

第一章 一元函数微分学（续）

【例2】若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + ax + b) = 0$, 求 a, b

【例3】若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^n + 7x^4 + 1)^m - x] = b, (n > 4, b \neq 0)$, 求 n, m, b

题型四：无穷小量阶的比较

1) 洛必达法则（求导定阶）

若 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量, 且 $f'(x)$ 是 x 的 $k (k \geq 0)$ 阶的无穷小, 则 $f(x)$ 是 $k+1$ 阶无穷小量

2) 等价无穷小代换

若 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量, 且 $f(x) \sim Ax^k (A \neq 0, k > 0)$, 则 $f(x)$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的 k 阶无穷小量

3) 泰勒公式

【例1】把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 进行排序, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列顺序是 ()

- (A) α, β, γ (B) α, γ, β
(C) β, α, γ (D) β, γ, α

【例2】当 $x \rightarrow 0$, 下列无穷小中最高阶的是 ()

- (A) $(2 + \tan x)^x - 2^x$ (B) $(\cos x^2)^{\frac{1}{x}} - 1$
(C) $\int_0^{1-\cos x} e^{xt} \sin t^2 dt$ (D) $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt$



【例3】当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则()

- (A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$ (B) $a=1, b=\frac{1}{6}$
(C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$ (D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$

【例4】设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列结论中错误的是()

- (A) $a=0$ (B) $b=1$
(C) $c=0$ (D) $d=\frac{1}{6}$

【例5】已知 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{-x^2} - \cos \sqrt{2}x$ 与 ax^n 是等价无穷小, 则

- (A) $n=2, a=\frac{1}{4}$ (B) $n=3, a=\frac{1}{2}$
(C) $n=4, a=\frac{1}{3}$ (D) $n=5, a=\frac{1}{6}$

第三节 连续

一、考试内容要点精讲	二、常见题型技巧与方法
(1) 连续的概念	题型一: 讨论连续性及其间断点的类型
(2) 间断点及其分类	题型二: 介值定理、最值定理及零点定理证明题
(3) 连续函数的性质	

一、考试内容要点精讲

(一) 连续的概念

定义 1: 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$

定义 2: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续

定义 3: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续

$f(x)$ 连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 左连续且右连续

定义 4: 区间上的连续



(二) 间断点及其分类

- (1) 概念: $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内有定义, 但在 x_0 处不连续, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点
- (2) 间断点分类
- 1) 第一类间断点: 左右极限均存在的间断点
 - 可去间断点: 左极限=右极限
 - 跳跃间断点: 左极限 $\neq$ 右极限
 - 2) 第二类间断点: 左右极限至少一个不存在(第二类不止两种间断点)

无穷间断点: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

振荡间断点: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

(三) 连续性的运算与性质

- 1) 连续函数和、差、积、商(分母不为 0) 及复合仍为连续函数
- 2) 初等函数在其定义区间内是处处连续
- 3) 闭区间上连续函数的性质:
 - (1) 有界性: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界
 - (2) 最值性: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值和最小值
 - (3) 介值性: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(a) \neq f(b)$, 则对 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一数 C , 至少存在一个 $\zeta \in [a, b]$, $f(\zeta) = C$

推论: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可取介于它在 $[a, b]$ 上最大值和最小值之间的一切值
- (4) 零点定理:

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则必 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = 0$

二、常考题型方法与技巧

题型一 讨论连续性及其间断点类型

【例1】设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

则常数 a, b 应满足: ()

- (A) $a < 0, b > 0$ (B) $a > 0, b > 0$
(C) $a \leq 0, b > 0$ (D) $a \geq 0, b < 0$

【例3】讨论函数 $f(x) = \frac{x \arctan \frac{1}{x-1}}{\sin \frac{\pi}{2} x}$ 的连续性并指出间断点类型



【例4】函数 $f(x) = \frac{(x+1)|x-1|}{e^{x-2} \ln|x|}$ 的可去间断点的个数为()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【例6】求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ 的间断点并指出其类型

