

王式安概率论与数理统计强化笔记

第一章 随机事件和概率

考 试 要 求	理解	随机事件、概率、条件概率、事件的独立性、独立重复试验.
	了解	样本空间(基本事件).
	掌握	事件的关系及运算,概率的基本性质,概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式,用事件独立性进行概率计算,计算独立重复试验有关事件概率的方法.
	会	计算古典概型概率和几何型概率.

一、基础知识

1、随机试验

定义 对随机现象进行观察或试验称为**随机试验**,简称**试验**,记作 E .它具有如下特点:

- ①可以在相同条件下重复进行;
- ②所得的可能结果不止一个,且所有可能结果都能事前已知;
- ③每次具体试验之前无法预知会出现哪个结果.[微信公众号: 考研斯基]

2、样本空间

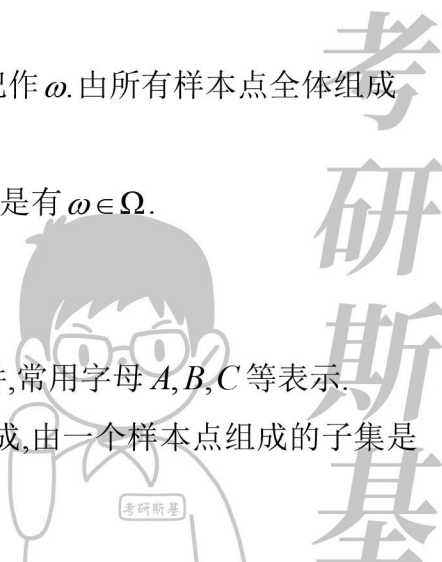
定义 随机试验的每一可能结果称为**样本点**,记作 ω . 由所有样本点全体组成的集合称为**样本空间**,记作 Ω . [公众号: 考研斯基]

【注】显然,样本点是组成样本空间的元素,于是有 $\omega \in \Omega$.

3、随机事件

定义 样本空间的子集称为**随机事件**,简称事件,常用字母 A, B, C 等表示.

随机事件是由样本空间中的元素即样本点组成,由一个样本点组成的子集是



最简单事件，称为**基本事件**。随机事件既然由样本点组成，因此，也可将随机事件看成是由基本事件组成。

把 Ω 看成一事件，则每次试验必有 Ω 中某一基本事件(即样本点)发生，也就是每次试验 Ω 必然发生，称 Ω 为**必然事件**。

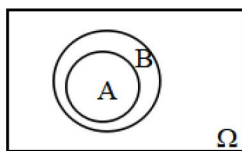
把不包含任何样本点的空集 $\emptyset$ 看成一个事件。每次试验 $\emptyset$ 必不发生，称 $\emptyset$ 为**不可能事件**。

4、事件的关系

【注】这一部分需重点掌握：定义、称呼、记号、集合、图

(1) 事件的包含

定义 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A ，或称事件 A 包含于事件 B ，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$ 。



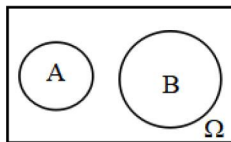
$$A \subset B$$

(2) 事件的相等

定义 如果 $A \supset B$ 与 $B \supset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A = B$ 。
 $A = B$ 表示事件 A 与事件 B 有完全相同的样本点。

(3) 互斥事件

定义 如果事件 A 与事件 B 满足关系 $AB = \emptyset$ ，即 A 与 B 同时发生是不可能事件，则称事件 A 和事件 B 互斥或互不相容。

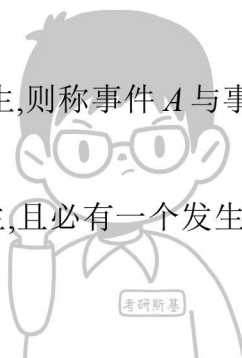


$$AB = \emptyset$$

(4) 对立事件

定义 如果事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生，则称事件 A 与事件 B 为对立事件或互逆事件，记为 $\bar{A} = B$ 或 $\bar{B} = A$ 。

