

第一章 函数 极限 连续

第一节 函数

一、考试内容要点精讲	二、常见题型技巧及方法
(1) 函数的概念及常见函数	题型一：复合函数
(2) 函数的性态 (*)	题型二：函数性态 (*)

一、考试内容要点精讲

(一) 函数概念及常见函数

1. 函数概念

定义 1: 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的法则总共有一个确定的 y 和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记为 $y = f(x)$ 。常称 x 为自变量, y 为因变量, D 为定义域。

定义域: $D_f = D$

值域: $R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$

【注】: 函数概念的两个基本要素: 定义域, 对应法则

2. 复合函数

定义 2: 设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , $u = g(x)$ 的定义域为 D_g , 值域为 R_g , 若 $D_f \cap R_g \neq \emptyset$, 则称函数 $y = f[g(x)]$ 函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合函数, 它的定义域为:

$$\{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

3. 反函数

定义 3: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 R_y , 若对任意 $y \in R_y$, 有唯一确定的 $x \in D$, 使得 $y = f(x)$, 则记为 $x = f^{-1}(y)$, 称其为函数 $y = f(x)$ 的反函数。

4. 初等函数

定义 4: 将幂函数、指数、对数、三角、反三角统称为基本初等函数。了解它们的定义域、性质、图形

幂函数: $y = x^\mu$ (μ 为实数)

指数函数: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

三角函数: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$

反三角函数: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$

定义 5: 由常数和基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到的且能用一个解析式表示的函数, 称为初等函数



(二) 函数的性态

1. 单调性

定义：单调增 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ 【严格单调增】

单调不减 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ 【单调增】

单调减 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

单调不增 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

应用：1) 根的个数（严格单调增或减）

2) 不等式 $[a, b]$

$f(a) = 0$ 且严格单调增 $\Rightarrow f(x) > 0 \quad x \in (a, b]$

$f(a) = 0$ 且单调增 $\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad x \in (a, b]$

判定：1) 定义

2) 导数：设 $f(x)$ 在 I 上可导，则：

a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调增

b) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 单调不减

2. 奇偶性

定义：偶函数 $f(x) = f(-x)$ 奇函数 $f(-x) = -f(x)$ 【定义域对称】

【注】：1) 奇函数 $\sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, \ln \frac{1-x}{1+x}, \ln(x + \sqrt{1+x^2})$,

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1}, f(x) - f(-x)$$

偶函数 $x^2, |x|, \cos x, f(x) + f(-x)$

2) 奇函数关于原点对称， $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义， $f(0) = 0$

偶函数关于 y 轴对称

判定：1) 定义

2) 设 $f(x)$ 可导，则

a) $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是偶函数

b) $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是奇函数

3) 连续的奇函数其原函数都是偶函数

连续的偶函数其原函数之一是奇函数

【注】：设 $f(x)$ 连续

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数， $\int_a^x f(t)dt$ (✓)

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数， $\int_a^x f(t)dt$ (×)

1. (2021年2) 设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x=0$ 处的二次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$ ，则：()

(A) $a=1, b=-\frac{1}{2}$

(B) $a=1, b=\frac{1}{2}$

(C) $a=0, b=-\frac{1}{2}$

(D) $a=0, b=\frac{1}{2}$



2. (2021年1) $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的三次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$, 则: ()

(A) $a=1, b=0, c=-\frac{7}{6}$

(B) $a=1, b=0, c=\frac{7}{6}$

(C) $a=-1, b=-1, c=-\frac{7}{6}$

(D) $a=-1, b=-1, c=\frac{7}{6}$

3. 周期性

定义: $f(x+T) = f(x)$

【注】: (1) $\sin x, \cos x, T=2\pi, \sin 2x, |\sin x|, T=\pi$

(2) 若 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期

判定: (1) 定义

(2) 可导的周期函数及其导函数为周期函数

(3) 周期函数的原函数不一定是周期函数

【注】: (1) 设 $f(x)$ 连续且以 T 为周期

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ 是以 } T \text{ 为周期的函数} \Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx = 0$$

(2) 周期函数的原函数是周期函数的充要条件是在一个周期上积分为 0

(2022 年 3) 已知函数 $f(x) = e^{\sin x} + e^{-\sin x}$, 则 $f'''(2\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 有界性

定义: 若 $\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有上界

【注】: $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, |\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, |\arctan x| \leq \frac{\pi}{2}, |\arccos x| \leq \pi$

判定: (1) 定义

(2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界

(3) $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $f(a^+), f(b^-)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a, b) 上有界

(4) $f'(x)$ 在区间 I (有限) 上有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 I 上有界

二、常考题型的方法和技巧

题型一: 复合函数

【例1】已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0, a], (a > 0)$, 则 $f(x)$ 的定义域为: ()

(A) $[-1, a-1]$

(B) $[1, a+1]$

(C) $[a, a+1]$

(D) $[a-1, a]$



题型二：函数性态

微信公众号「废柴上岸」免费分享

【例1】已知函数 $f(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 则 α 的取值范围应为: ()

- (A) $(0, +\infty)$ (B) $(0, 3]$
(C) $(0, 2)$ (D) $(1, 3]$

【例2】以下四个命题中正确的是: ()

- (A) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界;
(B) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界;
(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界;
(D) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

【例3】设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得: ()

- (A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加;
(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少;
(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$, 有 $f(x) > f(0)$;
(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$, 有 $f(x) > f(0)$.