题型 2 介值定理、最值定理及零点定理的证明题

【例1】设 $f(x)$ 在 (a, b) 内非负连续, 且 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$,
证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$

【例2】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续非负, $f(0) = f(1) = 0$, 求证:
 $\exists \xi \in [0, 1]$, 使 $f(\xi + l) = f(\xi)$, 其中 $0 < l < 1$

【例3】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, $f(0) = f(1)$, 求证: $\exists \xi \in [0, 1]$,
使 $f\left(\xi + \frac{1}{4}\right) = f(\xi)$

【例4】设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 试证明存在
 $\xi \in (-\infty, +\infty)$, 使 $f(\xi) + \xi = 0$



第二章 一元函数微分学

第一节 导数和微分

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
(一) 导数的概念	题型一：导数的概念
(二) 微分的概念	题型二：导数的几何意义
(三) 导数、微分的几何意义	题型三：导数和微分的计算
(四) 连续、可导、微分的关系	
(五) 求导公式	
(六) 求导法则	

一、考试内容要点精讲

(一) 导数的概念（这点变化率）

定义：（导数） $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

定义：（左导数） $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

定义：（右导数） $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

定理：可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数存在且相等

(二) 微分的概念（函数改变量的近似值）

若 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可以表示为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ ，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，

称 $A\Delta x$ 为微分，记 $dy = A\Delta x$

定理：函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微的充分必要条件是：

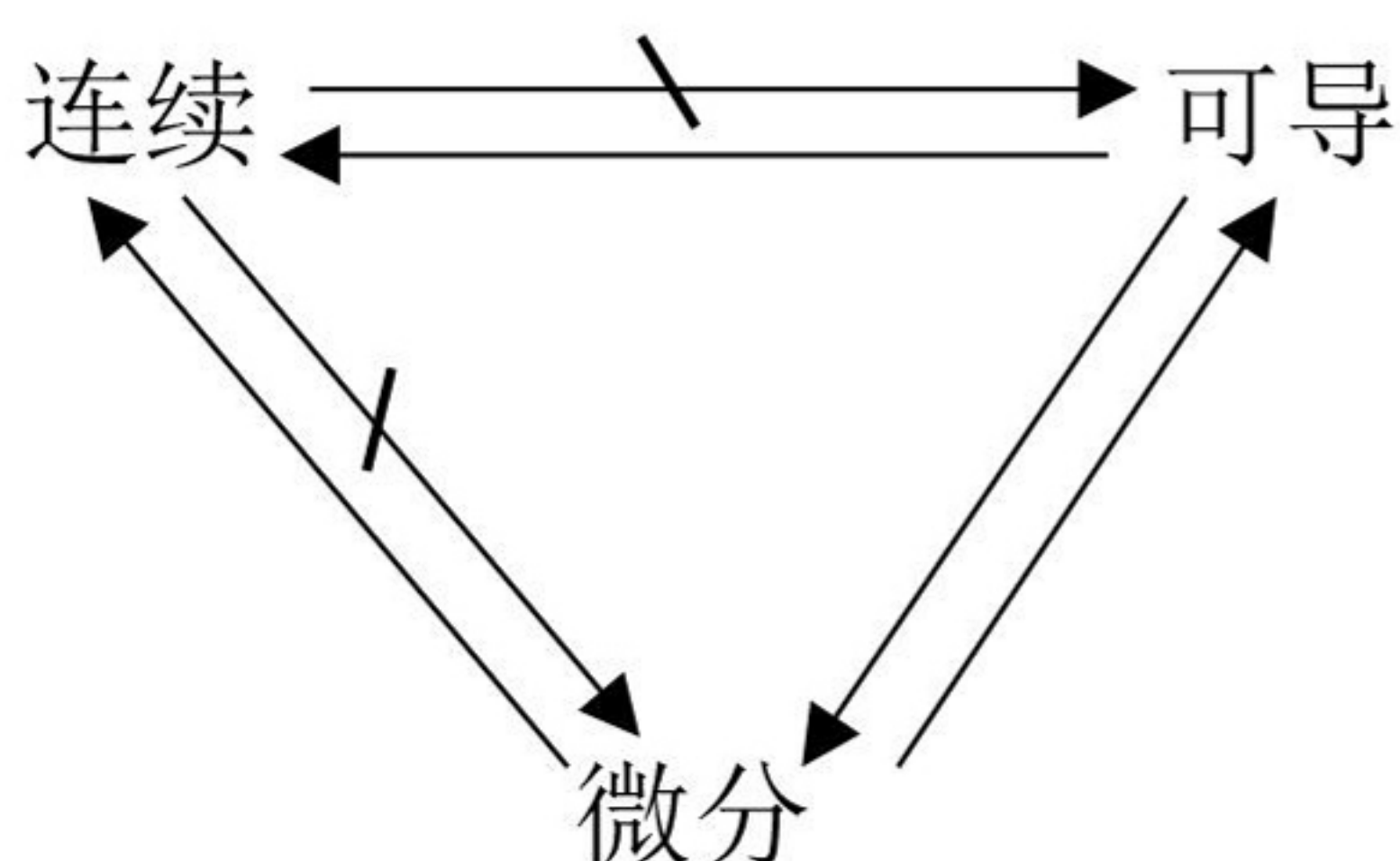
$f(x)$ 在 x_0 处可导，且有 $dy = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$

