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots$
证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在且是方程 $f(x) = x$ 的唯一实根

题型三：确定极限式中的参数

【例1】若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}} dt}{bx - \sin x} = 1$, 求 a, b , 其中 a, b 为正数

【例2】若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + ax + b) = 0$, 求 a, b

【例3】若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^n + 7x^4 + 1)^m - x] = b, (n > 4, b \neq 0)$, 求 n, m, b

题型四：无穷小量阶的比较

1) 洛必达法则 (求导定阶)

若 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量, 且 $f'(x)$ 是 x 的 $k (k \geq 0)$ 阶的无穷小, 则 $f(x)$ 是 $k+1$ 阶无穷小量

2) 等价无穷小代换

若 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量, 且 $f(x) \sim Ax^k (A \neq 0, k > 0)$, 则 $f(x)$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的 k 阶无穷小量

3) 泰勒公式



【例1】把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 进行排序, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列顺序是()

- (A) α, β, γ (B) α, γ, β
(C) β, α, γ (D) β, γ, α

【例2】当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小中最高阶的是()

- (A) $(2 + \tan x)^x - 2^x$ (B) $(\cos x^2)^{\frac{1}{x}} - 1$
(C) $\int_0^{1-\cos x} e^{xt} \sin t^2 dt$ (D) $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt$

【例3】当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则()

- (A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$ (B) $a=1, b=\frac{1}{6}$
(C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$ (D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$

【例4】设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列结论中错误的是()

- (A) $a=0$ (B) $b=1$
(C) $c=0$ (D) $d=\frac{1}{6}$

【例5】已知 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{-x^2} - \cos \sqrt{2}x$ 与 ax^n 是等价无穷小, 则

- (A) $n=2, a=\frac{1}{4}$ (B) $n=3, a=\frac{1}{2}$
(C) $n=4, a=\frac{1}{3}$ (D) $n=5, a=\frac{1}{6}$



第三节 连续

一、考试内容要点精讲	二、常见题型技巧与方法
(1) 连续的概念	题型一：讨论连续性及其间断点的类型
(2) 间断点及其分类	题型二：介值定理、最值定理及零点定理证明题
(3) 连续函数的性质	

一、考试内容要点精讲

(一) 连续的概念

定义 1: 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$

定义 2: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续

定义 3: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续

$f(x)$ 连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 左连续且右连续

定义 4: 区间上的连续

(二) 间断点及其分类

(1) 概念: $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内有定义, 但在 x_0 处不连续, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点

(2) 间断点分类

1) 第一类间断点: 左右极限均存在的间断点

可去间断点: 左极限 = 右极限

跳跃间断点: 左极限 $\neq$ 右极限

2) 第二类间断点: 左右极限至少一个不存在 (第二类不止两种间断点)

无穷间断点: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

振荡间断点: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

(三) 连续性的运算与性质

1) 连续函数和、差、积、商 (分母不为 0) 及复合仍为连续函数

2) 初等函数在其定义区间内是处处连续

3) 闭区间上连续函数的性质:

(1) 有界性: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界

(2) 最值性: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值和最小值

(3) 介值性: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(a) \neq f(b)$, 则对 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一数 C , 至少存在一个 $\xi \in [a, b]$, $f(\xi) = C$

推论: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可取介于它在 $[a, b]$ 上最大值和最小值之间的一切值

(4) 零点定理: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则必 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = 0$



二、常考题型方法与技巧

题型一 讨论连续性及间断点类型

【例1】设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

则常数 a, b 应满足: ()

- (A) $a < 0, b > 0$ (B) $a > 0, b > 0$
(C) $a \leq 0, b > 0$ (D) $a \geq 0, b < 0$

【例3】讨论函数 $f(x) = \frac{x \arctan \frac{1}{x-1}}{\sin \frac{\pi}{2} x}$ 的连续性并指出间断点类型

【例4】函数 $f(x) = \frac{(x+1)|x-1|}{e^{\frac{1}{x-2}} \ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【例6】求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ 的间断点并指出其类型



题型 2 介值定理、最值定理及零点定理的证明题

【例1】设 $f(x)$ 在 (a, b) 内非负连续, 且 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$,
证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$

【例2】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续非负, $f(0) = f(1) = 0$, 求证:
 $\exists \xi \in [0, 1]$, 使 $f(\xi + l) = f(\xi)$, 其中 $0 < l < 1$

【例3】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, $f(0) = f(1)$, 求证: $\exists \xi \in [0, 1]$,
使 $f\left(\xi + \frac{1}{4}\right) = f(\xi)$

【例4】设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 试证明存在
 $\xi \in (-\infty, +\infty)$, 使 $f(\xi) + \xi = 0$



第二章 一元函数微分学

第一节 导数和微分

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
(一) 导数的概念	题型一：导数的概念
(二) 微分的概念	题型二：导数的几何意义
(三) 导数、微分的几何意义	题型三：导数和微分的计算
(四) 连续、可导、微分的关系	
(五) 求导公式	
(六) 求导法则	

一、考试内容要点精讲

(一) 导数的概念（这点变化率）

定义：（导数） $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

定义：（左导数） $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

定义：（右导数） $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

定理：可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数存在且相等

(二) 微分的概念（函数改变量的近似值）

若 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可以表示为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ ，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，

称 $A\Delta x$ 为微分，记 $dy = A\Delta x$

定理：函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微的充分必要条件是：

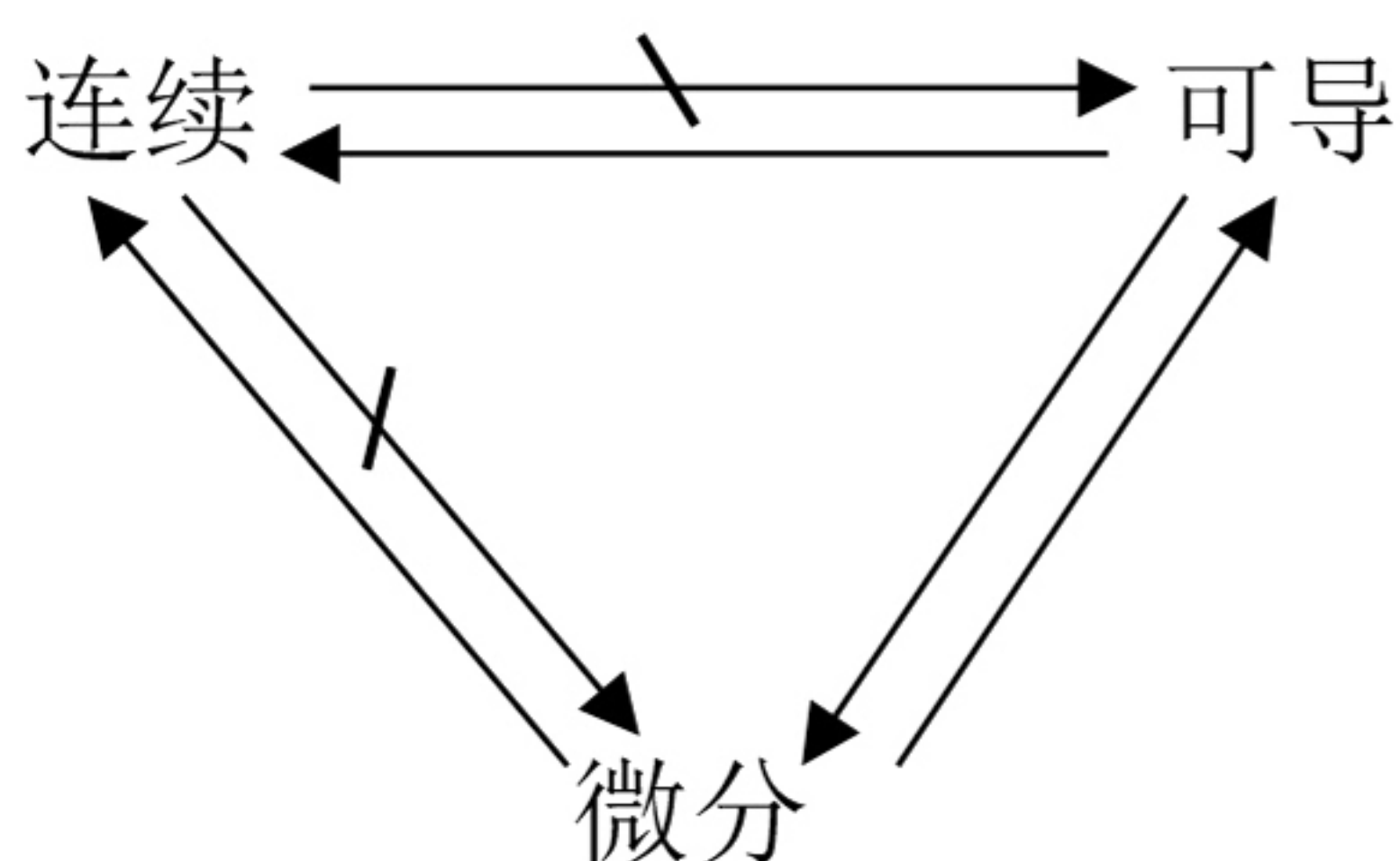
$f(x)$ 在 x_0 处可导，且有 $dy = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$

(三) 导数和微分的几何意义

1) 导数的几何意义：导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率

2) 微分的几何意义：微分 $dy = f'(x_0)dx$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 切线的增量

(四) 连续、可导、微分的关系



【例】设 $f''(x_0)$ 存在，求极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}$

$f(x)$ 可导 $\begin{cases} \rightarrow f'(x) \text{ 连续} \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \text{ 存在} \end{cases}$

(五) 导数公式及求导法则

$(C)' = 0$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$	$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

(六) 求导法则

(1) 有理运算法则

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(uv)' = u'v + uv'$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$

(2) 复合函数求导法

$u = \varphi(x), y = f(u)$ 可导, $y = f[\varphi(x)], \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$

(3) 隐函数求导法

$F(x, y) = 0, \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$

(4) 反函数导数

若 $x = \varphi(y)$ 在某区间上单调、可导, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则其反函数 $y = f(x)$ 也可导

且 $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$

(5) 参数方程求导法



$y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases} (\alpha < t < \beta)$ 确定的函数, 则

1) $\varphi(t)$ 和 $\phi(t)$ 都可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$ [公众号: 考研斯基]

2) $\varphi(t)$ 和 $\phi(t)$ 都二阶可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)} \right) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\phi''(t)\varphi'(t) - \phi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$

(6) 对数求导法 (适用于幂指函数和连乘连除)

(7) 高阶导数

1) 定义: $y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

2) 定义: 常用公式

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right) \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)} \quad (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

二、常考题型方法与技巧

题型一 导数与微分的概念

1) 利用导数定义求极限

【例1】设 $f(-1) = 1$, $f'(-1) = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-3x) - 1}{x - 1}$

【例2】设 $f'(a)$ 存在, 且 $f(a) \neq 0$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n$

【例3】设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3}$ ()

(A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0



【例4】设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) =$

2) 利用导数定义求导数

【例1】设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ ，其中 n 为正整数，则 $f'(0) = (\quad)$

- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$
(C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^n n!$

【例2】设 $f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ，则 $f'(0) = (\quad)$

3) 利用导数定义判断导数的可导性

【例1】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题中错误的是 ()

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$;
(B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$;
(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在;
(D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.



【例2】设 $f(0)=0$ ，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为()

- (A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1-\cos h)$ 存在 (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1-e^h)$ 存在
(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h-\sin h)$ 存在 (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h)-f(h)]$ 存在

【例3】设 $f(x)$ 可导， $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$ ，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导的()

- (A) 充分必要条件 (B) 充分条件但非必要条件
(C) 必要条件但非充分条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

【例4】函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导的点的个数是()

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

【例】设 $f(x)=|x^3-1|g(x)$ ，其中 $g(x)$ 连续，则 $g(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的()

- (A) 充分条件 (B) 必要条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

【例5】设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是()

- (A) $f(a)=0$ ，且 $f'(a)=0$ ； (B) $f(a)=0$ ，且 $f'(a) \neq 0$ ；
(C) $f(a)>0$ ，且 $f'(a)>0$ ； (D) $f(a)<0$ ，且 $f'(a)<0$ ；



【注】

1) $f(x)$ 可导 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 可导

2) 设 $f(x)$ 连续

(1) 若 $f(x_0) \neq 0$, 则在 x_0 处 $f(x)$ 可导 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 可导

(2) 若 $f(x_0) = 0$, 则 $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow |f(x)|$ 在 x_0 处可导

【例6】设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ ()

(A) 处处可导

(B) 恰有一个不可导点

(C) 恰有两个不可导点

(D) 至少有三个不可导点

【例7】设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, $f(0) = 0$, $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

1) 确定 a 使 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续

2) 证明对以上确定的 a , $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续一阶导数

题型二 导数的几何意义

【例1】曲线 $\tan\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为

【例2】曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为



【例3】已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$ ，求该曲线上对应于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处的切线和法线的直角坐标方程

【例4】曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x (a \neq 0)$ 相切，则 $a=(\quad)$
 (A) $4e$ (B) $3e$ (C) $2e$ (D) e

题型三 导数和微分的计算

1) 复合函数的导数

【例1】设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ ，则 $f''(0)=$

【例2】已知 $y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x)=\arctan x^2$ ，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$

【例3】设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^4, & x < 0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -\sqrt{x}, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ ，若 $y=f(g(x))$ ，则 $(\quad)$

(A) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=1$

(B) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ 不存在

(C) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$

(D) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ 不存在



【例4】设 $\varphi(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 函数 $f(x)$ 可导, 求 $F(x) = f[\varphi(x)]$ 的导数

2) 隐函数的导数

【例1】设 $y=y(x)$ 由 $y = \tan(x+y)$ 所确定, 试求 y', y''

【例2】设函数 $y = y(x)$ 由 $y - xe^y = 1$ 所确定, 试求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$

【例3】设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin x - \int_x^y \varphi(u) du = 0$ 所确定, 其中可导函数 $\varphi(u) > 0$, 且 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$, 求 $y''(0)$

3) 参数方程的导数

$$\text{公式: } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}$$

方法: 一阶导数代公式, 二阶导数利用 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right) \frac{1}{x'(t)}$

【例1】设 $f''(t) \neq 0$, 又 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$



【例2】设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定, 试求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$

4) 反函数求导法

【例】设 $y = f(x)$ 的反函数是 $x = \varphi(y)$, 且 $f(x) = \int_1^{2x} e^{t^2} dt + 1$, 则 $\varphi''(1) =$

5) 对数求导法

对数求导法适用于幂指函数、连乘、连除、开方、乘方等

【例1】设 $y = (1+x^2)^{\sin x}$, 求 y'

【例2】设 $y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{x(1+x^2)}}$, 求 y'

6) 高阶导数

常用方法:

- 1) 代公式
- 2) 求一阶 y' , 二阶 y'' , 归纳 n 阶导数 $y^{(n)}$
- 3) 利用泰勒级数 (公式)



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$$

【例1】设 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$, 求 $f^{(n)}(x)$

【例2】设 $f(x) = e^x \sin x$, 求 $f^{(n)}(x)$

【例3】设 $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, 求 $f^{(n)}(x)$

【例4】求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 $n(n > 2)$ 阶导数



第二节导数应用

微信公众号「废柴上岸」免费分享

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
(一) 微分中值定理	题型一：函数的单调性与极值
(二) 极值与最值	题型二：曲线的凹向、拐点、渐近线、曲率
(三) 曲线的凹向与拐点	题型三：方程根的存在性及个数
(四) 曲线渐近线	题型四：证明函数不等式
(五) 平面曲线的曲率 (数三不要求)	题型五：微分中值定理有关的证明题