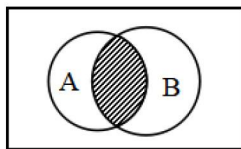
如果 A 与 B 为对立事件，则 A, B 不能同时发生，且必有一个发生，即 A, B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \emptyset$ 。



5、事件的运算

(1) 事件的交或积

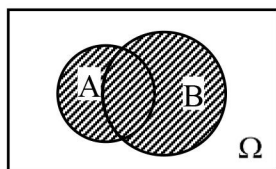
定义 如果事件 A 与事件 B 同时发生,则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的交或积,记为 $A \cap B$ 或 AB . [微信公众号：考研斯基]



$$A \cap B$$

(2) 事件的并或和

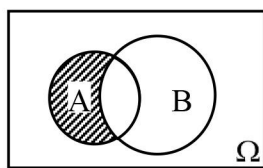
定义 如果事件 A 与事件 B 至少有一个发生,则称这样一个事件为事件 A 与事件 B 的并或和,记为 $A \cup B$. 集合 $A \cup B$ 是由属于 A 与 B 的所有样本点构成.



$$A \cup B$$

(3) 事件的差

定义 事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差,记为 $A - B$.



$$A - B$$

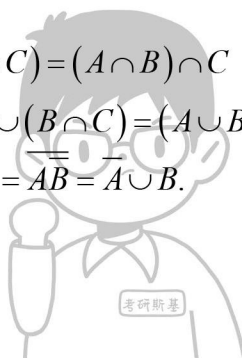
6、事件的运算规律

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

(3) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(4) 对偶律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A - B} = \overline{A} \cup B$.



7、概率公理

设试验 E 的样本空间为 Ω , 称实值函数 P 为概率, 如果 P 满足如下三条件:

- ① 对于任意事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;
- ② 对于必然事件 Ω , 有 $P(\Omega) = 1$;
- ③ 对于两两互斥的可数无穷个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots.$$
 称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

8、概率性质

- (1) $P(\emptyset) = 0$;
- (2) 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$
- (3) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- (4) $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$;
- (5) $0 \leq P(A) \leq 1$.

9、条件概率

定义 设 A, B 为两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率. [微信公众号：考研斯基]

10、事件独立性 $P(AB) = P(A)P(B)$,

- (1) 独立定义用概率, 不同于包含、互斥、相等以及对立, 解题方法也不同.
- (2) 独立 $\neq$ 互斥.
- (3) A, B 又独立又互斥, $\emptyset, B, \emptyset B = \emptyset, P(\emptyset B) = P(\emptyset)P(B)$.
 $\emptyset$ 与任何事件独立且互斥.
- (4) A, B 独立且 $A \supset B, \Omega \supset B, P(\Omega B) = P(\Omega)P(B)$.
 Ω 与任何事件独立.
- (5) $\emptyset, \Omega$ 特殊性: $P(A) = 0$ 或 $P(A) = 1$.
- (6) 独立性质:



① A 与 B 相互独立的充要条件是 A 与 $\bar{B}$ 或 $\bar{A}$ 与 B 或 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立.

② 当 $0 < P(A) < 1$ 时, A 与 B 独立等价于 $P(B|A) = P(B) = P(B|\bar{A})$.

(7) 设 A, B, C 三事件满足等式

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

则称 A, B, C 三事件相互独立, 满足以上四等式中前三个则称 A, B, C 三事件两两独立.

11、五大公式

(1) 加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

(2) 减法公式: $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

(3) 乘法公式: 当 $P(A) > 0$ 时, $P(AB) = P(A)P(B|A)$;

(4) 全概率公式

设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 Ω 的概率均不为零的一个完备事件组, 则对任意事件 A , 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$$

(5) 贝叶斯公式

设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 Ω 的概率均不为零的一个完备事件组, 则对任意事件 A , 且

$P(A) > 0$, 有

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}, j=1, 2, \dots, n$$

12、古典型、几何型、伯努利实验

(1) 古典型概率

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{A \text{ 中所包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}$$

称有限等可能试验中事件 A 的概率 $P(A)$ 为古典型概率.