(三) 导数和微分的几何意义

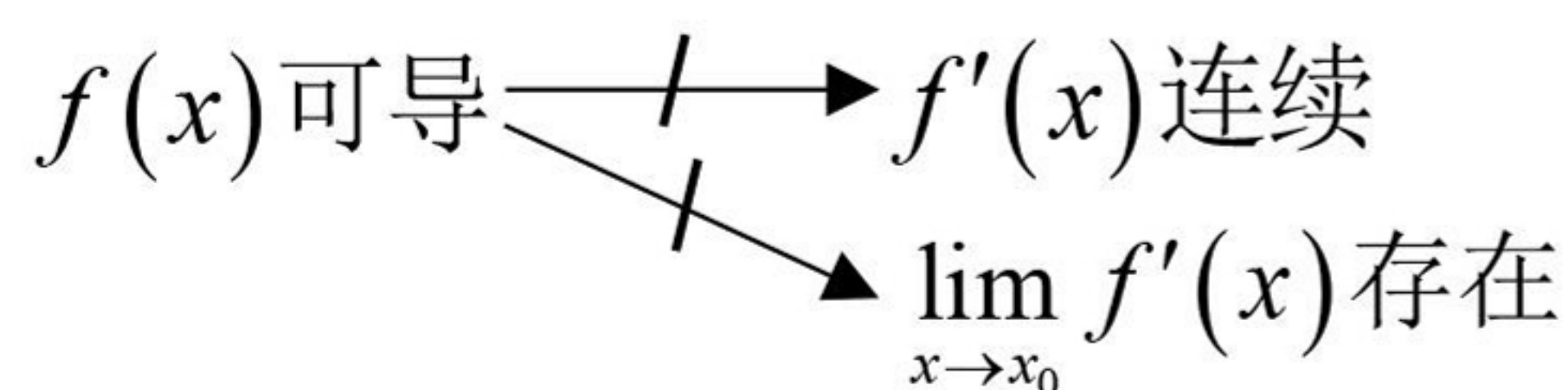
1) 导数的几何意义：导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率

2) 微分的几何意义：微分 $dy = f'(x_0)dx$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 切线增量

(四) 连续、可导、微分的关系



【例】设 $f(x)$ 可导，求极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{x - x_0}$



【例】设 $f(x)$ 二阶可导，求极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}$

(五) 导数公式及求导法则

$(C)' = 0$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$	$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

(六) 求导法则

(1) 有理运算法则

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(uv)' = u'v + uv'$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$

(2) 复合函数求导法

$u = \varphi(x), y = f(u)$ 可导, $y = f[\varphi(x)], \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$

(3) 隐函数求导法

$F(x, y) = 0, \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$

(4) 反函数导数

若 $x = \varphi(y)$ 在某区间上单调、可导, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则其反函数 $y = f(x)$ 也可导