一、考试内容要点精讲

(一) 微分中值定理

罗尔定理

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续} \\ 2) f(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 上可导} \\ 3) f(a) = f(b) \end{array} \right\} \text{ 则 } \exists \xi \in (a, b), \text{ 使 } f'(\xi) = 0$$

拉格朗日定理

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续} \\ 2) f(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 上可导} \end{array} \right\} \text{ 则 } \exists \xi \in (a, b), \text{ 使 } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

柯西定理

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(x), g(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续} \\ 2) f(x), g(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 上可导, 且 } g'(x) \neq 0 \end{array} \right\} \text{ 则 } \exists \xi \in (a, b), \text{ 使 } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

泰勒公式（拉格朗日余项）

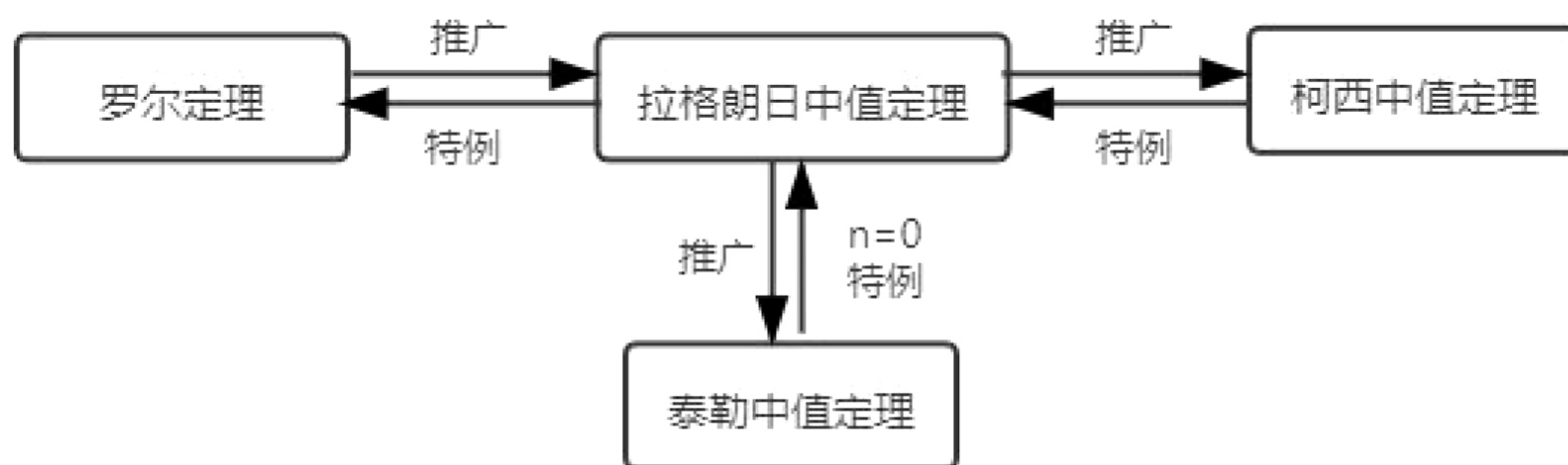
$f(x)$ 在含 x_0 的区间 I 内 $(n+1)$ 阶可导，那么对 $\forall x \in I$ ，至少存在一个 ξ ，使

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \xi \text{ 在 } x_0 \text{ 和 } x \text{ 之间}$$

【注】：(1) 建立函数和导数的关系
(2) 四个中值定理的关系





(二) 极值与最值

1. 极值的概念 若 $\exists \delta > 0$, 使得:

$\forall x \in U(x_0, \delta)$, 恒有 $f(x) \geq f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值

$\forall x \in U(x_0, \delta)$, 恒有 $f(x) \leq f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

2. 极值的必要条件

若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$

可能极值点 $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f'(x_0) \text{ 不存在} \end{cases}$

极值点 $\longleftrightarrow$ 驻点

3. 极值的充分条件

(1) 第一充分条件

设 $f'(x_0) = 0$ (或 $f(x)$ 在 x_0 处连续), 且在 x_0 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内可导

1) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$; $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$,

则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

2) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$; $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) > 0$,

则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

3) 若 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f'(x)$ 不变号, 则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值

(2) 第二充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 则

1) $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

2) $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值

(3) 第三充分条件

$f(x)$ 在 x_0 处 $n(n \geq 2)$ 阶可导, 且

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 但 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 则

(1) n 为偶数, $f(x)$ 在 x_0 处取得极值, $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时取极小值, $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时取极大值

(2) n 为奇数, $f(x)$ 在 x_0 处无极值



4. 函数的最值

(1) 求连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最值第一步：求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的驻点和不可导点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 第二步：求出函数值 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$

第三步：比较以上各点函数值

【注】：若连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内仅有唯一极值点 $\begin{cases} \text{若是极大} \rightarrow \text{最大} \\ \text{若是极小} \rightarrow \text{最小} \end{cases}$

(2) 最大值最小值的应用题——建立目标函数

(三) 曲线的凹点与拐点

1. 曲线的凹向

(1) 定义：凹函数： $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 凸函数： $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (2) 判定：若在区间 I , $f''(x) > 0$, 曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 上是凹的若在区间 I , $f''(x) < 0$, 曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 上是凸的

2. 曲线的拐点

(1) 定义：曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 两侧凹凸性相反

(2) 判定：(必要条件和充分条件) 等同极值 (一个必要, 三个充分)

(四) 曲线的渐近线

1. 水平渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$),那么 $y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线

2. 垂直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$),那么 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线

3. 斜渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a, \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ (或 $x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$)那么 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线

(五) 平面曲线的斜率

微信公众号「废柴上岸」免费分享

废柴上岸

1. 曲率的定义 $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$

2. 曲率的计算

(1) 若曲线由 $y = y(x)$ 给出, 则 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ (记这个)

(2) 若曲线由 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出, 则 $K = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ (这个推, 不记)

3. 曲率圆与曲率关系 $R = \frac{1}{K}$

二、常考题型方法与技巧

题型一 函数的单调性与极值

【例1】求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值

【例2】设函数 $f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 所确定, 求 $f(x)$ 的极值

【例3】设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则 ()

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;
- (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;
- (C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点;
- (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【例4】设 $f(x)$ 二阶导数连续, 且 $(x-1)f''(x) - 2(x-1)f'(x) = 1 - e^{1-x}$

- 1) 若 $x = a (a \neq 1)$ 是极值点时, 是极大值点还是极小值点?
- 2) 若 $x = 1$ 是极值点时, 是极大值点还是极小值点?

微信公众号「废柴上岸」免费分享

废柴上岸



【例5】设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} = a \neq 0$

试着讨论 $f(x)$ 在 x_0 点的极值

题型二 函数的凹向、拐点、渐近线和曲率

【例1】设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = \sin x$, 且 $f'(x) = 0$, 则()

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;
- (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;
- (C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点;
- (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【例2】设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$ 确定, 求 $y = y(x)$ 的极值和其曲线

$y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点

【例3】曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线的方程为



【例4】曲线 $y = e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)}$ 的渐近线的条数为()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【例5】求曲线 $y = x \arctan x$ 的渐近线

题型三 方程的根的存在性和个数

1 存在性

方法 1: 零点定理

方法 2: 罗尔定理

2. 根的个数

方法 1: 单调性

方法 2: 罗尔定理推论

罗尔定理推论: 若在区间上 I 上 $f^{(n)}(x) \neq 0$, 则方程 $f(x)=0$ 在 I 上最多 n 个实根

【例1】设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为任意实数, 求证方程 $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx = 0$ 在 $[0, \pi]$ 内必有实根

【例2】试讨论方程 $\ln x - \frac{x}{e} + 1 = 0$ 的实根个数

【例3】试证方程 $2^x - x^2 = 1$ 有且仅有三个实根



【例5】试确定方程 $x = ae^x$ ($a > 0$) 实根个数

【例6】设当 $x > 0$ 时，方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个解，试求 k 的取值范围

【例7】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微，且当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $0 < f(x) < 1, f'(x) \neq 1$ ，
试证明在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个 x ，使 $f(x) = x$

【例8】设 $f''(x) < 0, f(1) = 2, f'(x) = -3$ ，求证： $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 有且仅有一根

题型四 证明函数不等式

- 1) 单调性 2) 最大最小值 3) 拉格朗日中值定理
4) 泰勒公式 5) 凹凸性

【例1】设 $x \in (0, 1)$ ，证明 $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$

【例2】求证： $\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a}$ ($0 < a < b$)



【例3】比较 e^π 与 π^e 的大小

【例4】设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 证明: $f(x) \geq x$

【例5】试证 $(x+y) \ln \frac{x+y}{2} \leq x \ln x + y \ln y$ ($x > 0, y > 0$)

题型五 微分中值定理有关的证明题

(一) 证明存在一个点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$

方法: 构造辅助函数用罗尔定理

构造辅助函数的方法主要有两种:

1. 分析法(还原法): 根据对预证的结论 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$ 的分析, 确定 $g(x)$, 使 $g'(x) = F[\xi, f(\xi), f'(\xi)]$

2. 微分方程法 预证: $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$

1) 求微分方程 $F[x, y, y'] = 0$ 的通解 $H(x, y) = C$

2) 设辅助函数: $g(x) = H(x, f(x))$

【例1】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = b, f(b) = a$, a 与 b 同号

求证: $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$



【例2】设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导且 $f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = 2$,

求证: $\exists \xi \in (1,2)$ 使 $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$

【注】

1) 欲证 $\xi f'(\xi) + nf(\xi) = 0$, 令 $F(x) = x^n f(x)$

2) 预证 $\xi f'(\xi) - nf(\xi) = 0$, 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x^n}$

【例3】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = 0$,

求证: $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$

【注】

1) 欲证 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{\lambda x} f(x)$;

特别的 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^x f(x)$;

$f'(\xi) - f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{-x} f(x)$;

2) 预证 $\alpha f'(\xi) - \beta f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{\frac{\beta}{\alpha} x} f(x)$; ($\alpha \neq 0$)

3) 预证 $f'(\xi) + g'(x)f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{g(x)} f(x)$;

4) 预证 $f'(\xi) + g(x)f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{\int g(x) dx} f(x)$;

【例4】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 证明:

1) 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $f(\eta) = \eta$

2) 对任意实数 λ , 存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$



【例5】设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$ ，证明：

- (1) 存在 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $f'(\xi)=1$;
- (2) 存在 $\eta \in (-1,1)$ ，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

【例6】设函数 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 上二阶可导，且 $g''(x) \neq 0$ ，

$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$ ，试证：

- 1) 在 $[a,b]$ 内 $g(x) \neq 0$;
- 2) 在 (a,b) 内至少有一点 ξ ，使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$;

证明柯西定理

证明拉格朗日定理

【例7】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ ，

求证： $\exists \xi \in (0,1)$ ，使 $\int_0^\xi f(x)dx = -\xi f(\xi)$



【例8】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$ ，
求证： $\exists \xi \in (0,1)$ ，使 $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$

【例9】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $f(0) = 0$ ， $\int_0^1 f(x) dx = 0$ ，
求证： $\exists \xi \in (0,1)$ ，使 $\int_0^\xi f(x) dx = \xi f(\xi)$

(二) 证明存在两个点 $\xi, \eta \in (a,b)$ ，使 $F[\xi, \eta, f(\xi), f(\eta), f'(\xi), f'(\eta)] = 0$

方法：(1) 不要求 $\xi \neq \eta$

在同一区间 $[a,b]$ 上用两次中值定理（拉格朗日、柯西中值定理）

(2) 要求 $\xi \neq \eta$

将区间 $[a,b]$ 分为两个子区间，在两个子区间上分别用拉格朗日中值定理

【例1】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， (a,b) 内可导，且 a, b 同号，

试证明存在 $\xi, \eta \in (a,b)$ ，使 $f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)$

【例2】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， (a,b) 内可导，且 $f'(x) \neq 0$ ，

证明存在 $\xi, \eta \in (a,b)$ ，使 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$



【例3】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 1$, 试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使 $e^{\eta-\xi} [f(\eta) + f'(\eta)] = 1$

【例4】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: 1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$
2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0, 1)$, 使 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$

【例5】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 试证对任意给定的正数 a, b , 在 $(0, 1)$ 内一定存在互不相同的 ξ, η , 使 $\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$

(三) 证明存在一个中值 $\xi \in (a, b)$, 使 $F(\xi, f^{(n)}(\xi)) \geq 0 (n \geq 2)$

方法: 用带拉格朗日余项的泰勒公式, 其中 x_0 点选题目中提供函数值和导数值信息多的点

【例1】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f'(a) = f'(b) = 0$, 求证:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ 使 } |f''(\xi)| \geq 4 \frac{|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}$$



【例2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导, $f(0)=0, f(1)=1, f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$

求证: $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $|f'''(\xi)| \geq 24$

【例3】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)=f(1)=0$

$\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1$, 证明 $\max_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \geq 8$



第三章 一元函数积分学

第一节 不定积分

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
(一) 两个基本概念	题型一 计算不定积分
(二) 原函数的存在性	题型二 不定积分杂例
(三) 不定积分的性质	
(四) 基本积分公式	
(五) 三种主要积分法	
(六) 三类常见可积函数的积分	

一、考试内容要点精讲

(一) 两个基本概念

1. 原函数 $F'(x) = f(x)$
2. 不定积分 $\int f(x)dx = F(x) + C$

(二) 原函数存在定理

- 1) 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 I 上必有原函数 $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$
- 2) 若 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点, 则 $f(x)$ 在区间 I 上没有原函数

(三) 不定积分的性质

- 1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ $d\int f(x)dx = f(x)dx$
- 2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$ $\int df(x) = f(x) + C$
- 3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
- 4) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(四) 基本积分公式

$$\begin{aligned} \int 0dx &= C \\ \int x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1) & \int e^x dx &= e^x + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \sec^2 x dx &= \tan x + C & \int \csc^2 x dx &= -\cot x + C \\ \int \sec x \tan x dx &= \sec x + C & \int \csc x \cot x dx &= -\csc x + C \end{aligned}$$



$$\int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + C$$

$$\int \csc x dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2-a^2} \right| + C$$

(五) 三种主要积分法

1) 第一类换元法 (凑微分法)

若 $\int f(u) du = F(u) + C$, 且 $\varphi(x)$ 可导, 则

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$$

2) 第二类换元法

设函数 $x = \varphi(t)$ 是可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 又设

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(t) + C$$

$$\text{则 } \int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

$$1) \sqrt{a^2-x^2} \quad x = a \sin t (a \cos t)$$

$$2) \sqrt{a^2+x^2} \quad x = a \tan t$$

$$3) \sqrt{x^2-a^2} \quad x = a \sec t$$

3) 分部积分法

设 $u(x), v(x)$ 有连续一阶导数, 则

$$\int u dv = uv - \int v du$$

注: (1) “适用于两类不同函数相乘”

(2) $\int v du$ 比 $\int u dv$ 好积

$$\int P_n(x) e^{\alpha x} dx \quad \int P_n(x) \sin \alpha x dx \quad \int P_n(x) \cos \alpha x dx$$

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx \quad \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$$

$$\int P_n(x) \ln x dx \quad \int P_n(x) \arctan x dx \quad \int P_n(x) \arcsin x dx$$