(2) 几何型概率

$$P(A) = \frac{L(\Omega_A)}{L(\Omega)} = \frac{\Omega_A \text{ 的几何度量}}{\Omega \text{ 的几何度量}}$$

考
研
斯
基



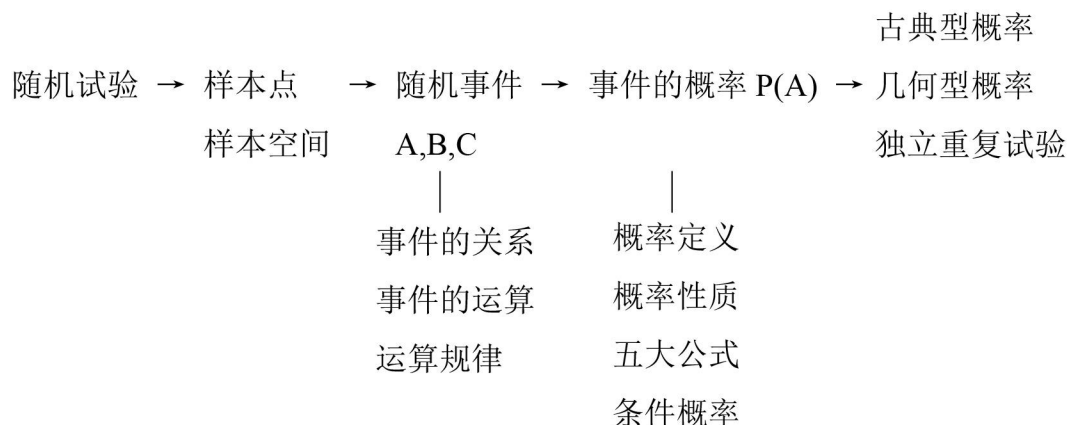
(3) 伯努利实验

伯努利试验: 每次试验只有两个结果 A 和 $\bar{A}$, $P(A) = p$.

n 重伯努利试验: 将伯努利试验独立重复进行 n 次

二项概率公式: $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

13、小结



本章的基本概念和知识点较多,但重点应关注以下四个方面:

- (1) 对偶律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A - B} = \bar{A} \bar{B} = \bar{A} \cup B$.
- (2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- (3) 五大公式.
- (4) 简单的古典型概率, 独立重复试验. [微信公众号: 考研斯基]

二、典型例题

例 1 设随机事件 A 和 B 满足条件 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 则 ()

- (A) $AB = \emptyset, A \cup B = \Omega$.
- (B) $AB = \emptyset, A \cup B \neq \Omega$.
- (C) $AB \neq \emptyset, A \cup B = \Omega$.
- (D) $AB \neq \emptyset, A \cup B \neq \Omega$.

扩 $AB = \bar{A}\bar{B}, P(AB) = \underline{\hspace{2cm}}$



例 2 $\overline{(A-B) \cup (B-C)}$ 等于事件

(A) $\bar{A} \cup C$

(B) $\bar{A} \cap (\bar{B} \cup C)$

(C) $\bar{A}\bar{B} \cup C$

(D) $\bar{A}\bar{B} \cup BC$

例 3 随机事件 A, B 满足 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ 和 $P(A \cup B) = 1$, 则必有 ()

(A) $A \cup B = \Omega$.

(B) $AB = \emptyset$.

(C) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$.

(D) $P(A - B) = 0$.

例 4 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C}) = \underline{\hspace{2cm}}$

例 5 设 A, B, C 为三个随机事件, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0$,

$P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 ()

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{5}{12}$.

例 6 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$, 下列命题中为假命题的是 ()

(A) 若 $P(A|B) = P(A)$, 则 $P(A|\bar{B}) = P(A)$.

(B) 若 $P(A|B) > P(A)$, 则 $P(\bar{A}|\bar{B}) > P(\bar{A})$.

(C) 若 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$, 则 $P(A|B) > P(A)$.

(D) 若 $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$.



考
研
斯
基

例 7 有两个盒子，第一盒中装有 2 个红球，1 个白球，第二盒中装一半红球，一半白球.现从两、盒中各任取一球放在一起,再从中取一球,问:

(I)这个球是红球的概率; [微信公众号：考研斯基]

(II)若发现这个球是红球,问第一盒中取出的球是红球的概率.