且 $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$



(5) 参数方程求导法

$y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases} (\alpha < t < \beta)$ 确定的函数, 则

1) $\varphi(t)$ 和 $\phi(t)$ 都可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$ [公众号: 考研斯基]

2) $\varphi(t)$ 和 $\phi(t)$ 都二阶可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)} \right) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\phi''(t)\varphi'(t) - \phi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$

(6) 对数求导法 (适用于幂指函数和连乘连除)

(7) 高阶导数

1) 定义: $y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

2) 定义: 常用公式

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)} \quad (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

二、常考题型方法与技巧

题型一 导数与微分的概念

1) 利用导数定义求极限

【例1】设 $f(-1)=1$, $f'(-1)=2$, 则 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(2-3x)-1}{x-1}$

【例2】设 $f'(a)$ 存在, 且 $f(a) \neq 0$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n$

【例3】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3}$ ()

(A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0



【例4】设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) =$

2) 利用导数定义求导数

【例1】设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ ，其中 n 为正整数，则 $f'(0) = (\quad)$

- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$
(C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^n n!$

【例2】设 $f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ，则 $f'(0) = (\quad)$

【例】2022 考研 数学（二）第 17 题（10 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin^2 x)}{x^2} = 2$ ，求 $f'(1)$

3) 利用导数定义判断导数的可导性

【例1】设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，下列命题中错误的是 ()

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0) = 0$;
(B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0) = 0$;
(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在;
(D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.



【例】(2021 年, 数一第 1 题, 数二第 2 题, 数三第 2 题)

函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处 ()

- (A) 连续且取极大值
- (B) 连续且取极小值
- (C) 可导且导数为 0
- (D) 可导且导数不为 0

【例2】设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 可导的充要条件为 ()

- (A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$ 存在
- (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在
- (C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h)$ 存在
- (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在

【例3】设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 可导的 ()

- (A) 充分必要条件
- (B) 充分条件但非必要条件
- (C) 必要条件但非充分条件
- (D) 既非充分条件又非必要条件

【例4】函数 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$ 不可导的点的个数是 ()

- (A) 3
- (B) 2
- (C) 1
- (D) 0

【例】设 $f(x) = |x^3 - 1|g(x)$, 其中 $g(x)$ 连续, 则 $g(1) = 0$ 是 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导的 ()

- (A) 充分条件
- (B) 必要条件
- (C) 充分必要条件
- (D) 既非充分条件又非必要条件



【例5】设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是()

- (A) $f(a)=0$, 且 $f'(a)=0$; (B) $f(a)=0$, 且 $f'(a) \neq 0$;
(C) $f(a)>0$, 且 $f'(a)>0$; (D) $f(a)<0$, 且 $f'(a)<0$;

【注】

1) $f(x)$ 可导 $\nleftrightarrow$ $|f(x)|$ 可导

2) 设 $f(x)$ 连续

(1) 若 $f(x_0) \neq 0$, 则在 x_0 处 $f(x)$ 可导 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 可导

(2) 若 $f(x_0)=0$, 则 $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow |f(x)|$ 在 x_0 处可导

【例6】设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ ()

- (A) 处处可导 (B) 恰有一个不可导点
(C) 恰有两个不可导点 (D) 至少有三个不可导点

【例7】设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, $f(0)=0$, $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

- 1) 确定 a 使 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续
2) 证明对以上确定的 a , $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续一阶导数



题型二 导数的几何意义

【例1】曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=e^y$ 在点(0,0)处的切线方程为

【例2】曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为

【例3】已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$, 求该曲线上对应于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处的切线和法线的直角坐标方程

【例4】曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x (a \neq 0)$ 相切, 则 $a=(\quad)$
 (A) $4e$ (B) $3e$ (C) $2e$ (D) e

题型三 导数和微分的计算

1) 复合函数的导数

【例1】设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, 则 $f''(0)=$

【例2】已知 $y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x)=\arctan x^2$, 则 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}=$