(六) 三类常见可积函数积分

1) 有理函数积分 $\int R(x) dx$

(1) 一般法 (部分分式法)

(2) 特殊方法 (加项减项拆或凑微分降幂)



2) 三角有理式积分 $\int R(\sin x, \cos x) dx$ (1) 一般方法 (万能代换) 令 $\tan \frac{x}{2} = t$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

(2) 特殊方法 (三角变形、换元、分部)

a) 若 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则令 $u = \cos x$, 凑 $d \cos x$ b) 若 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则令 $u = \sin x$, 凑 $d \sin x$ c) 若 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, 则令 $u = \tan x$, 凑 $d \tan x$ 3) 简单无理函数积分 $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

$$\text{令 } \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

二、常考题型方法与技巧

题型一 计算不定积分

$$\text{【例1】 } I = \int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$$

$$\text{【例4】 } I = \int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} dx$$

$$\text{【例7】 } I = \int \frac{1}{x+x^9} dx$$



【例8】 $I = \int \frac{1+x^4}{1+x^6} dx$

【例10】 $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

【例11】 $I = \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x}$

【例13】 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$

题型二 不定积分杂例

【例1】 若 $\int xf(x)dx = \arcsin x + C$, 求 $I = \int \frac{1}{f(x)} dx$

【例2】 若 $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $I = \int xf'(x)dx$



【例3】设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x \geq 0$ 时， $F(x)f(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$ ，

已知 $F(0) = 1, F(x) > 0$ ，求 $f(x)$

【例4】设 $f'(e^x) = \sin x$ ，求 $f(x)$

【例5】求不定积分 $\int e^{-|x|} dx$



第二节 定积分

微信公众号「废柴上岸」免费分享

废柴上岸

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
(一) 定积分概念	题型一 定积分的概念、性质和几何意义
(二) 定积分的几何意义	题型二 定积分计算
(三) 可积性	题型三 变上限定积分函数及其应用
(四) 定积分的计算	题型四 积分不等式
(五) 变上限积分	
(六) 定积分的性质	

一、考试内容要点精讲

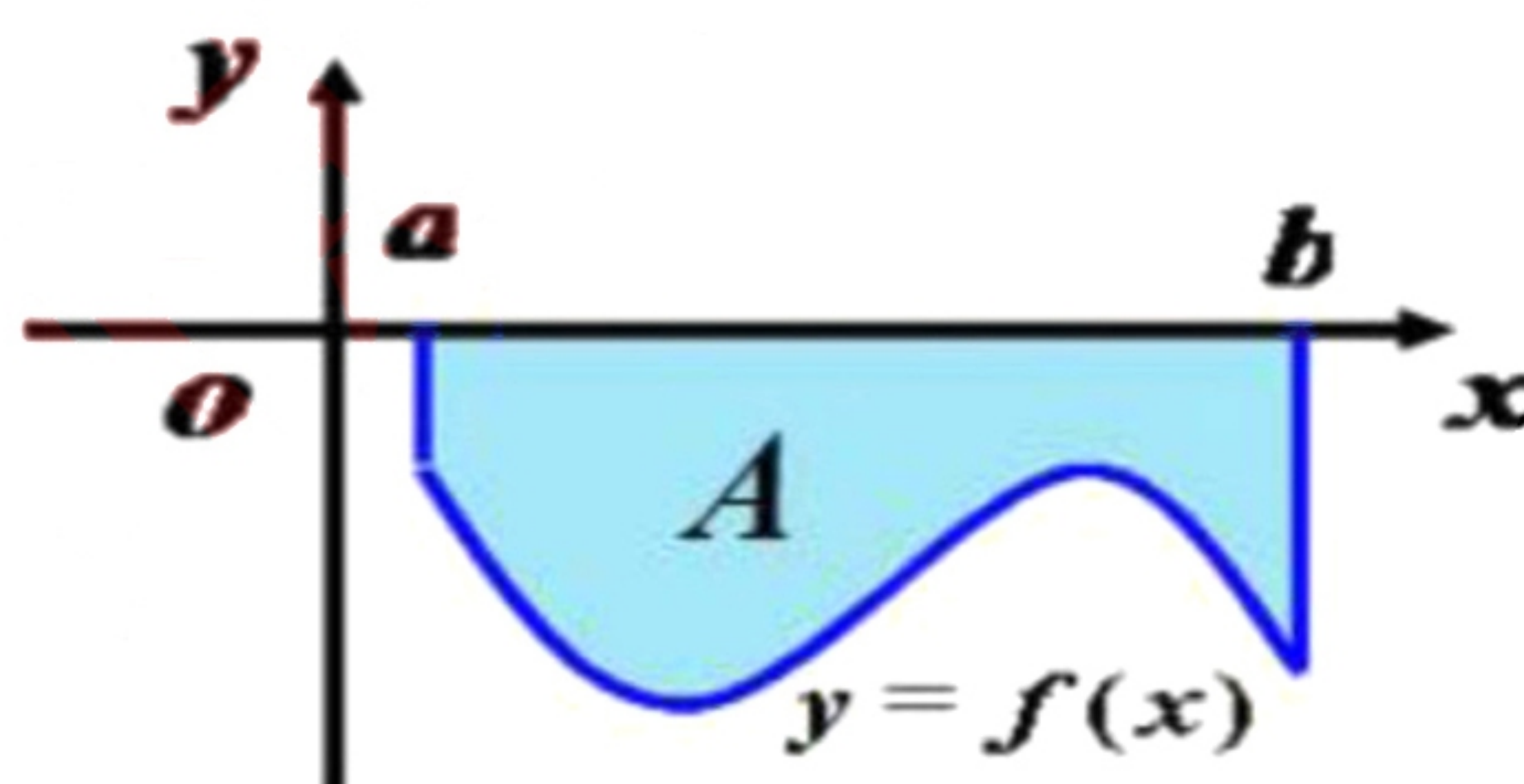
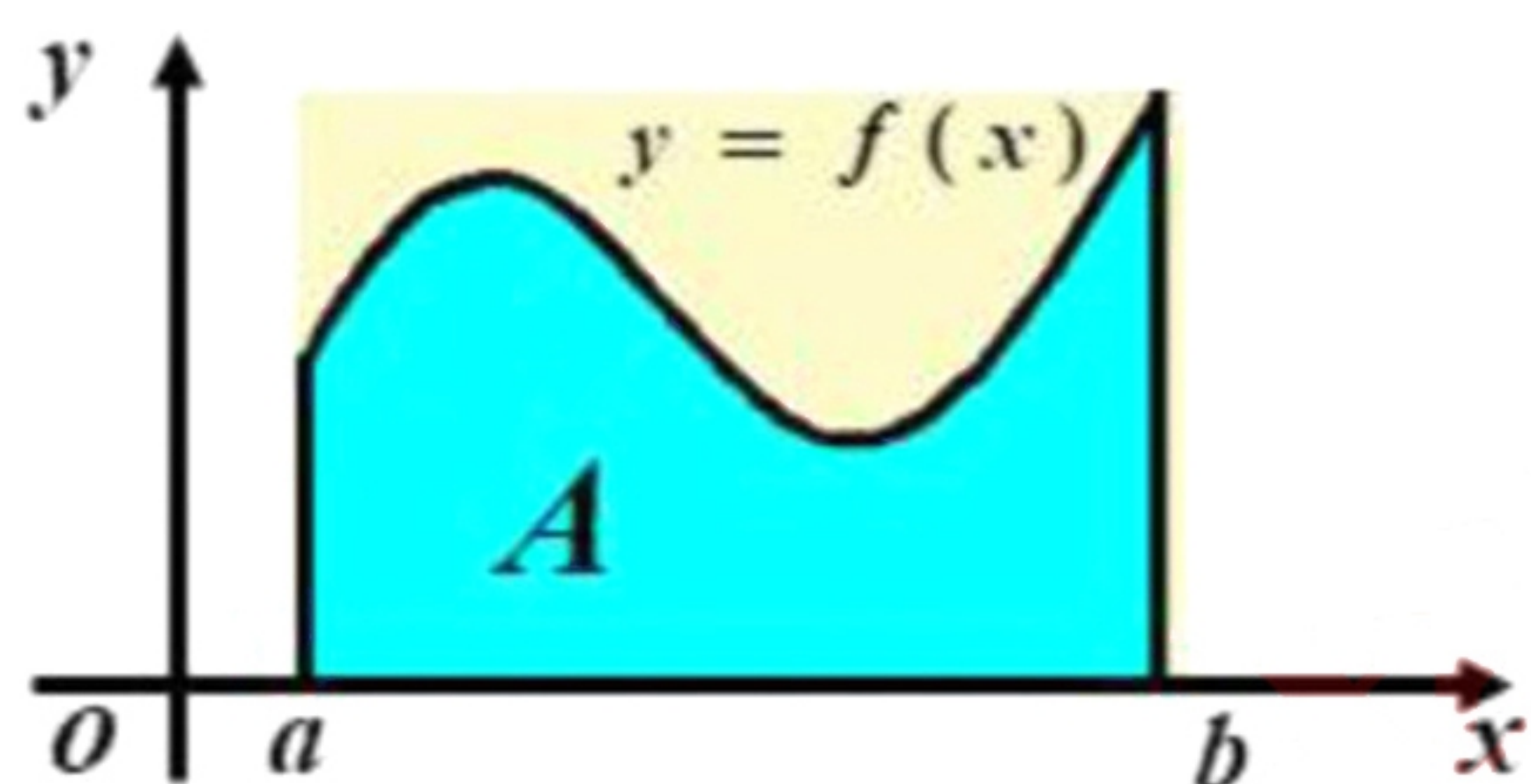
(一) 定积分的定义 (特殊的极限-数)

$$\int_a^b f(x) dx \triangleq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k [\lambda: \text{是长度最大值}]$$

注: 1. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$

$$2. \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$

(二) 定积分的几何意义



(三) 定积分的存在性

- 1) 必要条件 $f(x)$ 有界
- 2) 充分条件
 - (1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续
 - (2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界且只有有限个间断点
 - (3) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上仅有有限个第一类间断点

(四) 定积分的计算

- 1) 牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

- 2) 换元积分法

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

- 3) 分部积分法

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

微信公众号「废柴上岸」免费分享

废柴上岸



4) 利用奇偶性、周期性

$$(1) \int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0 & f(x) \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^a f(x) dx & f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$$

$$(2) \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

5) 利用公式

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$(2) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

(五) 变上限积分函数及其应用 $\int_a^x f(t) dt = F(x)$

定理：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可导且 $\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$

变上限求导的三个类型

$$(1) \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right)' = f(\psi(x)) \psi'(x) - f(\varphi(x)) \varphi'(x)$$

$$(2) \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt \right)' = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt + f(x, \psi(x)) \psi'(x) - f(x, \varphi(x)) \varphi'(x)$$

$$(3) \left(\int_a^b f(x, t) dt \right)' = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$$

【例1】设 $f(x)$ 连续，试求下列函数的导数

$$1) \int_{e^x}^{x^2} f(t) dt;$$

$$2) \int_0^x (t-x) f(t) dt$$

$$3) \int_0^x \sin(x-t)^2 dt$$

$$4) \int_1^2 f(x+t) dt$$

(六) 定积分的性质

1) 不等式

$$\textcircled{1} \text{ 若 } f(x) \leq g(x), \text{ 则 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续, 则 } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\textcircled{3} \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

2) 中值定理

$$\textcircled{1} \text{ 若 } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续, 则 } \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \quad a < b < c$$



② 若 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \quad a \leq c \leq b$$

【例2】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(b)$.

求证: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$

二、常考题型方法与技巧

题型一 定积分的概念、性质和几何性质

【例1】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right]^{\frac{1}{n}}$

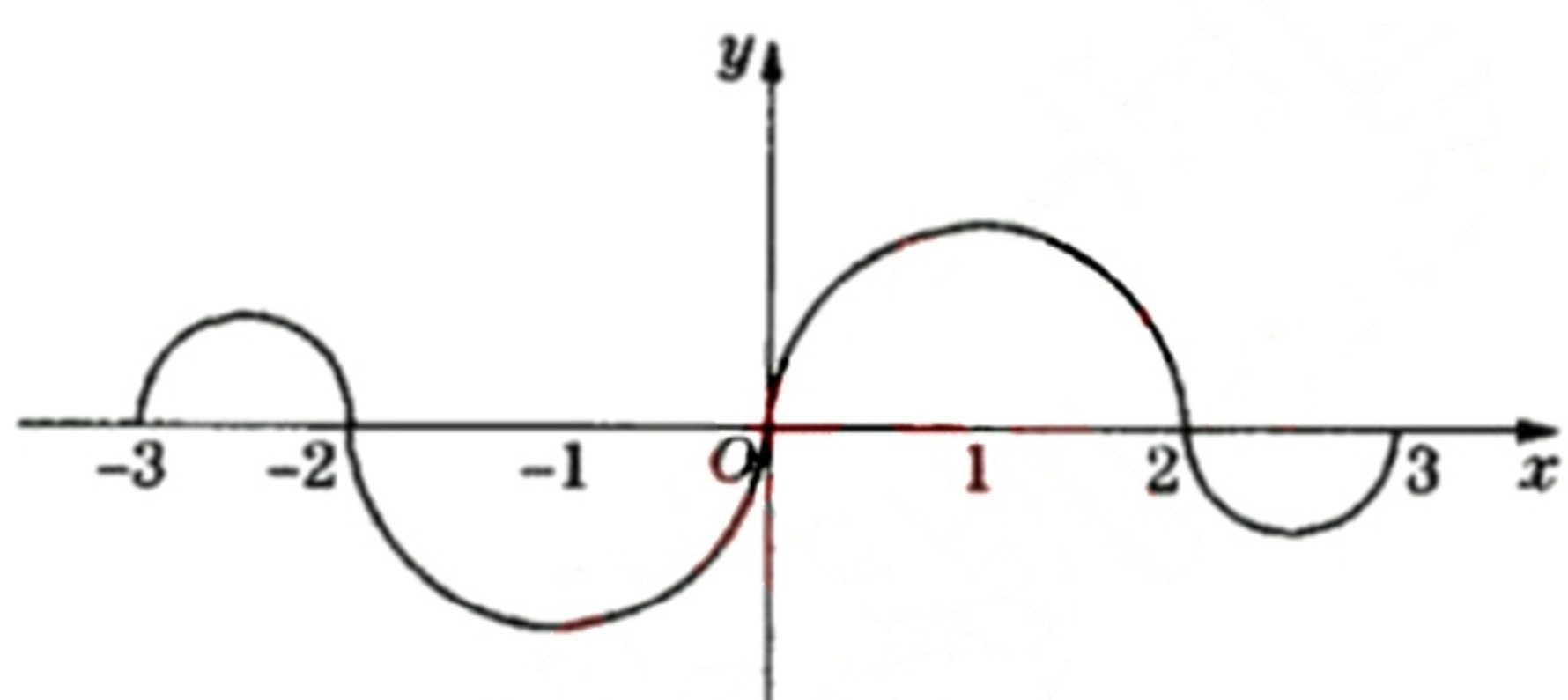
【例2】 设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+2} t \sin \frac{3}{t} f(t) dt =$

【例3】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx$



【例4】如图，连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为1的上、下半圆周，在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 上的图形分别是直径为2的下、上半圆周(图), 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则下列结论正确的是()

- (A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ (B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$
(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$ (D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$



题型二 定积分计算

【例1】 $I = \int_{-1}^1 \frac{2x^2 + \sin x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$