【注】 $f'(x_0) > 0 \rightarrow f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增

(2022 年 2) 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有 2 阶导数, 则 ()

- (A) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时, $f'(x_0) > 0$
(B) 当 $f'(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加
(C) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时, $f''(x_0) > 0$
(D) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数

微信公众号「废柴上岸」免费分享

废柴上岸



【例4】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$, 试证:

- (1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 也是偶函数;
- (2) 若 $f(x)$ 为单调不增, 则 $F(x)$ 单调不减;

第二节 极限

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
1. 极限的概念	题型一: 极限的概念性质及存在法则
2. 极限的性质	题型二: 求极限
3. 极限存在准则	题型三: 确定极限的参数
4. 无穷小	题型四: 无穷小量阶的比较
5. 无穷大	

一、考点内容要点精讲

(一) 极限的概念

1、数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时}, |a_n - A| < \varepsilon$$

【注】(1) 几何意义

(2) 数列 $\{x_n\}$ 的极限与前有限项无关

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a$$

(2022 年 3) 已知 $a_n = \sqrt[n]{n} - \frac{(-1)^n}{n} (n = 1, 2, \dots)$, 则 $\{a_n\}$

- (A) 有最大值, 有最小值
- (B) 有最大值, 没有最小值
- (C) 没有最大值, 有最小值
- (D) 没有最大值, 没有最小值

2、函数极限

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } x > X \text{ 时}, |f(x) - A| < \varepsilon$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } x < -X \text{ 时}, |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时}, |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\text{定理 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$



$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\text{【注】 } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A = f(x_0^-) = f(x_0 - 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A = f(x_0^+) = f(x_0 + 0)$$

需要分左右极限求极限的三种常见情况：

(1) 分段函数在分界点的极限

(2) e^∞ 型极限 (如 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}, \lim_{x \rightarrow \infty} e^x, \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$)

(3) $\arctan \infty$ 型极限 (如 $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$)

$$\text{【例】 (2021年3)} \text{ 已知 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] \text{ 存在, 求 } a \text{ 的值} \quad \left[a = \frac{e^{-1} - e}{\pi} \right]$$

(二) 极限性质

1、局部有界性：若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内有界

2、保号性：设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

(1) 若 $A > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 则 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$

(2) 如果当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq 0$, 那么 $A \geq 0$

【注】：由保号性不难得保序性： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

(1) $A > B \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > g(x)$

(2) 若 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq g(x) \Rightarrow A \geq B$

3、函数值与极限值之间的关系

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

(三) 极限存在准则

1、夹逼准则 (n 项和)

$$\text{若 } y_n \leq x_n \leq z_n, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

2、单调有界准则：单调有界的数列必有极限

单调增，有上界的数列必有极限

单调减，有下界的数列必有极限



（四）无穷小

1、无穷小量

$f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小

2、无穷小的比较: 设 $\lim \alpha(x) \rightarrow 0, \lim \beta(x) \rightarrow 0$

(1) 高阶: 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

(2) 同阶: 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$;

(3) 等价: 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

(4) 无穷小的阶: $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$, 称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

3、无穷小的性质

- (1) 有限个无穷小的和仍为无穷小
- (2) 有限个无穷小的积仍为无穷小
- (3) 无穷小量与有界量的积仍为无穷小

（五）无穷大

1、无穷大量

$f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时趋于无穷, 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大

2、常用无穷大量的比较

(1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时

$$\ln^\alpha x \ll x^\beta \ll a^x \quad (\alpha > 0, \beta > 0, a > 1)$$

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n \quad (\alpha > 0, \beta > 0, a > 1)$$

3、无穷大量与无界变量的关系

(1) 数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量

$$\forall M > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时, 恒有 } |x_n| > M$$

(2) 数列 $\{x_n\}$ 是无界变量

$$\forall M > 0, \exists N > 0, \text{使 } |x_N| > M$$

无穷大 $\Rightarrow$ 无界变量

4、无穷大量与无穷小量的关系

在同一极限中, 如果 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小; 反之 $f(x)$

是无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大



二、常考题型的方法和技巧

题型一：极限的概念、性质及存在准则

【例1】设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大的时有: ()

- (A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ (B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$
(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$ (D) $a_n < a + \frac{1}{n}$

【例2】设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有: ()

- (A) $a_n < b_n$, 对任意 n 成立;
(B) $b_n < c_n$, 对任意 n 成立;
(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在;
(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

【例4】设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是 ()

- (A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散;
(B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界;
(C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小;
(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小.