【例3】设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^4, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $y = f(g(x))$, 则 ()

- (A) $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 1$ (B) $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$ 不存在
(C) $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$ (D) $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 不存在

【例4】设 $\varphi(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 函数 $f(x)$ 可导, 求 $F(x) = f[\varphi(x)]$ 的导数

2) 隐函数的导数

【例1】设 $y=y(x)$ 由 $y = \tan(x+y)$ 所确定, 试求 y', y''

【例2】设函数 $y = y(x)$ 由 $y - xe^y = 1$ 所确定, 试求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$

2022 年数 2

已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 + xy + y^3 = 3$ 确定, 则 $y''(1)$



【例3】设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin x - \int_x^y \varphi(u) du = 0$ 所确定，其中可导函数 $\varphi(u) > 0$ ，且 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$ ，求 $y''(0)$

3) 参数方程的导数

公式: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}$

方法: 一阶导数代公式，二阶导数利用 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right) \frac{1}{x'(t)}$

【例1】设 $f''(t) \neq 0$ ，又 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$ ，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

【例2】设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定，试求 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0}$

4) 反函数求导法

【例】设 $y = f(x)$ 的反函数是 $x = \varphi(y)$ ，且 $f(x) = \int_1^{2x} e^{t^2} dt + 1$ ，则 $\varphi''(1) =$

5) 对数求导法

对数求导法适用于幂指函数、连乘、连除、开方、乘方等

【例1】设 $y = (1 + x^2)^{\sin x}$ ，求 y'



【例2】设 $y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{x(1+x^2)}}$, 求 y'

6) 高阶导数

常用方法:

- 1) 代公式
- 2) 求一阶 y' , 二阶 y'' , 归纳 n 阶导数 $y^{(n)}$
- 3) 利用泰勒级数 (公式)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$$

【例1】设 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$, 求 $f^{(n)}(x)$

【例2】设 $f(x) = e^x \sin x$, 求 $f^{(n)}(x)$

【例3】设 $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, 求 $f^{(n)}(x)$

【例4】求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 $n(n>2)$ 阶导数



第二节 导数应用

微信公众号「废柴上岸」免费分享

一、考试内容要点精讲	二、常考题型方法与技巧
(一) 微分中值定理	题型一：函数的单调性与极值
(二) 极值与最值	题型二：曲线的凹向、拐点、渐近线、曲率
(三) 曲线的凹向与拐点	题型三：方程根的存在性及个数
(四) 曲线渐近线	题型四：证明函数不等式
(五) 平面曲线的曲率 (数三不要求)	题型五：微分中值定理有关的证明题

一、考试内容要点精讲

(一) 微分中值定理

罗尔定理

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续} \\ 2) f(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 上可导} \\ 3) f(a) = f(b) \end{array} \right\} \text{ 则 } \exists \xi \in (a, b), \text{ 使 } f'(\xi) = 0$$

拉格朗日定理

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续} \\ 2) f(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 上可导} \end{array} \right\} \text{ 则 } \exists \xi \in (a, b), \text{ 使 } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

柯西定理

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(x), g(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续} \\ 2) f(x), g(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 上可导, 且 } g'(x) \neq 0 \end{array} \right\} \text{ 则 } \exists \xi \in (a, b), \text{ 使 } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