【注】 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} a^2$

$\int_0^a \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{\pi}{4} a^2$

$\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{\pi}{2} a^2$

【例2】 $I = \int_0^{n\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$

【例3】 $I = \int_0^\pi x \sin^n x dx$



【例4】设 n 为正整数，证明：

$$\int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数} \\ 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

【例6】设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$ ，计算 $\int_0^\pi f(x) dx$

【例8】 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

【例9】 $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1 + e^x} \sin^4 x dx$

【例10】已知 $f(x)$ 连续， $\int_0^x t f(x-t) dt = 1 - \cos x$ ，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ 的值

【例11】设 $f'(x) = \arcsin(x-1)^2$ ， $f(0) = 0$ ，求 $\int_0^1 f(x) dx$



【例12】若 $f(x) = \frac{x}{1 + \cos^2 x} - \int_{-\pi}^x f(x) \sin x dx$, 求 $f(x)$

题型三 变上限积分函数及其应用

1) 连续性 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上连续

2) 可导性

定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可导且 $\left(\int_a^x f(t) dt\right)' = f(x)$

有关 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在一点处的可导性的结论

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除点 $x = x_0 \in (a, b)$ 外均连续, 则在点 $x = x_0$ 处

$$f(x) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

1) 连续 $\rightarrow$ 可导, 且 $F'(x_0) = f(x_0)$

2) 可去 $\rightarrow$ 可导, 且 $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

3) 跳跃 $\rightarrow$ 连续但不可导, 且 $F'_+(x_0) = f(x_0^+)$ $F'_-(x_0) = f(x_0^-)$

【例1】设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x = 0$ 外处处连续, $x = 0$ 是第一类间断点,

则 $\int_0^x f(t) dt$ 是: ()

(A) 连续的奇函数

(B) 在 $x = 0$ 间断的奇函数

(C) 连续的偶函数

(D) 在 $x = 0$ 间断的偶函数

【例2】设 $g(x) = \int_0^x f(u) du$, 其中 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + 1), & \text{若 } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}(x - 1), & \text{若 } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

则 $g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内 ()

(A) 无界 (B) 递减 (C) 不连续 (D) 连续



【例3】设 $f(x)$ 是连续函数， $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则()

- (A) $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是偶函数；
- (B) $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是奇函数；
- (C) $f(x)$ 是周期函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是周期函数；
- (D) $f(x)$ 是单调函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是单调函数；

【例4】设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“ $M \Leftrightarrow N$ ”表示

“ M 的充分必要条件是 N ”，则必有()

- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数；
- (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数；
- (C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数；
- (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 必是单调函数；

【例5】设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则()

- (A) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点
- (B) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点
- (C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导
- (D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导

【例6】设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0) \neq 0$ ，求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$



【例7】设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \cdot \sin t dt$, 则 $F(x)$ ()

- (A) 为正常数 (B) 为负常数 (C) 为0 (D) 不是常数

【例9】设 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 且其反函数为 $g(x)$

若 $\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x$, 求 $f(x)$

【例11】设 $f(t)$ 连续, $f(t) > 0, f(-t) = f(t)$, 令 $F(x) = \int_{-a}^a |x-t| f(t) dt \quad -a \leq x \leq a$

- 1) 试证曲线 $y = F(x)$ 在 $[-a, a]$ 上是凹的
- 2) 当 x 为何值时, $F(x)$ 取得最小值
- 3) 若 $F(x)$ 的最小值可表示为 $f(a) - a^2 - 1$, 试求 $f(t)$

题型四 积分不等式

证明积分不等式常用的方法

- 1) 定积分不等式性质
- 2) 变量代换
- 3) 积分中值定理
- 4) 变上限积分

5) 柯希积分不等式 $\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$

【例1】设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则

- (A) $I_1 > I_2 > 1$ (B) $1 > I_1 > I_2$
(C) $I_2 > I_1 > 1$ (D) $1 > I_2 > I_1$



【例2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，单调减，求证：

$$\int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^1 f(x) dx \quad (0 < a < 1)$$

【例3】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0, 0 < f'(x) < 1$,

$$\text{求证: } \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 > \int_0^1 f^3(x) dx$$

【例5】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数， $f(a)=0$ ，求证：

$$\max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \geq \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx$$

【例6】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0)=0$ ，求证：

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2(x) dx$$

【注】若本题再加一个条件 $f(1)=0$ ，便可证明：

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{4} \int_0^1 f'^2(x) dx \text{ 及 } \int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 f'^2(x) dx$$



第三节 反常积分

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
(一) 无穷区间上的反常积分	题型一 反常积分的概念及敛散性
(二) 无界函数的反常积分	题型二 反常积分计算

一、考试内容要点精讲

(一) 无穷区间上的反常积分

$$\text{定义1 } \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

$$\text{定义2 } \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

$$\text{定义3 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

定理 1 (比较判别法)

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $0 \leq f(x) \leq g(x)$, 则

$$1) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛}$$

$$2) \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 发散} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ 发散}$$

定理 2 (比较判别法的极限形式)

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 非负连续, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$, 则

$$1) \text{ 当 } \lambda > 0 \text{ 时, } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ 与 } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 同敛散}$$

$$2) \text{ 当 } \lambda = 0 \text{ 时, } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛}$$

$$3) \text{ 当 } \lambda = +\infty \text{ 时, } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ 发散} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 发散}$$

$$\text{常用结论: } \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} p > 1 \text{ 收敛} \\ p \leq 1 \text{ 发散} \end{cases} \quad (a > 0)$$

(二) 无界函数的反常积分

$$\text{定义1 设点 } a \text{ 为 } f(x) \text{ 的瑕点, } \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

$$\text{定义2 设点 } b \text{ 为 } f(x) \text{ 的瑕点, } \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

$$\text{定义3 设点 } c \text{ 为 } f(x) \text{ 的瑕点 } (a < c < b), \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

定理 1 (比较判别法)

设 $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续, 且 $0 \leq f(x) \leq g(x)$, 则

$$1) \int_a^b g(x) dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ 收敛}$$

$$2) \int_a^b f(x) dx \text{ 发散} \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ 发散}$$



定理 2 (比较判别法的极限形式)

设 $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 非负连续, $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$, 则

1) 当 $\lambda > 0$ 时, $\int_a^b f(x) dx$ 与 $\int_a^b g(x) dx$ 同敛散

2) 当 $\lambda = 0$ 时, $\int_a^b g(x) dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ 收敛

3) 当 $\lambda = +\infty$ 时, $\int_a^b g(x) dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ 发散

常用结论: $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx, \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx = \begin{cases} p < 1 & \text{收敛} \\ p \geq 1 & \text{发散} \end{cases}$

二、常考题型方法与技巧

题型一 反常积分的概念与敛散性

【例1】下列反常积分发散的是()

- (A) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sin x}$ (B) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
(C) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (D) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

【例2】(2016年I) 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a (1+x)^b} dx$ 收敛, 则()

- (A) $a < 1, b > 1$ (B) $a > 1, b > 1$
(C) $a < 1, a+b > 1$ (D) $a > 1, a+b > 1$

【例3】设 m, n 均是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性

- (A) 仅与 m 的取值有关 (B) 仅与 n 的取值有关
(C) 与 m, n 的取值都有关 (D) 与 m, n 的取值都无关



【例4】设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$, 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则

- (A) $\alpha < -2$ (B) $\alpha > 2$
(C) $-2 < \alpha < 0$ (D) $0 < \alpha < 2$

题型二 反常积分计算

【例1】计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$

【例2】计算 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{x^2-2x}}$

【例4】求证: $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$, 并求其值



第四节 定积分应用

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
(一) 几何应用	题型一 几何应用
(二) 物理应用	题型二 物理应用

一、考试内容要点精讲

(一) 几何应用

1. 平面域的面积

设有平面域 D ，则该平面域 D 的面积为

$$S = \iint_D 1 d\sigma$$

1) 若平面域 D 由曲线 $y = f(x), y = g(x) (f(x) \geq g(x)), x = a, x = b (a < b)$ 所围成，

$$S = \iint_D 1 d\sigma = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} dy = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

2) 若平面域 D 由曲线 $\rho = \rho(\theta), \theta = \alpha, \theta = \beta (\alpha < \beta)$ 所围成，则其面积为

$$S = \iint_D 1 d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\rho(\theta)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\theta) d\theta$$

2. 空间体体积

1) 旋转体体积

平面 D 绕直线 $L: ax + by + c = 0$ (该直线不穿过区域 D) 旋转所得旋转体体积记为 V

$$dV = 2\pi r(x, y) d\sigma \quad V = 2\pi \iint_D r(x, y) d\sigma$$

$$r(x, y) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\textcircled{1} (\text{绕 } x \text{ 轴转动}) V = 2\pi \iint_D y d\sigma = 2\pi \int_a^b dx \int_0^{f(x)} y dy = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$\textcircled{2} (\text{绕 } y \text{ 轴转动}) V = 2\pi \iint_D x d\sigma = 2\pi \int_a^b dx \int_0^{f(x)} x dy = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

2) 已知横截面面积

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

3. 曲线弧长 (数三不要求)

$$1) C: y = y(x), a \leq x \leq b, S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$2) C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta, S = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

$$3) C: \rho = \rho(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta, S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$$



4. 旋转体侧面积（数三不要求）

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

(二) 物理应用

1. 压力 2. 变力做功 3. 引力

二、常考题型方法与技巧

题型一 几何应用

【例1】设 $f(x) = \int_{-1}^x (1 - |t|) dt$ ($x \geq -1$)，求曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围图形的面积

【例2】设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定，求图形 A 绕 $x = 2$ 旋转一周所得旋转体的体积

【例3】过点 $(1, 0)$ 作曲线 $y = x^2$ 的切线，则该切线与曲线 $y = x^2$ 及 x 轴围成平面图形 D

- 1) 求 D 的面积 A
- 2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V
- 3) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V
- 4) 求 D 绕直线 $y = 4$ 旋转一周所得旋转体的体积 V

【例4】设对数螺线 $\rho = e^\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 及射线 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 围成的平面图形 D

- (1) 求 D 的面积 A
- (2) 求 D 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积 V



【例5】设星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$, 求

1) 它所围成的面积 2) 它的周长 3) 它绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积

题型二 物理应用

【例2】一容器的内侧是由曲线 $y = x^2$ 绕 y 轴旋转而成的曲面，其容积为 $72\pi m^3$ ，其中盛满水，若将容器中的水从容器的顶部抽出 $64\pi m^3$ ，至少需要做多少功？（长度单位： m 重力加速度为： $g m/s^2$ 水的密度： $10^3 kg/m^3$ ）



第五节 导数在经济学中的应用

一、考试内容要点精讲

1. 经济学中常见的函数

- 1) 需求函数: $x = \varphi(p)$
- 2) 供给函数: $x = \psi(p)$
- 3) 成本函数: $C = C(x) = C_1 + C_2(x)$
平均成本: $AC = \bar{C} = \frac{C}{x} = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2(x)}{x}$
- 4) 收益函数: $R = R(x) = px$
- 5) 利润函数: $L = L(x) = R(x) - C(x)$

2. 边际函数及边际分析

- (a) 边际成本: $MC = C'(q)$ q 是产量
- (b) 边际收益: $MR = R'(q)$ q 是产量
- (a) 边际利润: $ML = L'(q)$ q 是销售量

3. 弹性函数与弹性分析

- ① 弹性函数的有关概念 设 $y = f(x)$ 可导,

$$\eta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = f'(x) \frac{x}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} x$$

- ② 经济学中常用的弹性分析

$$(a) \text{ 需求的价格弹性 } \eta_d = \frac{p}{\varphi(p)} \varphi'(p) \quad (\eta_d < 0)$$

$$\eta_d = -\frac{p}{\varphi(p)} \varphi'(p) \quad (\eta_d > 0)$$

$$(b) \text{ 供给的价格弹性 } \eta_s = \frac{p}{\psi(p)} \psi'(p)$$



二、常考题型方法与技巧

【例1】(2019年)以 P_A, P_B 分别表示 A, B 两个商品的价格, 设商品 A 的需求函数

$Q_A = 500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2$, 则当 $P_A = 10, P_B = 20$ 时, 商品 A 的需求量对自身价格弹性 $\eta_{AA} (\eta_{AA} > 0)$ 为

【例2】(2020年)设厂家生产某产品的产量为 Q , 成本 $C(Q) = 100 + 13Q$,

设该产品的单价为 P , 需求量 $Q(p) = \frac{800}{P+3} - 2$, 则该厂家获得

最大利润时的产量为

补充: $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积



第四章 常微分方程

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
(一) 常微分方程的基本概念	题型一 微分方程求解
(二) 一阶微分概念	题型二 综合题
(三) 可降阶的微分方程 (数三不要求)	题型三 应用题 ①定积分 ②方程
(四) 高阶线性微分方程	
(五) 差分方程 (仅数三要求)	

一、考试内容要点精讲

(一) 微分方程的基本概念

1. 微分方程
2. 微分方程的阶 (未知函数导数的最高阶数)
3. 微分方程的解
4. 微分方程的通解 $\begin{cases} 1. \text{含有任意常数} \\ 2. \text{独立任意常数的个数} = \text{阶数} \end{cases}$
5. 微分方程的特解
6. 初始条件
7. 积分曲线 微分方程的解对应的曲线

(二) 一阶微分方程

1) 可分离变量的方程

$$y' = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

$$\text{或 } g(y)dy = f(x)dx$$

2) 齐次方程 $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\text{令 } \frac{y}{x} = u \quad y = xu \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$u + x \frac{du}{dx} = f(u) \Rightarrow x \frac{du}{dx} = f(u) - u \Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

3) 线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$

$$\text{通解: } y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

4) 伯努利方程 (仅数学一要求)

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 1) \quad (y^{1-\alpha} = u)$$

5) 全微分方程

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

$$a) \text{判定: } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$



b)解法:

1)偏积分 2)凑微分 3)线积分

(三) 可降阶的高阶方程 (数三不要求)

1) $y'' = f(x)$

2) $y'' = f(x, y')$ $\left(y' = p, y'' = \frac{dp}{dx} \right)$

3) $y'' = f(y, y')$ $\left(y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy} \right)$

(四) 高阶线性方程

1. 线性微分方程的解的结构

齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (1)

非齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (2)

定理 1: 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程 (1) 的两个线性无关的特解, 那么

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 就是方程 (1) 的通解

定理 2: 如果 y^* 是非齐次方程 (2) 的一个特解, $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程 (1) 的两个线性无关的特解, 则

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x)$ 是非齐次微分方程 (2) 的通解

定理 3: 如果 $y_1^*(x)$ 和 $y_2^*(x)$ 是非齐次方程 (2) 的两个特解, 则

$y(x) = y_2^*(x) - y_1^*(x)$ 是齐次微分方程 (1) 的解

定理 4: 如果 $y_1^*(x)$ 和 $y_2^*(x)$ 分别是方程

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$

的特解, 则

$y_2^*(x) + y_1^*(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的一个特解

2. 常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

设 r_1, r_2 是特征方程两个根

1) 不等实根: $r_1 \neq r_2$ $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2) 相等实根: $r_1 = r_2 = r$ $y = e^{rx} (C_1 + C_2 x)$

3) 共轭复根: $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

3. 常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$

1. $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 令 $y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}$

2. $f(x) = e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x]$

令 $y^* = x^k e^{\alpha x} [R_m^{(1)}(x) \cos \beta x + R_m^{(2)}(x) \sin \beta x]$. $m = \max \{l, n\}$