【例5】设 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 ()

- (A) 充分必要条件 (B) 充分非必要条件
(C) 必要非充分条件 (D) 既非充分也非必要条件



【例6】(1) 证明, 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{1+n} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

(2) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n (n=1, 2, \cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛

题型二：求极限

一. 求极限的常用方法

方法 1: 利用有理运算法则求极限

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 那么:

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

推论: 1) 若 $\lim f(x) = A \neq 0$, 则 $\lim f(x)g(x) = A \lim g(x)$;

即: 极限非零的因子可先求出来

2) 若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$;

3) 若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, $\lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0$

【注】存在 $\pm$ 不存在 = 不存在 不存在 $\pm$ 不存在 = 不一定

(2022 年 1) 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$, 则 ()

(A) $f(1) = 0$

(B) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

(C) $f'(1) = 0$

(D) $\lim_{x \rightarrow 1} f''(x) = 0$

【例】已知数列 $\{a_n\}$ 单调减, $\{b_n\}$ 单调增, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, 则: ()

(A) $\{a_n\}$ 收敛, $\{b_n\}$ 不收敛;

(B) $\{b_n\}$ 收敛, $\{a_n\}$ 不收敛;

(C) $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都收敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$;

(D) $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都收敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$;



方法 2: 利用基本极限求极限

常用的基本极限:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \quad (a > 0) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & (n=m) \\ 0, & (n < m) \\ \infty, & (n > m) \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \infty, & |x| > 1 \\ 1, & x = 1 \\ \text{不存在}, & x = -1 \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{nx} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ +\infty, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

方法 3: 利用等价无穷小代换求极限

1. 常用等价无穷小, $x \rightarrow 0$ 时

$$1) \quad x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2, \quad a^x - 1 \sim x \ln a$$

$$2) \quad x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}, \quad \tan x - x \sim \frac{x^3}{3}, \quad x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}, \quad x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$$

$$3) \quad \text{设 } f(x) \text{ 和 } g(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 的某领域内连续, 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

$$\text{则 } \int_0^x f(t) dt \sim \int_0^x g(t) dt$$

2. 等价无穷小替换原则

1) 乘除关系可以换;

$$\text{若 } \alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \text{ 则 } \lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

2) 加、减条件一定条件下可以换

$$(1) \quad \text{若 } \alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \text{ 且 } \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1, \text{ 则 } \alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$$

$$(2) \quad \text{若 } \alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \text{ 且 } \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1, \text{ 则 } \alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$$



【例】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

方法 4: 利用洛必达法则求极限

若 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0(\infty)$;

2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

【注】: 适用类型 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \Leftarrow \begin{cases} 0 \cdot \infty \Leftarrow \begin{cases} 1^\infty \\ \infty^0 \\ 0^0 \end{cases} \\ \infty - \infty \end{cases}$$

方法 5: 利用泰勒公式求极限

定理 (泰勒公式): 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$$

特别是当 $x_0 = 0$ 时:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

意义: $f(x)$ 和 $f^{(n)}(x)$ 联系起来

用多项式逼近 $f(x)$

几个常用的泰勒公式:

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(5) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$



【例】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin^2 x}$

方法 6：利用夹逼准则求极限

【例】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right]$

方法 7：利用定积分的定义求极限

【例】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right]$

方法 8：利用单调有界准则求极限

【例】设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right), n = 1, 2, \cdots$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

方法 9：利用中值定理求极限

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a), \quad (a < c < b)$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx, \quad (a \leq c \leq b)$$

【例 1】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right]$



【例2】设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(x-t)dt}{\int_0^x t f(x-t)dt}$

二. 求极限常见的题型

(一) 函数的极限

七种不定式 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$

1、“ $\frac{0}{0}$ ”型极限

常用方法三种 $\begin{cases} 1) \text{ 洛必达法则} \\ 2) \text{ 等价无穷小代换} \\ 3) \text{ 泰勒公式} \end{cases}$

原式化简 $\begin{cases} 1) \text{ 极限非零的因子极限先求出} \\ 2) \text{ 有理化} \\ 3) \text{ 变量代换} \end{cases}$

【例1】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$

【例2】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$

【例3】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$

【例4】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^2 - \sin^2 x}$



【例5】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{(1+x)^x - 1}$

【注】当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, 这个结论可推广
若 $\alpha(x) \rightarrow 0, \alpha(x)\beta(x) \rightarrow 0$,
则 $(1+\alpha(x))^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$