例 8 假设有两箱同种零件:第一箱内装 50 件,其中 10 件一等品;第二箱内装 30 件,其中 18 件一等品.现从两箱中随意挑出一箱, 然后从该箱中先后随机取出两个零件(取出的零件均不放回).试求:

(I)先取出的零件是一等品的概率 p ;

(II)在先取出的零件是一等品的条件下,第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q .

扩 假设有两箱同种零件:第一箱内装 n 件一等品;第二箱内装 m 件,其中仅有一件一等品.现从两箱中随意挑出一箱, 然后从该箱中先后随机取出两个零件(取出的零件均不放回), (n, m 均大于 2), 试求:

(I)先取出的零件是一等品的概率 p ;

(II)在先取出的零件是一等品的条件下,第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q .

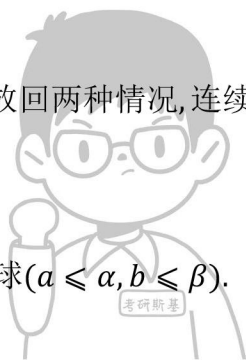
例 9 甲袋中有 2 个白球 3 个黑球,乙袋中一半白球一半黑球.现从由袋中任取 2 球与从乙袋中任取一球混合后,再从中任取一球为白球的概率为

- (A) $\frac{11}{30}$. (B) $\frac{6}{15}$. (C) $\frac{13}{30}$. (D) $\frac{7}{15}$.

例 10 袋中装有 α 个白球和 β 个黑球,分有放回和无放回两种情况,连续随机每次抽取一个,求下列事件的概率:

(I)从袋中取出的第 k 个球是白球 ($k \leq \alpha + \beta$);

(II)从袋中取出 $a + b$ 个球中,恰含 a 个白球和 b 个黑球 ($a \leq \alpha, b \leq \beta$).



例 11 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 _____ [微信公众号：考研斯基]

例 12 四封信等可能投 2 三个邮筒,在已知前两封信放入不同邮筒的条件下,求恰有三封信放入同一邮筒的概率为 _____

例 13 10 件产品中含有 4 件次品,今从中任取两件,已知其中有一件是次品,则另一件也是次品的概率为 _____

例 14 10 台洗衣机中有 3 台二等品,现已售出一台,在余下的 9 台中任取 2 台发现均为一等品,则原先售出一台为二等品的概率为

- (A) $\frac{3}{10}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{5}$. (D) $\frac{3}{8}$.

例 15 在伯努利试验中,每次试验成功的概率为 p ,则在第 n 次成功之前恰失败了 m 次的概率为 _____

例 16 两盒火柴各 N 根,每次任取一盒用一根,则当一盒用完时,另一盒还有 R 根的概率为 _____

例 17 从数 $1,2,3,4$ 中任取一个数,记为 X ,再从 $1,2,\dots,X$ 中任取一个数记为 Y ,则 $P\{Y=2\} =$ _____



第二章 随机变量及其分布

考 试 要 求	理解	随机变量,分布函数及其性质,离散型随机变量及其概率分布,连续型随机变量及其概率密度.
	了解	泊松定理的结论和应用条件.(数学一要求)
	掌握	0-1分布、二项分布、几何分布、超几何分布、泊松分布及它们的应用、均匀分布、指数分布、正态分布及它们的应用.泊松定理的结论和应用条件.(数学三要求)
	会	计算与随机变量相联系的事件的概率,用泊松分布近似表示二项分布,求随机变量函数的分布.

一、基础知识

1、随机变量

定义 在样本空间 Ω 上的实值函数 $X=X(\omega), \omega \in \Omega$ 称 $X(\omega)$ 为随机变量,简记为 X .常用 X, Y, Z 等表示随机变量.随机变量的定义域是 Ω .