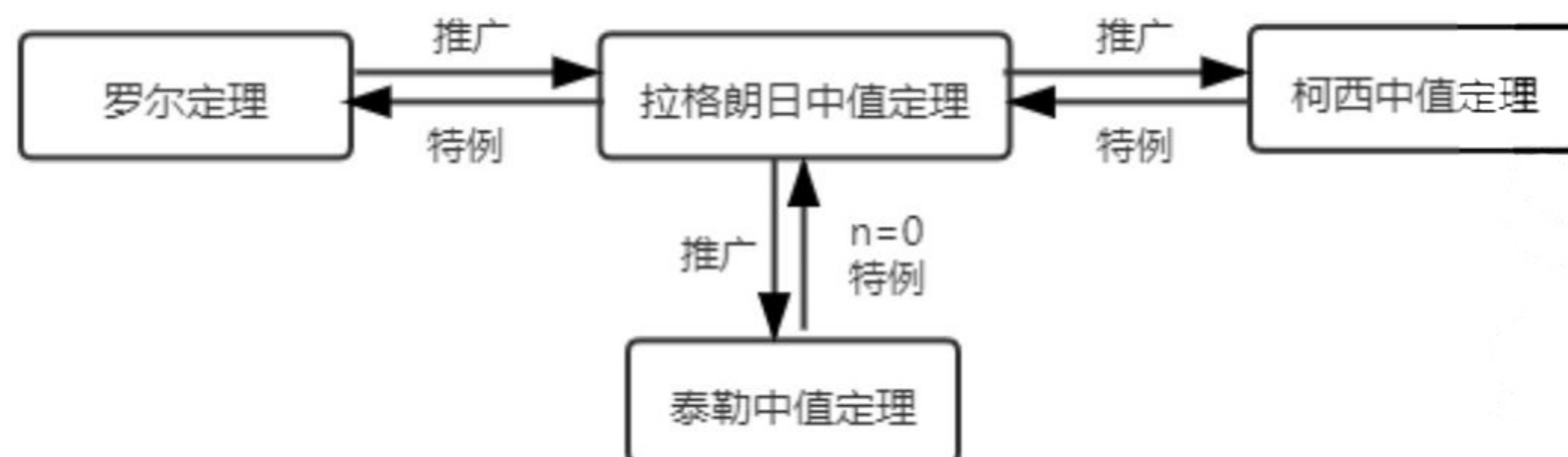
泰勒公式（拉格朗日余项）

$f(x)$ 在含 x_0 的区间 I 内 $(n+1)$ 阶可导，那么对 $\forall x \in I$ ，至少存在一个 ξ ，使

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \xi \text{ 在 } x_0 \text{ 和 } x \text{ 之间}$$

【注】：(1) 建立函数和导数的关系
(2) 四个中值定理的关系



(二) 极值与最值

1. 极值的概念 若 $\exists \delta > 0$, 使得:

$\forall x \in U(x_0, \delta)$, 恒有 $f(x) \geq f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值

$\forall x \in U(x_0, \delta)$, 恒有 $f(x) \leq f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

2. 极值的必要条件

若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$

可能极值点 $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f'(x_0) \text{ 不存在} \end{cases}$

极值点 $\longleftrightarrow$ 驻点

3. 极值的充分条件

(1) 第一充分条件

设 $f'(x_0) = 0$ (或 $f(x)$ 在 x_0 处连续), 且在 x_0 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内可导

1) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$; $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$,

则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

2) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$; $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) > 0$,

则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

3) 若 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f'(x)$ 不变号, 则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值

(2) 第二充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 则

1) $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

2) $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值

(3) 第三充分条件

$f(x)$ 在 x_0 处 $n(n \geq 2)$ 阶可导, 且

$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 但 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 则

(1) n 为偶数, $f(x)$ 在 x_0 处取得极值, $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时取极小值, $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时取极大值

(2) n 为奇数, $f(x)$ 在 x_0 处无极值

4. 函数的最值

(1) 求连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最值

第一步: 求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的驻点和不可导点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$

第二步: 求出函数值 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), f(a), f(b)$

第三步: 比较以上各点函数值



【注】：若连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内仅有唯一极值点 $\begin{cases} \text{若是极大} \rightarrow \text{最大} \\ \text{若是极小} \rightarrow \text{最小} \end{cases}$

(2) 最大值最小值的应用题——建立目标函数

(三) 曲线的凹点与拐点

1. 曲线的凹向

(1) 定义：凹函数： $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

凸函数： $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

(2) 判定：若在区间 I , $f''(x) > 0$, 曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 上是凹的

若在区间 I , $f''(x) < 0$, 曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 上是凸的

2. 曲线的拐点

(1) 定义：曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 两侧凹凸性相反

(2) 判定：(必要条件和充分条件) 等同极值 (一个必要, 三个充分)