4. 欧拉方程（仅数一要求）

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

$$\text{令 } x = e^t \quad x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$$

【例】(2021) 欧拉方程 $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 2$ 的通解 $y =$

(五) 差分方程（仅数三要求）

1. 一阶常系数线性齐次差分方程 $y_{t+1} + ay_t = 0$

$$\text{通解为 } y_c(t) = C \cdot (-a)^t$$

2. 一阶常系数非齐次差分方程 $y_{t+1} + ay_t = f(t)$

$$\text{通解为 } y_t = y_c(t) + y_t^*$$

1) $f(t) = P_m(t)$

(1) 若 $a \neq -1$, 令 $y_t^* = Q_m(t)$

(1) 若 $a = -1$, 令 $y_t^* = tQ_m(t)$

【例】(2021) 差分方程 $\Delta y_t = t$ 的通解 $y_t =$

2) $f(t) = d^t \cdot P_m(t) \quad (d \neq 0)$

(1) 若 $a + d \neq 0$, 令 $y_t^* = d^t \cdot Q_m(t)$

(2) 若 $a + d = 0$, 令 $y_t^* = td^t \cdot Q_m(t)$

二、常考题型方法与技巧

题型一 微分方程求解

【例1】求解下列一阶微分方程

1) $y' + xy^2 - y^2 = 1 - x$

2) $xy' + y = 2\sqrt{xy} \quad (x > 0)$



$$3) y' = \frac{1}{xy + y^3}$$

$$4) y' = \cos(x + y)$$

$$5) \text{求方程 } y' \sec^2 y + \frac{x}{1+x^2} \tan y = x \text{ 满足条件 } y|_{x=0} = 0 \text{ 的特解}$$

$$6) (x - \sin y) dy + \tan y dx = 0$$

【例2】求解下列方程(可降阶)

$$1) \text{求方程 } (x+1)y'' + y' = \ln(x+1) \text{ 的通解}$$

$$2) \text{求方程 } \begin{cases} 2yy'' = y'^2 + y^2 \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases} \text{ 的特解}$$

【例3】求解下列各题(高阶线性方程)

$$1. \text{方程 } y'' - y = e^x + 1 \text{ 的特解形式可设为()}$$

$$(A) ae^x + b$$

$$(B) axe^x + b$$

$$(C) ae^x + bx$$

$$(D) axe^x + bx$$



2. 方程 $y''' - y'' = 3x^2$ 的特解形式可设为()

- (A) $ax^2 + bx + c$ (B) $x^2(ax^2 + b)$
(C) $x^2(ax^2 + bx + c)$ (D) $x(ax^2 + bx + c)$

3. 方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为()

- (A) $ax^2 + bx + c + A \sin x$ (B) $ax^2 + bx + c + B \cos x$
(C) $ax^2 + bx + c + A \sin x + B \cos x$ (D) $ax^2 + bx + c + x(A \sin x + B \cos x)$

4. 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 为任意常数, 则该非齐次方程通解是()

- (A) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ (B) $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (C_1 + C_2) y_3$
(C) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$ (D) $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$

5. 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x - e^{-x}, y_3 = xe^x + e^{2x} + e^{-x}$ 为某二阶线性常系数非齐次方程的特解, 求此方程

6. 若 $y = e^{2x} + (x+1)e^x$ 是方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的解, 求 a, b, c 及该方程通解

7. 已知 $y_1 = 3, y_2 = 3 + x^2, y_3 = 3 + e^x$ 是某二阶线性非齐次方程的三个特解, 求该微分方程及通解



题型二 综合题

微信公众号「废柴上岸」免费分享

废柴上岸

【例1】求连续函数 $f(x)$ ，使它满足 $x \int_0^1 f(tx) dt = f(x) + x$

【例2】设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t) dt$ ，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$

【例3】设 $f(x)$ 可导，且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t-x) dt$ ，求 $f(x)$

【例4】设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义， $f'(0)=2$ ，对任意 x, y ，
有 $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$ ，求 $f(x)$

【例5】设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y' \neq 0$ ， $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数

(1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2 x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy} \right)^3 = 0$ 变换为

$y = y(x)$ 满足的微分方程

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解

微信公众号「废柴上岸」免费分享

废柴上岸



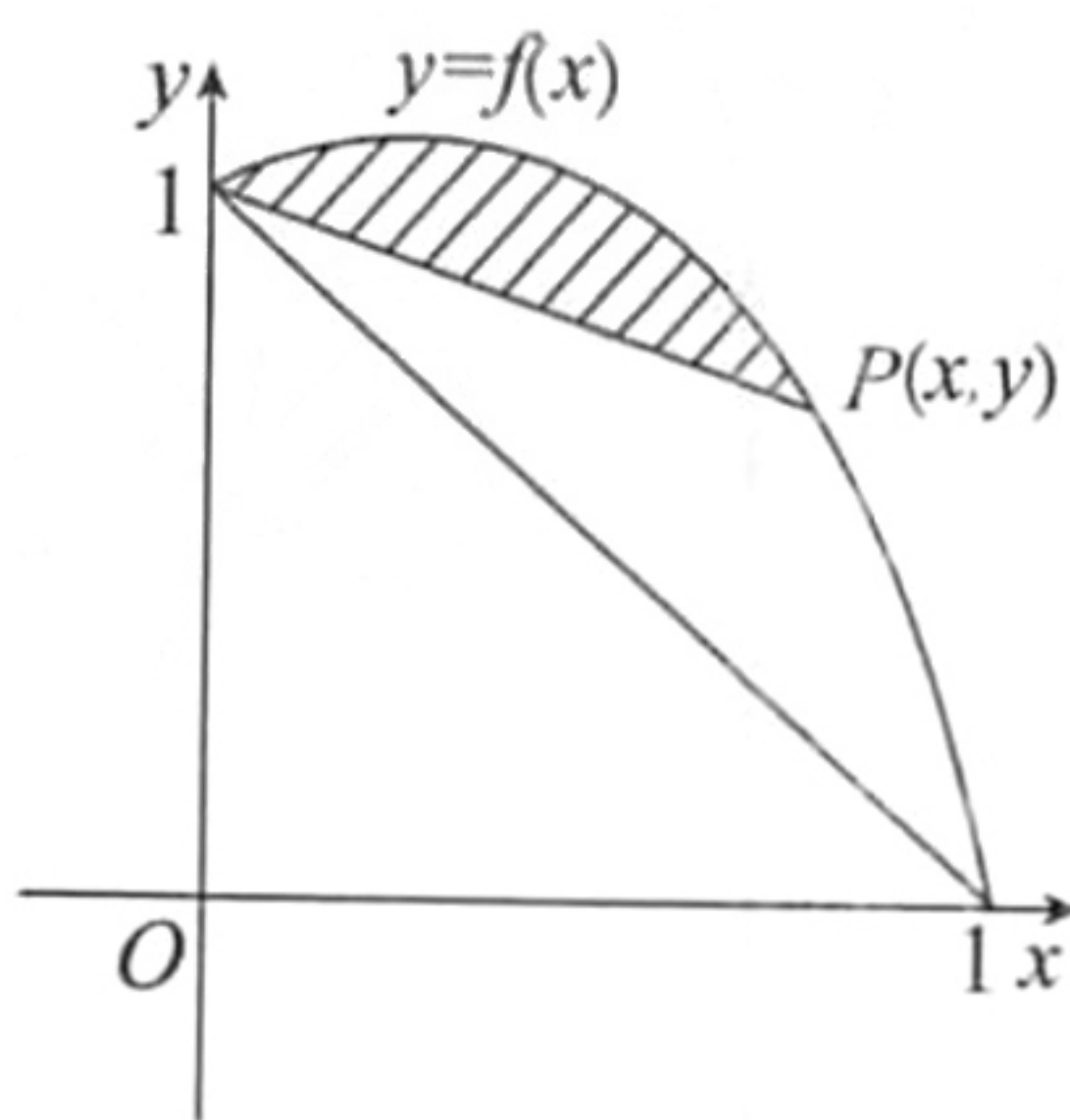
【例6】设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$

(1) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 收敛

(2) 若 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 的值

题型三 应用题

【例1】设曲线 $y = f(x)$ 为连接 $A(1,0)$ 与 $B(0,1)$ 的弧段且位于弦 AB 的上方 (如右图) $P(x,y)$ 为其上任意一点, 弦 BP 为其上任意一点, 弦 BP 与该曲线围成的面积为 x^3 , 试求该曲线方程



【例2】设对任意 $x > 0$, 曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$, 求 $f(x)$

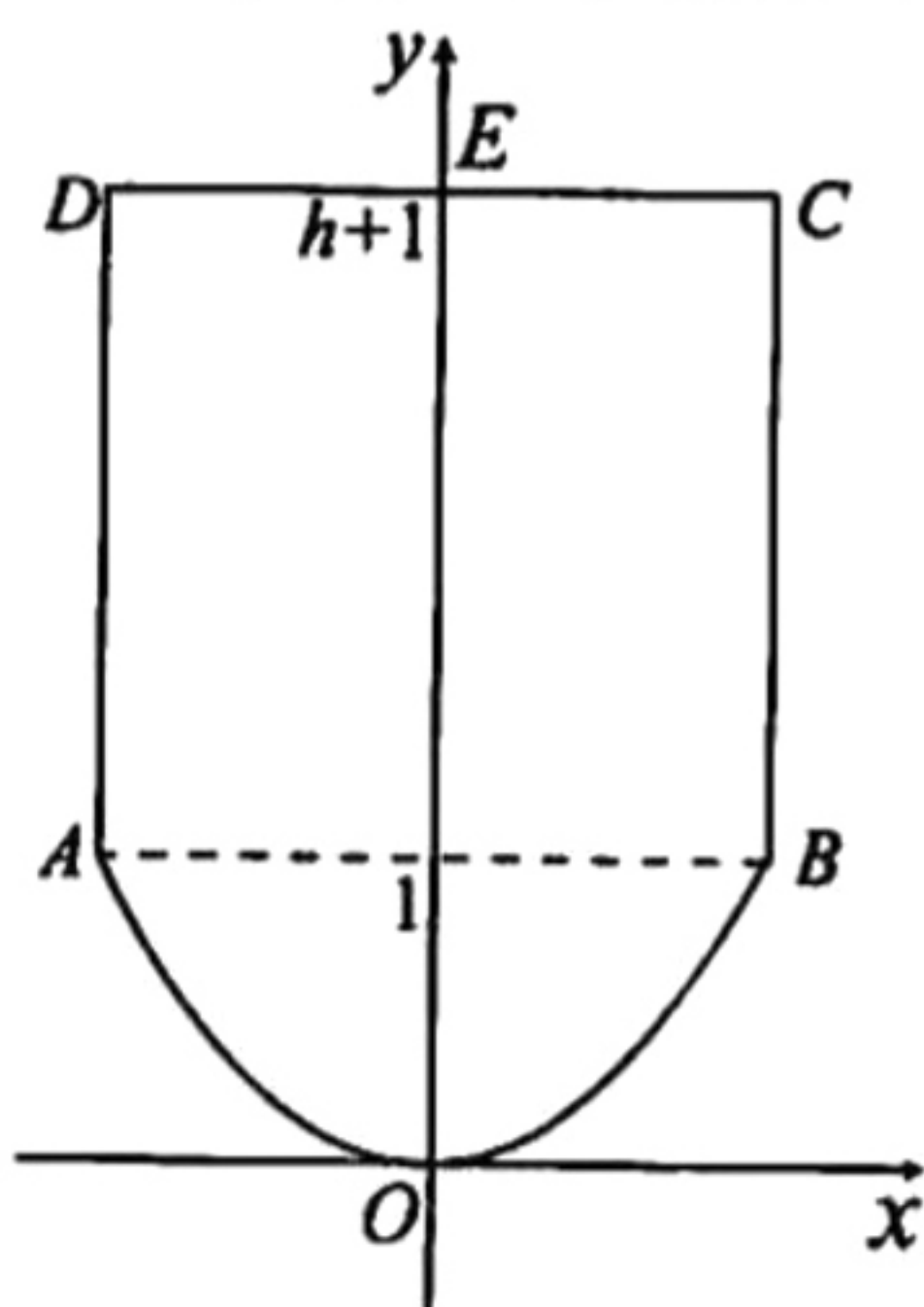
【例3】设 $y(x) (x \geq 0)$ 二阶可导, 且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$, 过 $y = y(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线. 上述二直线与 x 轴所围三角形面积记为 S_1 , 区间 $[0,x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 , 且 $2S_1 - S_2 = 1$, 求 $y(x)$



【例4】已知高温物体置于低温介质中，任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温度差成正比。现将一初始温度为 120°C 的物体在 20°C 恒温介质中冷却，30min后物体温度降至 30°C ，若要将物体的温度继续降至 21°C ，还需冷却多长时间？

【例】(2020,数二)斜边长为 $2a$ 的等腰三角形平板铅直的沉没在水中，且斜边与水面相齐，记重力加速度为 g ，水的密度为 ρ ，则该平板一侧所受的水压力为 $\left[\text{答案: } \frac{1}{3}a^3\rho g \right]$

【例1】(2002年2)某闸门的形状与大小如图所示，其中 y 轴为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$ ， $DC=2\text{m}$ ，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成，当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为5:4，闸门矩形部分的高 h 应为多少？



第五章 多元函数微分学

第一节 重极限 连续 偏导数 全微分

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
(一) 重极限	讨论连续性、可导性、可微性
(二) 连续	
(三) 偏导数	
(四) 全微分	
(五) 连续、可导、可微的关系	

一、考试内容要点精讲

(一) 重极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

注 1) $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$ 是以“任意方式”

- 2) (1) 局部有界性 (2) 保号性 (3) 有理运算
(4) 极限与无穷小的关系 (5) 夹逼性

【例1】求下列极限

1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}$

3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2 \sin(xy)}{x^2 + y^4}$

常用方法:

- 1、利用极限性质（四则运算法则，夹逼定理）
- 2、消去分母中极限为零的因子（有理化，等价无穷小代换）
- 3、利用无穷小量与有界变量之积为无穷小量



【例2】证明下列重极限不存在

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

常用方法

沿两种不同路径极限不同（通常可取过点 (x_0, y_0) 的直线）

（二）连续

1) 定义 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

2) 性质

(1) 多元连续函数的和、差、积、商（分母不为零）及复合仍为连续函数

(2) 多元基本初等函数在其定义域内连续；初等函数在其定义区域内连续

(3) 有界闭区域上连续函数的性质

(a) 有界性：若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上有界

(b) 最值性：若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上必有最大值和最小值

(c) 介值性：若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上可取到介于最小值与最大值之间的任何值

【例3】判断函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ a & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 的连续性

（三）偏导数

1) 定义

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x, y_0) \Big|_{x=x_0}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{d}{dy} f(x_0, y) \Big|_{y=y_0}$$



【例4】设 $f(x, y) = x + 2y + (y-1)\arcsin \frac{x}{1+xy}$, 求 $f'_x(0,1), f'_y(0,1)$

2) 几何意义

$f'_x(x_0, y_0)$ 表示曲线 $z = f(x, y_0)$ 在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率

$f'_y(x_0, y_0)$ 表示曲线 $z = f(x_0, y)$ 在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线对 y 轴的斜率

3) 高阶偏导数 设 $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

定理: 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x, y)$ 及 $f''_{yx}(x, y)$ 在