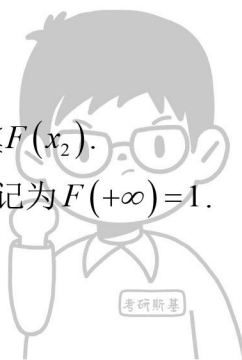
2、分布函数

定义 对于任意实数 x ,记函数 $F(x)=P\{X \leq x\}, -\infty < x < +\infty$,称 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数.

分布函数 $F(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个实值函数, $F(x)$ 的值等于随机变量 X 在区间 $(-\infty, x]$ 上取值的概率,即事件“ $X \leq x$ ”的概率. [公众号: 考研斯基]

3、分布函数性质

- (1) $0 \leq F(x) \leq 1$;
- (2) $F(x)$ 是单调不减函数,即当 $x_1 < x_2$ 时, $F(x_1) \leq F(x_2)$.
- (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,记为 $F(-\infty) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$,记为 $F(+\infty) = 1$.
- (4) $F(x)$ 是右连续的,即 $F(x+0) = F(x)$.



(5) 对任意 $x_1 < x_2$, 有 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$.

(6) 对任意的 x , $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$.

【注】性质 (1) (2) (3) (4) 是 $F(x)$ 为分布函数的充要条件.

4、离散型随机变量

定义 如果一个随机变量的可能取值是有限多个或可数无穷多个, 则称它为离散型随机变量.

5、离散型随机变量概率分布或分布律

定义 设离散型随机变量 X 的可能取值是 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, X 取各可能值的概率为:

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$$

称上式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律.

分布律也有用列表方式给出的:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n	$\dots$

或者

$$X \sim \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{bmatrix}$$

6、分布律性质

(1) $1 \geq p_k \geq 0, k = 1, 2, \dots$;

(2) $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

【注】性质 (1) 和 (2) 是分布律的充要条件. [公众号: 考研斯基]

7、离散型随机变量 X 的分布函数

定义 设 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$, 则 X 的分布函数为

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} p_k, \text{ 或者 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ p_1, & x_1 \leq x < x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 \leq x < x_3, \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



件	④ $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$ ⑤ $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$	③ $P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$ ④ $F'(x) = f(x)$
---	---	--

常用公式：① $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$ ② $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

二、常用分布

1、0-1 分布

定义 如果随机变量 X 有分布律

$$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & 1-p & p \end{array}$$

$0 < p < 1$, 则称 X 服从参数为 p 的 0-1 分布, 或称 X 具有 0-1 分布.

2、二项分布

定义 如果随机变量 X 有分布律

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

其中 $0 < p < 1, q = 1 - p$, 则称 X 服从参数为 n, p 的二项分布, 记作 $X \sim B(n, p)$.

在 n 重伯努利试验中, 若每次试验成功率为 $p (0 < p < 1)$, 则在 n 次独立重复试验中成功的总次数 X 服从二项分布.

当 $n=1$ 时, 二项分布就退化成 0-1 分布. 所以 0-1 分布也可以记为 $B(1, p)$.

3、泊松分布

定义 如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数, 则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X \sim P(\lambda)$.

在一段时间内电话总机接到的呼叫次数、候车的旅客数、保险索赔的次数等都服从泊松分布.



4、均匀分布

(1) 定义

如果连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则称 X 在区间 $[a, b]$ 上服从均匀分布, 记作 $X \sim U[a, b]$.

如果概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则称 X 在区间 (a, b) 上服从均匀分布, 记作 $X \sim U(a, b)$.

(2) 分布函数

均匀分布的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & b \leq x. \end{cases}$$

(3) 性质

设 $X \sim U[a, b]$, 当 $a \leq c < d \leq b$ 时, 有 $P\{c \leq x \leq d\} = \frac{d-c}{b-a}$

5、指数分布

(1) 定义

如果连续型随机变量 X 的概率密度为[公众号：考研斯基]

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \lambda > 0$$

则称 X 服从参数为 λ 的指数分布, 记作 $X \sim E(\lambda)$.

设 $X \sim E(\lambda)$, 则 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \lambda > 0$$

指数分布有很多应用, 有许多种寿命的分布都可看成服从指数分布.