【例6】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]}$

2、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限

常用方法两种 $\begin{cases} 1) \text{ 洛必达法则} \\ 2) \text{ 分子分母同除以分子和分母各项中最高阶的无穷大} \end{cases}$

【例1】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt}{xe^{x^2} + x^2}$

【例2】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + x^{100}}{2e^x + \ln^{10} x}$

【例3】求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$



3、“ $\infty - \infty$ ”型极限

常用方法三种

- 1) 通分化为 $\frac{0}{0}$ (适用于分式差)
- 2) 根式有理化 (适用于根式差)
- 3) 提无穷因子, 然后等价代换或变量代换、泰勒公式

【例1】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$

【例2】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

【例3】求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$

【例4】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right)$

【例】(2021 年 1, 2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$

4、“ $0 \cdot \infty$ ”型极限

常用方法是化为 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$

【例1】求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} x \ln |1 - x|$



5、“ 1^∞ ”型极限

常用方法三种

- 1) 凑基本极限 $\lim [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$; 其中 $\lim \varphi(x) = 0$ ($\varphi(x) \neq 0$)
- 2) 改写成指数 $\lim [f(x)]^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln f(x)}$ 用洛必达法则
- 3) 利用结论, 若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$, 且 $\lim \alpha(x) \beta(x) = A$
则 $\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A$

可以归纳为三步

- 1) 写标准形式 原式 $= \lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)}$
- 2) 求极限 $\lim \alpha(x) \beta(x) = A$
- 3) 写结果 原式 $= e^A$

【例1】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

【例2】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

【例3】极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x = (\quad)$
(A) 1 (B) e (C) e^{a-b} (D) e^{b-a}

【例4】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

6、“ $\infty^0, 0^0$ ”型极限

$\lim [f(x)]^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln f(x)}$

【例1】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x-1)}$



(二) 数列的极限

1、不定式的极限

【例1】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\arctan n - \frac{\pi}{2} \right]$

【例2】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n$

2、n 项和的数列极限

常用方法 $\begin{cases} 1) \text{ 夹逼原理} \\ 2) \text{ 定积分定义} \\ 3) \text{ 级数求和} \end{cases}$

【例1】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right]$

【例2】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right]$

小结 $\begin{cases} 1. \text{变化部分是主体次量级, 用夹逼定理} \\ 2. \text{变化部分是主体同量级, 用定积分定义} \end{cases}$

【例3】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$



【例4】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$

【例5】设 $x_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ()$ (数学二不要求)

【例6】证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1 \leq i \leq m} a_i$, 其中 $a_i > 0 (i=1, 2, \dots, m)$,

并利用结论求下列极限:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} \quad (0 < a < b)$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0)$

3、n 项连乘的数列极限

常用方法 $\begin{cases} 1) \text{ 夹逼定理} \\ 2) \text{ 取对数化为 } n \text{ 项和} \end{cases}$

【例1】设 $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

【例2】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1) \cdot (n+2) \cdots (n+n)}$



4、递推关系 $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n) (n=1, 2, \dots)$ 定义的数列

常用方法 $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ 先证 } \{x_n\} \text{ 收敛 (单调有界准则), 然后等式 } x_{n+1} = f(x_n) \\ \text{两端取极限得 } A = f(A), \text{ 由此求极限} \\ 2) \text{ 先令 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \text{ 然后等式 } x_{n+1} = f(x_n) \text{ 两端取极限解得 } A \\ \text{最后再证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \end{array} \right.$

单调性判定常用的三种方法

1) $x_{n+1} - x_n \geq 0 (\leq 0)$

2) 若 $\{x_n\}$ 不变号, 且 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 (\leq 1)$

3) 设数列 $\{x_n\}$ 由 $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n) (n=1, 2, \dots)$ 所确定

(1) 若 $f(x)$ 单调增, 则

当 $x_1 \leq x_2$ 时, $\{x_n\}$ 单调增; 当 $x_1 \geq x_2$ 时, $\{x_n\}$ 单调减;

(2) 若 $f(x)$ 单调减, 则 $\{x_n\}$ 不单调

【例1】设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}, (n=1, 2, \dots)$,

证明: 数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限

【例2】设 $x_1 = \sqrt{6}, x_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}}, \dots, x_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6}}}}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

【例3】设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + e^{-x_n}, n=1, 2, \dots$

(1) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

(2) 求极限 $\frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n-1}}$



【例4】设 $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ ($n = 1, 2 \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

【例5】设 $f(x)$ 可微, 且 $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2+x^2}$, 数列 $x_0 = A$, $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2 \dots$
证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在且是方程 $f(x) = x$ 的唯一实根

题型三：确定极限式中的参数

【例1】若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt}{bx - \sin x} = 1$, 求 a, b , 其中 a, b 为正数