区域 D 连续, 则在区域 D 内恒有 $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$

(四) 全微分

1) 定义: 若 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

【注】以下4条等价

$$(1) \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho);$$

$$(2) \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] - [A\Delta x + B\Delta y]}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0;$$

$$(3) \Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho)$$

$$(4) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{[f(x, y) - f(x_0, y_0)] - [A(x - x_0) + B(y - y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

2) 判定 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

(1) 必要条件 $f'_x(x_0, y_0)$ 与 $f'_y(x_0, y_0)$ 都存在

(2) 充分条件 $f'_x(x, y)$ 与 $f'_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续

(3) 用定义判断

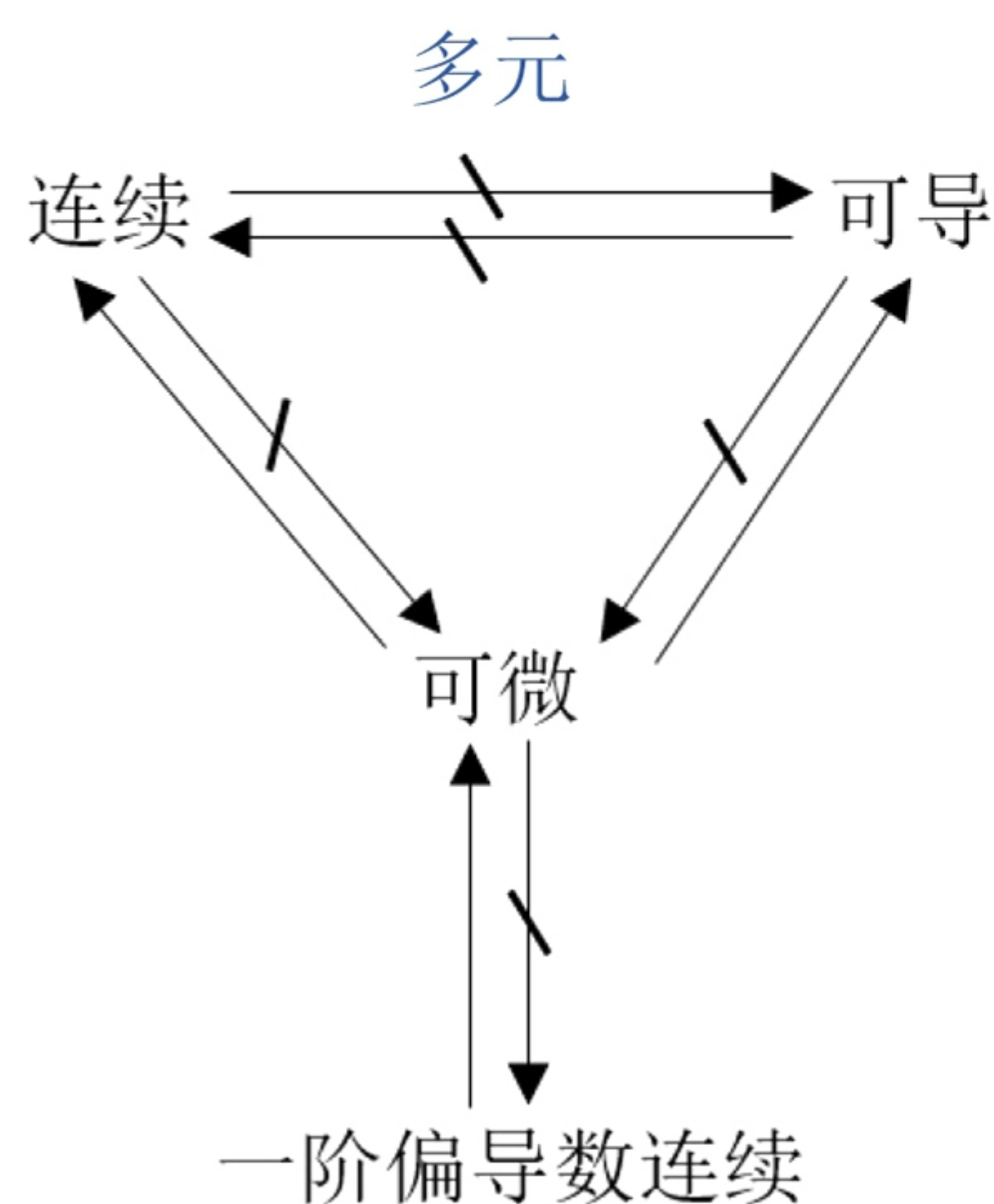
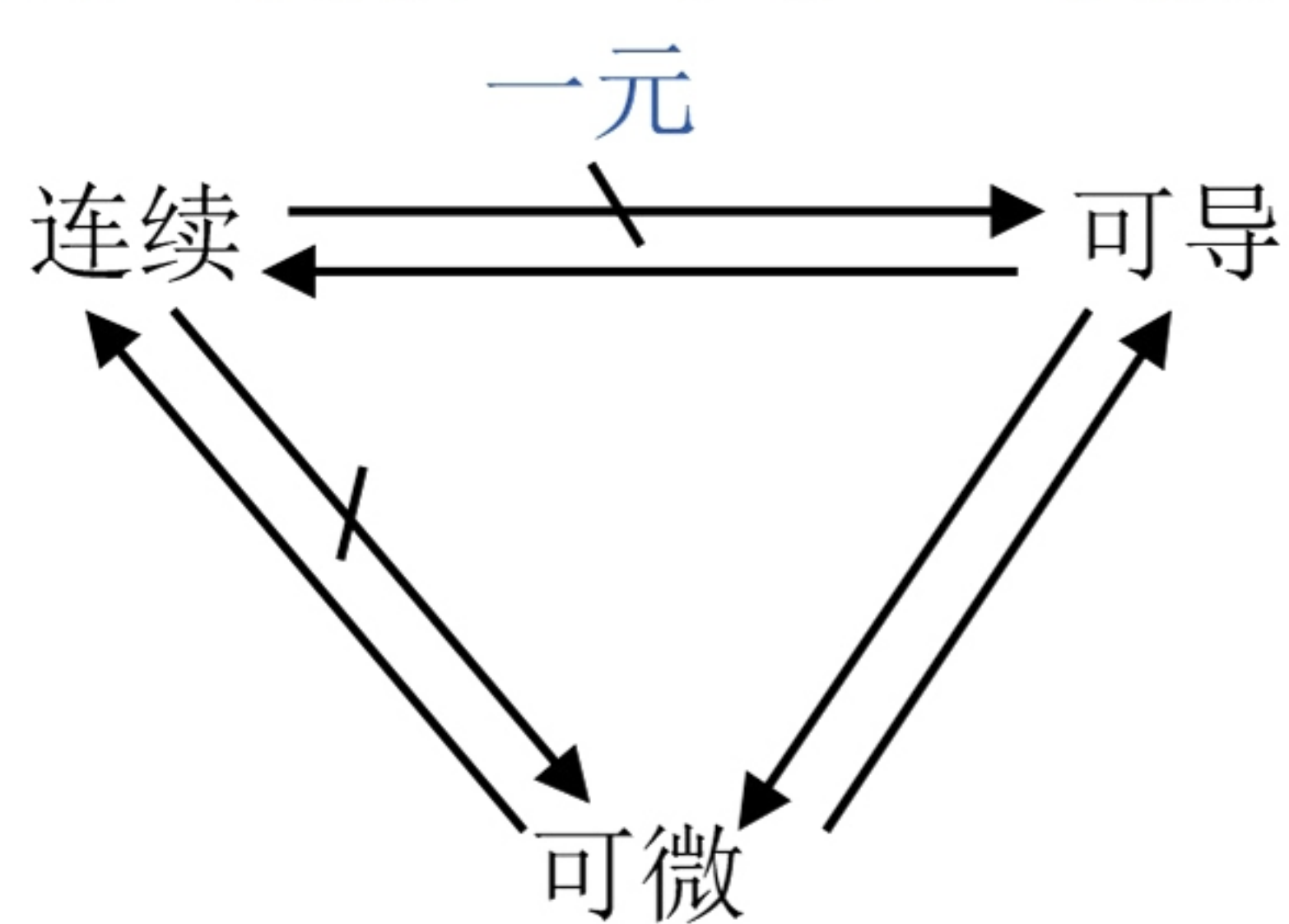
a) $f'_x(x_0, y_0)$ 与 $f'_y(x_0, y_0)$ 是否都存在?

$$b) \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta z - [f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \text{是否为零}$$

3) 计算 若 $f(x, y)$ 可微, 则 $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$



(五) 连续、可导、可微的关系



例: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



二、常考题型方法与技巧

题型一 讨论连续性、可导性、可微性

【例1】设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$

- A) 不连续 B) 连续但不可导
D) 可导但不可微 D) 可导

【例2】考虑二元函数下面四条性质

- ① $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续;
② $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数连续;
③ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微;
④ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数都存在; 则
(A) ③ $\Rightarrow$ ① $\Rightarrow$ ④; (B) ③ $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ①;
(C) ③ $\Rightarrow$ ④ $\Rightarrow$ ①; (D) ② $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ①;

【例3】二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是

- (A) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$
(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$
(C) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$
(D) $\lim_{x \rightarrow 0} [f_x(x, 0) - f_x(0, 0)] = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f_y(0, y) - f_y(0, 0)] = 0$



【例4】如果函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是()

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微

(C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在

(D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在

【例5】设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 则 $dz|_{(0,1)} =$

【例6】设 $f(x, y) = |x - y|\varphi(x, y)$, 其中 $\varphi(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域内连续, 问

1) $\varphi(x, y)$ 应满足什么条件才能使 $f_x(0, 0)$ 和 $f_y(0, 0)$ 都存在

2) 在上述条件下, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点是否可微

【例7】设 $f_x(x_0, y_0)$ 存在, $f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 证明 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微



第二节 偏导数与全微分的计算

微信公众号「废柴上岸」免费分享

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
(一) 复合函数求导法	题型一 求一点处的偏导数和全微分
(二) 隐函数求导法	题型二 求已给出具体表达式函数的偏导数和全微分
	题型三 含有抽象函数的复合函数的偏导数和全微分
	题型四：隐函数的偏导数和全微分

一、考试内容要点精讲

(一) 复合函数求导法

设 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 可导, $z = f(u, v)$ 在相应点有连续一阶偏导数, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

全微分形式不变性

设 $z = f(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$ 都有连续一阶偏导数, 则

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

(二) 隐函数求导法

1. 由一个方程所确定的隐函数

设 $F(x, y, z)$ 有连续一阶偏导数, $F_z \neq 0$, $z = z(x, y)$ 由 $F(x, y, z) = 0$ 所确定方法:

$$(1) \text{ 公式 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

(2) 等式两边求导

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

(3) 利用微分形式不变形

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

2. 由方程组所确定的隐函数 (仅数一要求)

设 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 由 $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 所确定

方法:

$$(1) \text{ 等式两边求导 } \begin{cases} F_x + F_u \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_u \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{ 微分形式不变形 } \begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_u du + F_v dv = 0 \\ G_x dx + G_y dy + G_u du + G_v dv = 0 \end{cases}$$

微信公众号「废柴上岸」免费分享

废柴上岸



二、常考题型方法与技巧

题型一 求一点处的偏导数和全微分

【例1】设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|x|}}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 求 $f_x(0, 0)$ 和 $f_y(0, 0)$

【例2】设 $f(x, y) = \frac{2x + 3y}{1 + xy\sqrt{x^2 + y^2}}$, 求 $f_x(0, 0)$ 和 $f_y(0, 0)$

【例3】设 $z = \ln(1 + xy^2)$, 则 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0,1)} =$

【例4】设 $f(x, y, z) = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$, 则 $df(1, 1, 1) =$

题型二 求已给出具体表达式函数的偏导数和全微分

【例1】设 $z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{y}{x}}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz

【例2】设 $z = (1 + x^2 + y^2)^{xy}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$



【例3】若函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, 且 $f(x, 1) = x + 2$, 又 $f_y(x, 1) = x + 1$

则 $f(x, y)$ 等于()

A) $y^2 + (x-1)y - 2$

B) $y^2 + (x+1)y + 2$

C) $y^2 + (x-1)y + 2$

D) $y^2 + (x+1)y - 2$

【例4】已知 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$, 且当 $x = 0$ 时, $z = \sin y$; 当 $y = 0$ 时, $z = \sin x$, 则 $z(x, y) =$

【例5】已知 $(axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy$ 是某一函数的全微分,

则 a, b 取值分别为()

(A) -2 和 2

(B) 2 和 -2

(C) -3 和 3

(D) 3 和 -3

【注】若 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 有一阶连续偏导数, 且 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

是某一函数的全微分, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

【例6】设 $f(x)$ 有连续一阶导数, $(xy - yf(x))dx + (f(x) + y^2)dy = du(x, y)$

求 $f(x)$ 及 $u(x, y)$, 其中 $f(0) = -1$



题型三 含有抽象函数的复合函数的偏导数和全微分

【例1】设函数 $f(u, v)$ 由关系式 $f[xg(y), y] = x + g(y)$ 所确定，其中函数 $g(y)$ 可微

且 $g(y) \neq 0$ ，则 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} =$

【例3】设 $z = f(xy, x^2 + y^2)$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ，其中 $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数

【例4】设 $f(x, y)$ 可微，又 $f(0, 0) = 0, f_x(0, 0) = a, f_y(0, 0) = b$ 且 $g(t) = f[t, f(t, t^2)]$ ，求 $g'(0)$

【例5】设 $u = f(x, y, z), y = \varphi(x, t), t = \psi(x, z)$ ，其中 f, φ, ψ 可微，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}$

【例7】设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 。

确定 a, b 的值，使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$



【例8】设 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z = f(e^x \sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ze^{2x}$ ，求 $f(x)$

【例9】设 (r, θ) 为极坐标， $u = u(r, \theta)$ 具有二阶连续偏导数，并满足 $\frac{\partial u}{\partial \theta} \equiv 0$ ，且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ，求 $u(r, \theta)$

【例10】若对任意 $t > 0$ 有 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ ，则称函数 $f(x, y)$ 是 n 次齐次函数
试证：若 $f(x, y)$ 可微，则 $f(x, y)$ 是 n 次齐次函数 $\Leftrightarrow x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$

题型四 隐函数的偏导数和全微分

【例1】设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z + e^z = xy$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

【例2】设方程 $F\left(\frac{x}{z}, \frac{z}{y}\right) = 0$ 可确定函数 $z = z(x, y)$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$



【例4】设 $u = f(x, y, z)$, $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$, $y = \sin x$ 确定了函数 $u = u(x)$, 其中

f, φ 都有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$

【例5】设 $y = f(x, t)$, 且方程 $F(x, y, t) = 0$ 确定了函数 $t = t(x, y)$, 求 $\frac{dy}{dx}$

【例6】设 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导数, 且 $f'_y \neq 0$, 证明: 对任意常数 C ,

$f(x, y) = C$ 为一条直线 $\Leftrightarrow f_2^2 f_{11} - 2f_1 f_2 f_{12} + f_1^2 f_{22} = 0$



第三节 极值与最值

微信公众号「废柴上岸」免费分享

废柴上岸

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
(一) 无条件极值	题型一 求无条件极值
(二) 条件极值与拉格朗日乘数法	题型二 求最大最小值
(三) 最大最小值	

一、考试内容要点精讲

(一) 无条件极值

1. 定义 极大: $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$;

极小: $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$;