(2) 性质

设 $X \sim E(\lambda)$, 则有

$$\textcircled{1} P\{X > t\} = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t}, t > 0$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} P\{X > t+s | X > s\} &= \frac{P\{X > t+s, X > s\}}{P\{X > s\}} = \frac{P\{X > t+s\}}{P\{X > s\}} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} \\ &= P\{X > t\}, t, s > 0 \end{aligned}$$

此性质称为指数分布具有“无记忆性”. [公众号：考研斯基]

6、正态分布

①如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$$

其中 μ, σ 为常数且 $\sigma > 0$, 则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布, 记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

②标准正态分布

当 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 时, 即 $X \sim N(0, 1)$, 称 X 服从标准正态分布, 此时用 $\varphi(x)$ 表示 X 的概率密度, 即 [公众号：考研斯基]

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$$

当 $X \sim N(0, 1)$ 时, 分布函数用 $\Phi(x)$ 表示

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

③设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

④ $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \Phi(0) = \frac{1}{2}$.

⑤查表



考
研
斯
基

三、随机变量函数的分布

X 是随机变量, $X = X(\omega)$, 则 $Y = g(X) = g[X(\omega)]$ 也是随机变量.

1、离散型随机变量的函数分布 (X 是离散型)

设 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots,$$

则 X 的函数 $Y = g(X)$ 的分布律为

$$P\{Y = g(x_k)\} = p_k, k = 1, 2, \dots.$$

如果在 $g(x_k)$ 中有相同的数值, 则将它们相应的概率和作为 Y 取该值的概率.

2、连续型随机变量的函数分布 (X 是连续型)

当 X 是连续型随机变量时, 设 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$, 一般 Y 也是连续型随机变量, 记其概率密度为 $f_Y(y)$.

(1) 公式法

设 $y = g(x)$ 是单调、导数不为零的可导函数, $h(y)$ 为它的反函数, 则

$$f_Y(y) = \begin{cases} |h'(y)| f_X(h(y)), & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 (α, β) 是函数 $g(x)$ 在 x 可能取值的区间上的值域.

(2) 定义法

先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx,$$

然后 $f_Y(y) = F'_Y(y)$.

【注】定义法要点: 定义; 范围; 端点.

本章小结:

本章的基本概念和知识点很多. 重点关注以下三方面:

- (1) 分布函数、分布律和概率密度的充要条件和性质;
- (2) 常见分布: 二项分布、泊松分布、均匀分布、指数分布和正态分布;
- (3) 随机变量函数的分布.



考
研
斯
基

四、典型例题

例 1 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} a + \frac{b}{(1+x)^2}, & x > 0, \\ c, & x \leq 0, \end{cases}$$

求常数 a, b, c 的值.

例 2 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\} = c \frac{\lambda^k}{k!}, k=1, 2, \dots, \lambda > 0$$

则常数 c 的值为_____

例 3 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 引入函数 $F_1(x) = F(ax)$, $F_2(x) = F^2(x)$, $F_3(x) = 1 - F(-x)$ 和 $F_4(x) = F(x+a)$, 其中 a 为常数, 则可以确定也是分布函数的为 ()

(A) $F_1(x), F_2(x)$.

(B) $F_2(x), F_3(x)$.

(C) $F_3(x), F_4(x)$.

(D) $F_2(x), F_4(x)$.

例 4 如果 $f(x)$ 是某随机变量 X 的概率密度, 则可以判断也是概率密度的是 ()

(A) $f(2x)$.

(B) $f^2(x)$.

(C) $2xf(x^2)$.

(D) $3x^2 f(x^3)$.

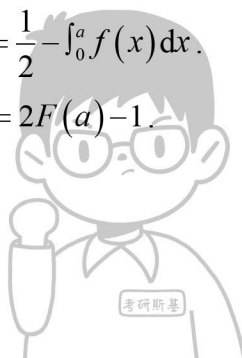
例 5 设随机变量 X 的密度 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$, $F(x)$ 是 X 的分布函数, 则对任意实数 a , 成立 ()

(A) $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x) dx$.

(B) $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x) dx$.

(C) $F(-a) = F(a)$.

(D) $F(-a) = 2F(a) - 1$.