(四) 曲线的渐近线

1. 水平渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$),

那么 $y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线

2. 垂直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$),

那么 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线

3. 斜渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a, \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ (或 $x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$)

那么 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线

(五) 平面曲线的斜率

1. 曲率的定义 $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$

2. 曲率的计算

(1) 若曲线由 $y=y(x)$ 给出, 则 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ (记这个)



(2) 若曲线由 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出, 则 $K = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ (这个推, 不记)

3. 曲率圆与曲率关系 $R = \frac{1}{K}$

二、常考题型方法与技巧

题型一 函数的单调性与极值

【例1】求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值

【例2】设函数 $f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 所确定, 求 $f(x)$ 的极值

【例3】设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则 ()

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;
- (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;
- (C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点;
- (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【例4】设 $f(x)$ 二阶导数连续, 且 $(x-1)f''(x) - 2(x-1)f'(x) = 1 - e^{1-x}$

- 1) 若 $x = a (a \neq 1)$ 是极值点时, 是极大值点还是极小值点?
- 2) 若 $x = 1$ 是极值点时, 是极大值点还是极小值点?



【例5】设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h^2} = a \neq 0$

试着讨论 $f(x)$ 在 x_0 点的极值

题型二 函数的凹向、拐点、渐近线和曲率

【例1】设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = \sin x$, 且 $f'(x) = 0$, 则()

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;
- (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;
- (C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点;
- (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【例2】设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$ 确定, 求 $y = y(x)$ 的极值和其曲线

$y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点

【例3】曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线的方程为



【例4】曲线 $y = e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)}$ 的渐近线的条数为()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【例5】求曲线 $y = x \arctan x$ 的渐近线

题型三 方程的根的存在性和个数

1 存在性

方法 1: 零点定理

方法 2: 罗尔定理

2. 根的个数

方法 1: 单调性

方法 2: 罗尔定理推论

罗尔定理推论: 若在区间上 I 上 $f^{(n)}(x) \neq 0$, 则方程 $f(x)=0$ 在 I 上最多 n 个实根

【例1】设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为任意实数, 求证方程 $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx = 0$ 在 $[0, \pi]$ 内必有实根

【例2】试讨论方程 $\ln x - \frac{x}{e} + 1 = 0$ 的实根个数

【例3】试证方程 $2^x - x^2 = 1$ 有且仅有三个实根



【例5】试确定方程 $x = ae^x$ ($a > 0$) 实根个数

【例6】设当 $x > 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个解, 试求 k 的取值范围

【例7】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $0 < f(x) < 1, f'(x) \neq 1$, 试证明在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个 x , 使 $f(x) = x$

【例8】设 $f''(x) < 0, f(1) = 2, f'(x) = -3$, 求证: $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 有且仅有一根

题型四 证明函数不等式

- 1) 单调性 2) 最大最小值 3) 拉格朗日中值定理
4) 泰勒公式 5) 凹凸性

【例1】设 $x \in (0, 1)$, 证明 $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$

【例2】求证: $\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a} (0 < a < b)$



【例3】比较 e^π 与 π^e 的大小

【例4】设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 证明: $f(x) \geq x$

【例5】设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f(0) = 1$, $f(x) > f'(x) (x \geq 0)$, 则

- (A) $\frac{f(2)}{f(1)} > 1$
- (B) $\frac{f(0)}{f(1)} > e$
- (C) $\frac{f(2)}{f(1)} > \frac{1}{e}$
- (D) $\frac{f(2)}{f(1)} > e$

题型五 微分中值定理有关的证明题

(一) 证明存在一个点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$

方法: 构造辅助函数用罗尔定理

构造辅助函数的方法主要有两种:

1. 分析法 (还原法): 根据对预证的结论 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$ 的分析, 确定 $g(x)$, 使 $g'(x) = F[\xi, f(\xi), f'(\xi)]$

2. 微分方程法 预证: $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$

1) 求微分方程 $F[x, y, y'] = 0$ 的通解 $H(x, y) = C$

2) 设辅助函数: $g(x) = H(x, f(x))$

【例1】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = b, f(b) = a$, a 与 b 同号