2. 极值的必要条件

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0 \text{ (可导)}$$

极值点 $\longleftrightarrow$ 驻点

3. 极值的充分条件

$$\text{设 } f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$$

(1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, 有极值 $\begin{cases} A > 0 \text{ 极小值} \\ A < 0 \text{ 极大值} \end{cases}$

(2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, 无极值

(3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 不一定 (一般用定义判断)

(二) 条件极值与拉格朗日乘数法

1. 函数 $f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 条件下的极值

$$\text{令 } F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ F'_y = f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ F'_\lambda = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

2. 函数 $f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$ 条件下的条件极值

$$\text{令 } F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z)$$

(三) 最大最小值

1. 求连续函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大最小值

1) 求 $f(x, y)$ 在 D 内部可能的极值点

2) 求 $f(x, y)$ 在 D 的边界上的最大最小值

3) 比较

2. 应用题

① 建立目标函数 $z = f(x, y)$

微信公众号「废柴上岸」免费分享

废柴上岸



二、常考题型方法与技巧

题型一 求无条件极值

【例1】求函数 $z = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2$ 的极值

【例2】求函数 $f(x, y) = xy(a - x - y)$ 的极值

【例3】求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 所确定函数 $z = z(x, y)$ 的极值

【例4】设 $f(x, y)$ 有二阶连续导数, $g(x, y) = f(e^{xy}, x^2 + y^2)$, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) + x + y - 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0, \text{ 证明 } g(x, y) \text{ 在 } (0, 0) \text{ 点取得极值,}$$

判断此极值是极大值和极小值, 并求出此极值

【例5】设 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{\sin(x^2 + y^2)} = -1$, 则

- (A) $f_x(0, 0)$ 不存在 (B) $f_x(0, 0)$ 存在但不为零
(C) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值
(D) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极大值



【例6】已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续,

$$\text{且 } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1, \text{ 则}$$

- (A) 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点
- (B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点
- (C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点
- (D) 根据所给条件无法判断点 $(0, 0)$ 是否是 $f(x, y)$ 的极值点

题型二 求最大最小值

【例1】求函数 $z = x^2 y(4 - x - y)$ 在直线 $x + y = 6$, x 轴和 y 轴所围成的区域 D 上的最大值和最小值

【例2】求函数 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 在 $x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值和最小值

【例3】求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值与最小值

【例4】在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使其到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短



【例5】已知三角形周长为 $2p$ ，求使它绕自己的一边旋转时所构成旋转体体积最大的三角形

【例6】设某厂生产甲乙两种产品，产量分别为 x, y (千只)，某利润函数为 $L(x, y) = -x^2 - 4y^2 + 8x + 24y - 15$ ，如果现有原料15000公斤(不要求用完)生产两种产品每千只都需要原料2000公斤，求

- 1) 使利润最大的 x, y 和最大利润
- 2) 如果原料降至12000公斤，求这时利润最大的产量和最大利润

【例7】利用条件极值的方法证明：对任意正数 a, b, c ，有 $abc^3 \leq \frac{27}{5^5} (a+b+c)^5$



第七章 无穷级数

第一节 常数项级数

一、考试内容要点精讲	二、常见题型技巧及方法
(一) 级数的概念与性质	题型一 正项级数敛散性的判定
(二) 级数的审敛准则	题型二 交错级数敛散性的判定
	题型三 任意项级数敛散性的判定

一、考试内容要点精讲

(一) 级数的概念与性质

1. 级数的概念 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 无穷级数

$$S_n = \sum_{i=1}^n u_i \quad \text{部分和}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

2. 级数的性质

1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收敛, 且其和为 ks

2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s, σ , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛于 $s \pm \sigma$

【注】收敛 $\pm$ 发散 = 发散; 发散 $\pm$ 发散 = 不确定

3) 在级数中去掉、加上或改变有限项不影响级数的敛散性

4) 收敛级数加括号仍收敛且和不变

5) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

(二) 级数的审敛准则

(1) 正项级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0 \right)$

基本定理: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\iff S_n$ 上有界

1) 比较判别法: 设 $u_n \leq v_n$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散}$$



2)比较法极限形式: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l (0 \leq l \leq +\infty)$

①若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散

②若 $l = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

③若 $l = +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1 \text{ 收敛} \\ p \leq 1 \text{ 发散} \end{cases}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n (a > 0, q > 0) \begin{cases} q < 1 \text{ 收敛} \\ q \geq 1 \text{ 发散} \end{cases}$

3)比值法: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{收敛, } \rho < 1 \\ \text{发散, } \rho > 1 \\ \text{不一定, } \rho = 1 \end{cases}$

4)根值法: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{收敛, } \rho < 1 \\ \text{发散, } \rho > 1 \\ \text{不一定, } \rho = 1 \end{cases}$

5)积分判别法: 设 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 单调减, 非负连续函数, 且 $a_n = f(n)$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同敛散

【例1】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} (p > 0)$

【例2】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

	优点	缺点
1) 2)	适用范围广	不方便
3) 4)	方便	适用范围小
5)		

$n^p \ln n$

$a^n n! n^n$

$\sum \frac{1}{n^p} \quad \sum \frac{1}{n \ln^p n}$



(2) 交错级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, u_n > 0 \right)$

莱布尼兹准则：若 (1) u_n 单调减 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛

(3) 任意项级数

1) 绝对收敛与条件收敛的概念

2) 绝对收敛和条件收敛的基本结论

① 绝对收敛的级数一定收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 (反着推不回去)

② 条件收敛的级数所有正项 (或负项) 构成的级数一定发散，即：

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + |u_n|}{2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n - |u_n|}{2}$ 发散

二、常考题型的方法和技巧

题型一 正项级数敛散性的判定

【例1】判定下列级数的敛散性

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{na}{n+1} \right)^n (a > 0)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n} (a > 0)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\sqrt{\pi}}{n} \right)$



$$4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} (p > 0)$$

【例2】判断下列级数敛散性

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right)$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$$

【例3】设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2n \sin \frac{1}{n}} \cdot u_n = 1$, 试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性

【例4】设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 下列结论正确的是()

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

(B) 若存在非零常数 λ , 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \lambda$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n = 0$

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \lambda$



题型二 交错级数敛散性判定

【例1】判断下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2})$$

【例2】设正项级数 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试问

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 是否收敛? 为什么?

题型三 任意项级数敛散性判定

【例1】判定 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan \frac{\pi}{2^n} \sin(n!)$ 的敛散性

【例2】讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n n^p}$ 是绝对收敛, 条件收敛还是发散?

【例3】设常数 $k > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$ ()

(A) 发散

(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛

(D) 收敛与发散与 k 的取值有关



【例4】设常数 $\lambda > 0$ ，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$ ()

- (A) 发散 (B) 条件收敛
(C) 绝对收敛 (D) 敛散性与 λ 有关

【例5】设 $0 \leq a_n < \frac{1}{n}, (n=1, 2, \dots)$ ，则下列级数中肯定收敛的是 ()

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$

【例6】设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为 ()

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

【例7】设 $u_n \neq 0, (n=1, 2, \dots)$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ ()

- (A) 发散 (B) 绝对收敛
(C) 条件收敛 (D) 敛散性不定



题型四 证明题和综合题

微信公众号「废柴上岸」免费分享

【例1】设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛

【例2】设极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ 存在, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

【例3】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $|f'(x)| \leq h < 1$, 对一切 $x \in [a, b]$, 有 $a \leq f(x) \leq b$, 令 $u_n = f(u_{n-1})$, $(n=1, 2, \dots)$, 其中 $u_0 \in [a, b]$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 绝对收敛

【例4】设 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$, $(n=1, 2, \dots)$
证明 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在 (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛

【例6】设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$,
证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛

微信公众号「废柴上岸」免费分享

废柴上岸



第二节 幂级数

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
1. 收敛半径 收敛区间 收敛域	题型一 求收敛区间及收敛域
2. 幂级数的性质	题型二 将函数展开为幂级数
3. 函数的幂级数展开	题型三 级数求和

一、考点内容要点精讲

(一) 收敛半径 收敛区间 收敛域

定理 1 (阿贝尔定理)

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) 时收敛, 则当 $|x| < |x_0|$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ 时发散, 则当 $|x| > |x_0|$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散

【注】若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0$ 处条件收敛, 则点 x_0 必为该幂级数

收敛区间 $(-R, R)$ 的一个端点

定理 3 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$

定理 4 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$

(二) 幂级数性质

1) 有理运算性质

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1 , $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2

令 $R = \min \{R_1, R_2\}$, 则当 $x \in (-R, R)$

(1) 加减法: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$

(2) 乘法: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$

(3) 除法: $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$



2) 分析性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 和函数为 $S(x)$, 则

(1) 连续性: 和函数 $S(x)$ 在其收敛域上连续;

(2) 可导性: 和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 上可导, 且可逐项求导, 半径不变, 即

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(3) 可积性: 和函数 $S(x)$ 在其收敛域上可积, 且可逐项积分, 半径不变, 即

$$\int_0^x S(x) dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$

(三) 函数的幂级数展开

定理1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上能展开为 $x - x_0$ 的幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \text{ 则展开式是唯一的}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 处的泰勒级数}$$

定理2 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处任意阶可导, 则 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$

上收敛于 $f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) \text{ 中的余项}$$

几个常用的展开式

$$(1) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$(2) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(3) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(4) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(6) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$



函数展开为幂级数的两种方法

1) 直接展开法

$$\text{第一步 } f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

$$\text{第二步 考查 } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = 0 \text{ 是否成立}$$

2) 间接展开法

根据函数展开为幂级数的唯一性, 从某些已知函数的展开式出发, 利用幂函数的性质(四则运算, 逐项求导, 逐项积分)及变量代换等方法, 求得所给函数的展开式

二、常考题型的方法和技巧

题型一 求收敛区间及收敛域

【例1】求下列幂级数的收敛域

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} x^n}{n!}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x-1)^n$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} (x-1)^{2n}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n$$



【例2】设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=0$ 收敛，在 $x=2$ 发散，则该幂级数的收敛域为

【例3】设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-a)^n$ 在 $x=\ln \frac{1}{2}$ 处 ()

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛
(C) 必发散 (D) 敛散性由 a 确定

题型二 将函数展开为幂级数

【例1】将下列函数展开为 x 的幂级数

(1) $f(x) = \frac{3x}{2+x^2}$

(2) $f(x) = \frac{12-5x}{6-5x-x^2}$

(3) $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$

(4) $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$



$$(5) f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x$$

$$(6) f(x) = \ln(1-x-2x^2)$$

$$(7) f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

【例2】将下列函数在指定点处展开为幂级数

$$(1) f(x) = \sin x \text{ 在 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 处}$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \text{ 在 } x = 1 \text{ 处}$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \text{ 在 } x = -1 \text{ 处}$$

【例3】将 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 展开为 x 的幂级数，并求 $f^{(n)}(0) (n > 2)$



【例4】设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f^{(n)}(0)$

题型三 级数求和

【例1】求下列幂级数的和函数

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

【例2】求下列常数项级数的和

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$$



$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n}$$

【例3】求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数

【例4】设 $a_n = \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx$ ($n=1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} \right)$

【例5】设 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ($n=2, 3, \dots$), 试证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 在 $|x| < \frac{1}{2}$ 处必收敛, 并求其和函数



第三节 傅里叶级数（数一）

一、考试内容要点精讲	二、常见题型技巧与方法
(1) 傅里叶系数与傅里叶级数	题型一 有关收敛定理的问题
(2) 收敛定理（狄利克雷）	题型二 将函数展开为傅里叶级数
(3) 函数展开为傅里叶级数	

一、考试内容要点精讲

1. 傅里叶系数与傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n = 1, 2, \dots$$

2. 收敛定理

设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续或有有限个第一类间断点，且只有有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上处处收敛，且收敛于

① $f(x)$ 当 x 为 $f(x)$ 的连续点

② $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ 当 x 为 $f(x)$ 的间断点

③ $\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$ 当 $x = \pm\pi$

3. 周期为 2π 的周期展开

(1) $[-\pi, \pi]$ 上展开

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n = 1, 2, \dots$$

(2) $[-\pi, \pi]$ 上奇偶函数的展开

① $f(x)$ 为奇函数

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n = 1, 2, \dots$$

② $f(x)$ 为偶函数

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$



(3)在 $[0, \pi]$ 上展为正弦或展为余弦

①展为正弦

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n = 1, 2, \dots$$

②展为余弦

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

4. 周期为 $2l$ 的函数的展开

(1) $[-l, l]$ 上展开

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

(2) $[-l, l]$ 上奇偶函数的展开

① $f(x)$ 为奇函数

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

② $f(x)$ 为偶函数

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

(3)在 $[0, l]$ 上展为正弦或展为余弦

①展为正弦

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

②展为余弦

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

二、常考题型方法与技巧

题型一 关于收敛定理的问题

【例1】函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$, 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开为傅里叶级数的和函数 $S(x) =$

【例3】设函数 $f(x) = x^2, 0 \leq x < 1$, 而 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty < x < +\infty$

其中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx, n = 1, 2, 3, \dots$, 则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)$ 等于()

(A) $-\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{2}$



【例4】设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$, $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, (-\infty < x < +\infty)$

其中 $a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx, (n = 0, 1, 2, \dots)$, 则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 等于()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{3}{4}$

题型二 将函数展开为傅里叶级数

【例2】将函数 $f(x) = 2 + |x| (-1 \leq x \leq 1)$ 展开为以2为周期的傅里叶级数

并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和

【例3】设 $f(x) = 10 - x, (5 \leq x \leq 15)$, 将 $f(x)$ 展为以10为周期的傅里叶级数



第八章 向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用

第一节 向量代数

1. 数量积

1) 几何表示: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$ 2) 代数表示: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

3) 运算规律:

① 交换律: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ② 分配率: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

4) 几何应用:

① 求模: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ ② 求夹角: $\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$ ③ 判定两向量垂直: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

2. 向量积

1) 几何表示: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 是一向量, 模: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha$

方向: 右手法则

2) 代数表示: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

3) 运算规律:

① 交换律: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ ② 分配率: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

4) 几何应用:

① 求同时垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的向量: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ② 求以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形的面积: $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ ③ 判定两向量平行: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 3. 混合积 $(\mathbf{abc}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 1) 代数表示: $(\mathbf{abc}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ 

2) 运算规律:

① 轮换对称性: $(\mathbf{abc}) = (\mathbf{bca}) = (\mathbf{cab})$

② 交换变号: $(\mathbf{abc}) = -(\mathbf{acb})$

3) 几何应用:

① $V_{\text{平行六面体}}: |(\mathbf{abc})|$

② 判断三平面共线: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面 $\Leftrightarrow (\mathbf{abc}) = 0$



第二节 空间平面与直线

1. 平面方程

- 1) 一般式: $Ax + By + Cz + D = 0 \quad \mathbf{n} = \{A, B, C\}$
- 2) 点法式: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
- 3) 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

2. 直线方程

- 1) 一般式:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$
- 2) 对称式: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$
- 3) 参数式: $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$

3. 平面与直线的位置关系 (平行、垂直、夹角)

关键: 平面的法线向量, 直线的方向向量

4. 点到面的距离

点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5. 点到直线距离

点 (x_0, y_0, z_0) 到直线 $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$

$$d = \frac{|\{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\} \times \{l, m, n\}|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$



第三节 曲面与空间曲线

1. 曲面方程 一般式 $F(x, y, z) = 0$ 或 $z = f(x, y)$

2. 空间曲线

$$\textcircled{1} \text{ 参数式 } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \textcircled{2} \text{ 一般式 } \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