例 6 已知随机变量 X 与 $-X$ 具有相同概率密度, 记 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $F(x) + F(-x) =$ _____

例 7 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于 ()

- (A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$ (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (D) $u_{1-\alpha}$

例 8 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0, \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则 a, b 应满足 ()

- (A) $2a + 3b = 4$. (B) $3a + 2b = 4$.
(C) $a + b = 1$. (D) $a + b = 2$.

例 9 在区间 $[a, b]$ 上任意投掷一个点, 以 X 表示这个点的坐标. 设这个点落在 $[a, b]$ 中任意小区间的概率与这个小区间的长度成正比, 求 X 的概率密度.

例 10 设随机变量 $X \sim U[2, 5]$, 现对 X 进行三次独立观测, 试求至少有两次观测值大于 3 的概率. [公众号: 考研斯基]

例 11 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = Ae^{-x^2+x} (-\infty < x < +\infty)$, 则常数 $A =$ _____

例 12 设 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则 $P\{X < 0\} =$ _____



考
研
斯
基

例 13 设 $X \sim U[a, b]$ ($a > 0$), 且 $P\{0 < X < 3\} = \frac{1}{4}$ 和 $P\{X > 4\} = \frac{1}{2}$.

求(I) X 的概率密度;

(II) $P\{1 < X < 5\}$.

例 14 设随机变量 X 服从 $(0, 2)$ 上的均匀分布, 则随机变量 $Y = X^2$ 在 $(0, 4)$ 内的概率密度 $f_Y(y) = \underline{\hspace{2cm}}$

例 15 设 X 服从参数为 2 的指数分布, 证明: 随机变量 $Y = 1 - e^{-2X}$ 服从 $U(0, 1)$.

例 16 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则随机变量 $Y = \max\{X, 1\}$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 的间断点个数为 ()

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.



考
研
斯
基

第三章 多维随机变量及其分布

考 试 要 求	理解	多维随机变量,多维随机变量的分布和性质,二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布,二维连续型随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度,随机变量的独立性及其不相关性、二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 中参数的概率意义.
	了解	二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的概率密度(数三要求掌握).
	掌握	随机变量相互独立的条件,二维均匀分布.
	会	求与二维随机变量相关事件的概率,求两个随机变量简单函数的分布,求多个相互独立随机变量简单函数的分布.

一、二维随机变量

1、二维随机变量的定义

定义 设 $X = X(\omega), Y = Y(\omega)$ 是定义在样本空间 Ω 上的两个随机变量,则称向量 (X, Y) 为二维随机变量或随机向量. [公众号: 考研斯基]

2、二维随机变量 (X, Y) 的分布函数

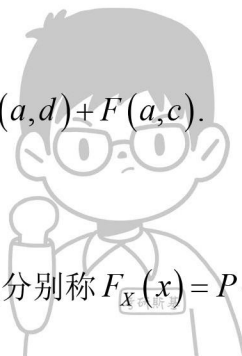
$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

3、分布函数的性质

- ① 对任意 x, y , 均有 $0 \leq F(x, y) \leq 1$;
- ② $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$;
- ③ $F(x, y)$ 关于 x 和关于 y 均单调不减;
- ④ $F(x, y)$ 关于 x 和关于 y 是右连续的;
- ⑤ $P\{a < X \leq b, c < Y \leq d\} = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$.

4、边缘分布

设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 分别称 $F_X(x) = P\{X \leq x\}$ 和



$F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$ 为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数.

显然, 边缘分布 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 与二维随机变量分布函数 $F(x, y)$ 有如下关系:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X < +\infty, Y \leq y\} = F(+\infty, y)$$

这里 $F(x, +\infty)$ 应理解为 $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$.

5、二维随机变量的条件分布

定义 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, $P\{y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\} > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P\{X \leq x | y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P\{X \leq x, y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\}}$$

存在, 则称此极限为在条件 $Y = y$ 下 X 的条件分布函数, 记作 $F_{X|Y}(x|y)$ 或 $P\{X \leq x | Y = y\}$. 类似地可定义 $F_{Y|X}(y|x)$.