求证: $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = \frac{-f(\xi)}{\xi}$



【例2】设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续，在 $(1, 2)$ 内可导且 $f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = 2$,

求证: $\exists \xi \in (1, 2)$ 使 $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$

【注】

1) 欲证 $\xi f'(\xi) + nf(\xi) = 0$, 令 $F(x) = x^n f(x)$

2) 预证 $\xi f'(\xi) - nf(\xi) = 0$, 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x^n}$

【例3】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = 0$,

求证: $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$

【注】

1) 欲证 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{\lambda x} f(x)$;

特别的 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^x f(x)$;

$f'(\xi) - f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{-x} f(x)$;

2) 预证 $\alpha f'(\xi) - \beta f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{\frac{\beta}{\alpha} x} f(x); (\alpha \neq 0)$

3) 预证 $f'(\xi) + g'(x)f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{g(x)} f(x)$;

4) 预证 $f'(\xi) + g(x)f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{\int g(x) dx} f(x)$;

【例4】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 证明:

1) 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $f(\eta) = \eta$

2) 对任意实数 λ , 存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$



【例5】设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$ ，证明：

- (1) 存在 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $f'(\xi)=1$;
- (2) 存在 $\eta \in (-1,1)$ ，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

【例6】设函数 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 上二阶可导，且 $g''(x) \neq 0$ ，

$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$ ，试证：

- 1) 在 $[a,b]$ 内 $g(x) \neq 0$;
- 2) 在 (a,b) 内至少有一点 ξ ，使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$;

证明柯西定理

证明拉格朗日定理

【例7】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$ ，

求证： $\exists \xi \in (0,1)$ ，使 $\int_0^\xi f(x)dx = -\xi f(\xi)$



【例8】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$ ，
求证： $\exists \xi \in (0,1)$ ，使 $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$

【例9】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $f(0)=0$ ， $\int_0^1 f(x)dx=0$ ，
求证： $\exists \xi \in (0,1)$ ，使 $\int_0^\xi f(x)dx = \xi f(\xi)$

(二) 证明存在两个点 $\xi, \eta \in (a,b)$ ，使 $F[\xi, \eta, f(\xi), f(\eta), f'(\xi), f'(\eta)] = 0$

方法：(1) 不要求 $\xi \neq \eta$

在同一区间 $[a,b]$ 上用两次中值定理（拉格朗日、柯西中值定理）

(2) 要求 $\xi \neq \eta$

将区间 $[a,b]$ 分为两个子区间，在两个子区间上分别用拉格朗日中值定理

【例1】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， (a,b) 内可导，且 a, b 同号，

试证明存在 $\xi, \eta \in (a,b)$ ，使 $f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)$

【例2】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， (a,b) 内可导，且 $f'(x) \neq 0$ ，

证明存在 $\xi, \eta \in (a,b)$ ，使 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$

【例3】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， (a,b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = 1$ ，

试证存在 $\xi, \eta \in (a,b)$ ，使 $e^{\eta-\xi} [f(\eta) + f'(\eta)] = 1$



【例4】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$,

证明: 1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$

2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

【例5】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$,

试证对任意给定的正数 a, b , 在 $(0,1)$ 内一定存在互不相同的 ξ, η ,

$$\text{使 } \frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a+b$$

(三) 证明存在一个中值 $\xi \in (a,b)$, 使 $F(\xi, f^{(n)}(\xi)) \geq 0 (n \geq 2)$

方法: 用带拉格朗日余项的泰勒公式, 其中 x_0 点选题目中提供函数值和导数值信息多的点

【例1】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(a)=f'(b)=0$, 求证:

$$\exists \xi \in (a,b), \text{ 使 } |f''(\xi)| \geq 4 \frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$$

【例2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导, $f(0)=0, f(1)=1, f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$

求证: $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $|f'''(\xi)| \geq 24$

【例3】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)=f(1)=0$

$$\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1, \text{ 证明 } \max_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \geq 8$$