3. 常见曲面

1) 旋转面：一条平面曲线绕平面上一条直线旋转

设 L 是 $yo z$ 平面上一条曲线，其方程是 $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ ，则

$$\begin{cases} \textcircled{1} L \text{ 绕 } y \text{ 轴旋转所得旋转面方程为 } f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0 \\ \textcircled{2} L \text{ 绕 } z \text{ 轴旋转所得旋转面方程为 } f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \end{cases}$$

2) 柱面：平行于定直线并沿曲线移动的直线 L 形成的轨迹

(1) 准线为 $\Gamma: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ，母线平行于 z 轴的柱面方程为 $f(x, y) = 0$

(2) 准线为 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ ，母线平行于 z 轴的柱面方程为 $H(x, y) = 0$

3) 二次曲面

(1) 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$ ；特别的：圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$

(2) 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(3) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(4) 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(5) 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ ；特别的：旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$

(6) 双曲抛物面(马鞍面) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$

4. 空间曲面投影

曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 在 xoy 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$



题型二 建立旋转面方程

【例1】求下列曲线绕指定的轴旋转产生的旋转面的方程

1) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转

2) $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 分别绕 y 轴和 z 轴旋转

【例2】求直线 $L: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ 绕 z 轴旋转所得旋转面方程



第四节 多元微分在几何上的应用

微信公众号「废柴上岸」免费分享

1. 曲面的切平面与法线

1) 曲面 $F(x, y, z) = 0$, 法向量: $\mathbf{n} = \{F_x, F_y, F_z\}$ 2) 曲面 $z = f(x, y)$, 法向量: $\mathbf{n} = \{f_x, f_y, -1\}$

2. 曲线的切线与法平面

1) 曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, 切向量: $\boldsymbol{\tau} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ 2) 曲线 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 切向量: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ 其中 $\mathbf{n}_1 = \{F_x, F_y, F_z\}$, $\mathbf{n}_2 = \{G_x, G_y, G_z\}$

题型一 建立曲面的切平面和法线方程

【例4】已知曲面 $e^{2x-z} = f(\pi y - \sqrt{2}z)$, 且 f 可微, 证明该曲面为柱面

题型二 建立空间曲线的切线和法平面方程

【例2】求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线和法平面方程

微信公众号「废柴上岸」免费分享

废柴上岸



第五节 方向导数和梯度

1. 方向导数

$$1) \text{ 定义: } \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

2) 计算: 若 $z = f(x, y)$ 可微, 则

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta$$

2. 梯度

1) 定义: $\text{grad} z$

$$2) \text{ 计算: } \text{grad} z = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

【例1】函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿 A 指向 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数为

【例2】函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处

- (A) 不连续 (B) 偏导数存在
(C) 沿任一方向的方向导数不存在
(D) 沿任一方向的方向导数均存在

【例3】设 $f_x(0, 0) = 1, f_y(0, 0) = 2$, 则

- (A) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续
(B) $df(x, y)|_{(0, 0)} = dx + 2dy$
(C) $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(0, 0)} = \cos \alpha + 2 \cos \beta$, 其中 $\cos \alpha, \cos \beta$ 为任一方向 l 的方向余弦
(D) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点沿 x 轴负方向的方向导数为 -1



【例4】在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点，使函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点沿 $l = (1, -1, 0)$ 方向的方向导数最大

【例5】设 $f(x, y)$ 是 R^2 上的一个可微函数，且 $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \alpha > 0$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， α 为常数，试证明 $f(x, y)$ 在 R^2 上有最小值



第九章 多元积分学及其应用

第一节 三重积分与线面积分

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
(一) 三重积分	题型一 计算三重积分
(二) 对弧长的线积分 (第一型线积分)	题型二 三重积分交换次序
(三) 对坐标的线积分 (第二型线积分)	题型三 计算对弧长的线积分
(四) 对面积的面积分 (第一型面积分)	题型四 计算对坐标的面积分
(五) 对坐标的面积分 (第二型面积分)	题型五 计算对面积的面积积分
	题型六 计算对坐标的面积分

一、考试内容要点精讲

(一) 三重积分

1. 定义 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k$

2. 性质

3. 计算

1) 直角坐标: ① 先后后二; ② 先二后一

2) 柱坐标: $dV = \rho d\rho d\theta dz$ $f(z)g(\sqrt{x^2 + y^2})$

3) 球坐标: $dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$ $f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = f(r)$

4) 奇偶性: 若积分域关于 Ω 关于 xoy 坐标面对称

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \begin{cases} 2 \iiint_{\Omega_{z \geq 0}} f(x, y, z) dV & f(x, y, -z) = f(x, y, z) \\ 0 & f(x, y, -z) = -f(x, y, z) \end{cases}$$

5) 利用变量对称性

(二) 对弧长的线积分 (第一类线积分)

1. 定义 $\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$

2. 性质 $\int_{L(AB)} f(x, y) ds = \int_{L(BA)} f(x, y) ds$ (与路径方向无关)

3. 计算

1) 直接法:

① 若 $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta$

则 $\int_C f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$



②若 $C: y = y(x) \quad a \leq x \leq b$

$$\text{则 } \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

③若 $C: \rho = \rho(\theta) \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$

$$\text{则 } \int_C f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta) \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta$$

2) 利用奇偶性:

①若积分曲线关于 y 轴对称, 则

$$\int_C f(x, y) ds = \begin{cases} 2 \int_{C_{x \geq 0}} f(x, y) ds, & f(-x, y) = f(x, y) \\ 0, & f(-x, y) = -f(x, y) \end{cases}$$

②若积分曲线关于 x 轴对称, 则

$$\int_C f(x, y) ds = \begin{cases} 2 \int_{C_{y \geq 0}} f(x, y) ds, & f(x, -y) = f(x, y) \\ 0, & f(x, -y) = -f(x, y) \end{cases}$$

3) 利用对称性:

若积分曲线关于直线 $y = x$ 对称, 则

$$\int_C f(x, y) ds = \int_C f(y, x) ds$$

$$\text{特别的 } \int_C f(x) ds = \int_C f(y) ds$$

设空间曲线 L 的方程为:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

则

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

(三) 对坐标的线积分 (第二类线积分)

1. 定义 $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i]$

2. 性质 $\int_{L(AB)} P dx + Q dy = - \int_{L(BA)} P dx + Q dy$ (与积分路径方向有关)

3. 计算方法 (平面)

1) 直接法: 设 $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$, 则

$$\text{则 } \int_L P dx + Q dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt$$

2) 格林公式 $\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$

3) 补线用格林公式



4) 利用线积分与路径无关

i) 判定: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (区域 D 单连通)

ii) 计算:

a) 改换路径

b) 利用原函数 $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P dx + Q dy = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$

$$P dx + Q dy = dF(x, y)$$

求原函数方法: ①偏积分; ②凑微分

4. 两类线积分的联系

$$\oint_L P dx + Q dy = \oint_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds$$

5. 计算方法 (空间)

1) 直接法

设曲线 L 由参数方程 $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{ P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)] y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)] z'(t) \} dt \end{aligned}$$

2) 斯托克斯公式

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \\ &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

3) 化空间为平面线积分

(四) 对面积的面积分 (第一类面积分)

1. 定义 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$

2. 性质 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{-\Sigma} f(x, y, z) dS$ (与积分曲面的方向无关)



3. 计算

1) 直接法: $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} d\sigma$$

2) 利用奇偶性:

若曲面 Σ 关于 xoy 面对称, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{\Sigma_{z \geq 0}} f(x, y, z) dS, & f(x, y, -z) = f(x, y, z) \\ 0, & f(x, y, -z) = -f(x, y, z) \end{cases}$$

3) 利用对称性

(五) 对坐标的面积分 (第二类面积分)

1. 定义 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$

2. 性质 $\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = - \iint_{-\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ (与积分曲面方向有关)

3. 计算方法

1) 直接法:

设曲面: $z = z(x, y), (x, y) \in D$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_D R(x, y, z(x, y)) d\sigma$$

2) 高斯公式

$$\oiint_{\Sigma_{\text{外}}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

3) 补面用高斯公式

4. 两类线积分的联系

$$\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_{\Sigma} (P dy dx + Q dz dx + R dx dy)$$



二、常考题型方法与技巧

题型一 计算三重积分

【例1】计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dV$, 其中 Ω 由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz (R > 0)$ 所确定

【例2】计算 $\iiint_{\Omega} z dV$, 其中 Ω 由 $x^2 + y^2 + z^2 \geq z$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ 所确定

【例3】计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$, 其中 Ω 由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$, 绕 oz 轴旋转一周而成的曲面和平面 $z = 2, z = 8$ 所围的立体

【例4】计算 $\iiint_{\Omega} (mx + ly + nz)^2 dV$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

【例5】设 $f(t)$ 连续, $F(t) = \iiint_{\Omega} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dV$, 其中 Ω 由 $x^2 + y^2 \leq t^2, 0 \leq z \leq h$ 所确定, 求 $\frac{dF}{dt}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2}$



题型二 更换三重积分次序

【例1】计算 $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y \frac{\sin z}{(1-z)^2} dz$

题型三 计算对弧长的线积分

【例1】设 L 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，其周长为 a ，则 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds =$

【例2】计算 $I = \oint_L [x^2 + (y+1)^2] ds$ ，其中 L 为 $x^2 + y^2 = Rx$ ($R > 0$)

【例3】计算 $I = \oint_C |y| ds$ ，其中 C 为双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($a > 0$)

【例4】计算 $I = \oint_L x^2 ds$ ，其中 L 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

题型四 计算对坐标的线积分

【例1】计算 $I = \int_L ye^{y^2 dx} + (xe^{y^2} + 2xy^2 e^{y^2}) dy$ ，其中 L 为 $y = \sqrt[3]{x}$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的曲线段



【例2】设 C 为椭圆 $4x^2 + y^2 = 8x$ 沿逆时针方向, $\oint_C (e^{y^2}) dx + (x + y^2) dy =$

【例3】计算 $I = \int_L [e^y \sin y - b(x + y)] dx + [e^x \cos y - ax] dy$, 其中 a, b 为正常数,
 L 为点 $A(2a, 0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O(0, 0)$ 的弧

【例4】计算 $I = \oint_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, 其中

(1) C 为 $x^2 + y^2 - 2y = -\frac{1}{2}$ 沿逆时针方向

(2) C 为 $4x^2 + y^2 - 8x = 4$ 沿逆时针方向

注: 对线积分 $\int \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, $P = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{-x}{x^2 + y^2}$, 除原点 $(0, 0)$ 外, P, Q 有连续

一阶偏导数, 且 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, 此时有以下结论:

1) 沿任何一条不包含原点在内的分段光滑闭曲线的积分为零

2) 沿任何一条包含原点在内的分段光滑闭曲面的积分均相等

$$\int_L \frac{(x-y)dx - (x+y)dy}{x^2 + y^2}, \int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}, \int_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}, \int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$



【例5】计算 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以 $(1,0)$ 为中心, R 为半径的圆周 ($R \neq 1$)
取逆时针方向

【例6】已知曲线积分 $\int_L \frac{xdy - ydx}{\varphi(x) + y^2} = A$ (常数), 其中 $\varphi(x)$ 有连续导数且 $\varphi(1)=1$
 L 是绕 $(0,0)$ 一周的任一光滑正向闭曲线, 试求 $\varphi(x)$ 及 A

【例8】计算 $I = \int_{AMB} [\varphi(y)\cos x - \pi y]dx + [\varphi'(y)\sin x - \pi]dy$, 其中 AMB 为连结
 $A(\pi, 2)$ 与 $B(3\pi, 4)$ 的线段 $\overline{AB}$ 之下方的任意路线, 且该路线与 $\overline{AB}$ 所围
图形面积为 2

【例9】设 L 圆周 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 1$ ($a > 0$) 的逆时针方向, $f(x)$ 为连续正值函数,
试证: $\oint_L [x^2 + xf(y)]dy - \left[y^2 + \frac{y}{f(x)} \right]dx \geq 2\pi(1+2a)$

【例10】计算曲线积分 $I = \oint_L xzdx + xdy + \frac{y^2}{2}dz$, 其中 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面
 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向



题型五 计算对面积的面积分

【例1】设曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$, 则 $\oiint_{\Sigma} (x + |y|) dS =$

【例3】计算 $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 夹在 $z = 0$ 和 $z = H (H > 0)$ 之间的部分

【例4】计算 $\iint_{\Sigma} (ax + by + cz + d)^2 dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

【例5】计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az (a > 0)$

题型六 计算对坐标的面积分

【例1】计算曲面积分 $\iint_S \frac{xdydz + z^2 dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 S 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及两平面 $z = R, z = -R (R > 0)$ 所围成立体表面(如右图)的外侧



【例2】计算 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$, 其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ ($z \geq 0$) 的上侧

【例3】计算 $I = \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, 其中

1) Σ 为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧

2) Σ 为上半椭球面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$ ($z \geq 0$)

【例5】设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$) 的下侧, $f(x)$ 是连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] dydz + [yf(xy) + 2y + z] dzdx + [zf(xy) + z] dxdy$$



第二节 多元积分应用

一、考试内容要点精讲

几何形体 所求量	平面域	空间体	曲线段	曲面片
几何度量	面积: $S = \iint_D 1 d\sigma$	体积: $V = \iiint_{\Omega} 1 dv$	弧长: $L = \int_L 1 ds$	面积: $S = \iint_{\Sigma} 1 dS$
质量	$\iint_D \rho(x, y) d\sigma$	$\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv$	$\int_L \rho(x, y, z) ds$	$\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS$
质心	$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}$	$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv}$	$\bar{x} = \frac{\int_L x \rho(x, y, z) ds}{\int_L \rho(x, y, z) ds}$	$\bar{x} = \frac{\iint_{\Sigma} x \rho(x, y, z) dS}{\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS}$
转动惯量	$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma$	$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv$	$I_x = \int_L (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$	$I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$

1. 变力做功: $W = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$

2. 通量: $\Phi = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$

二、常考题型方法与技巧

题型一 求几何量

【例1】计算曲面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 和 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围立体体积

【例2】求柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 夹在平面 $x - z = 0$ 与 $z = 0$ 之间的部分的面积



题型二 计算物理量

【例3】设 Ω 是由锥面 $x^2 + (y-z)^2 = (1-z)^2$ ($0 \leq z \leq 1$)与平面 $z=0$ 围成的椎体，求 Ω 的形心坐标

【例4】设底半径为 R ，高为 H ，密度为 μ 的均匀柱体对底面圆直径的转动惯量



第三节 场论初步

一、考试内容要点精讲

1. 梯度

1) 定义:

$$2) \text{ 计算: } \mathbf{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

2. 散度 设有向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = \{P, Q, R\}$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

3. 旋度 设有向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = \{P, Q, R\}$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

二、常考题型方法与技巧

题型一 梯度 散度 旋度计算

【例1】函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度 $\mathbf{grad} u|_M =$ 【例2】向量场 $\mathbf{u} = (x, y, z) = xy^2 \mathbf{i} + ye^z \mathbf{j} + x \ln(1 + z^2) \mathbf{k}$ 在点 $P(1, 1, 0)$ 处的散度 $\operatorname{div} \mathbf{u} =$ 【例3】设数量场 $u(x, y, z)$ 有二阶连续偏导数, 试证明 $\operatorname{rot}(\mathbf{grad} u) = 0$ 【例4】设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $f(u)$ 有二阶连续导数, $\operatorname{div}[\mathbf{grad} f(r)] = 0$, 试求 $f(u)$ 