6、二维离散型随机变量

定义 如果随机变量 (X, Y) 可能取值为有限个或无穷个 $(x_i, y_j) (i, j = 1, 2, \dots)$ 则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量.

7、概率分布或分布律

二维离散型随机变量 (X, Y) 的可能取值为 $(x_i, y_j) (i, j = 1, 2, \dots)$, 称

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$$

为二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布或分布律. 也可以用表格形式表示分布律:

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

8、性质

① $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \dots;$

② $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$



9、二维离散型随机变量的边缘分布

关于 X 的边缘分布:

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i = 1, 2, \dots$$

关于 Y 的边缘分布:

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1, 2, \dots$$

10、二维离散型随机变量的条件分布

定义 对给定的 j , 如果 $P\{Y = y_j\} > 0$, 则称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, i = 1, 2, \dots$$

为在 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布. [公众号: 考研斯基]

11、二维连续型随机变量

$$(X, Y) \sim F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv, -\infty < x, y < +\infty.$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

12、概率密度 $f(x, y)$ 的性质

① $f(x, y) \geq 0$;

② $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$;

③ 随机变量 (X, Y) 落在区域 D 内的概率 $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$.

13、边缘密度

定义

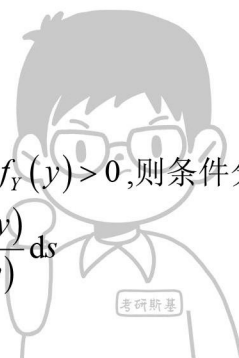
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \text{ 和 } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

分别称为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘密度.

14、条件密度

定义 设 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续, $f_Y(y)$ 连续且 $f_Y(y) > 0$, 则条件分布函数为

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x \frac{f(s, y)}{f_Y(y)} ds$$



其中 $\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 被称为在条件 $Y = y$ 下 X 的条件密度, 记作 $f_{X|Y}(x|y)$, 即

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, f_Y(y) > 0$$

类似可定义, 当 $f_X(x) > 0$ 时, 在条件 $X = x$ 下 Y 的条件密度和条件分布函数为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \text{ 和 } F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, s)}{f_X(x)} ds.$$

二、独立性

1、随机变量 X 与 Y 相互独立

定义 如果对任意 x, y 都有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$$

即

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量 X 与 Y 相互独立.

2、离散型随机变量相互独立

离散型随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件: 对任意 $i, j = 1, 2, \dots$ 有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\},$$

即

$$p_{ij} = p_{i \cdot} p_{\cdot j}$$

独立的充要条件: 行(列)间成比例.

例 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 下表列出了二维随机变量 (X, Y) 的联合概率分布及关于 X 和关于 Y 的边缘概率分布的部分数值, 将剩余数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i \cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			



3、连续型随机变量相互独立

连续型随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件: 对任意的 x, y , 成立

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

【注】可将两个随机变量的独立性推广到两个以上随机变量的情形.

三、二维均匀分布和二维正态分布

1、二维均匀分布

定义 如果二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 A 是平面有界区域 G 的面积, 则称 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布.

设 (X, Y) 在 G 上服从均匀分布, D 是 G 中的一个部分区域, 记它们的面积分别为 S_D 和 S_G , 则 $P\{(X, Y) \in D\} = \frac{S_D}{S_G}$. [公众号: 考研斯基]

2、二维正态分布

(1) 定义

定义 如果二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right),$$

$$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$ 均为常数, 则称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ 和 ρ 的二维正态分布, 记作 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$.

(2) 性质

设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$, 则

① $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 反之 X, Y 均正态, (X, Y) 不一定正态.

② X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho = 0$.

③ $(aX + bY, cX + dY)$ 正态, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.



四、 $Z = g(X, Y)$ 的分布1、 X, Y 均为离散型随机变量

$$Y = g(X) \quad P\{X = x_k\} = p_k \quad P\{Y = g(x_k)\} = p_k$$

$$Z = g(X, Y) \quad P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad P\{Z = g(x_i, y_j)\} = p_{ij}$$

2、 X, Y 均为连续型随机变量

$$\textcircled{1} \text{定义法: } Z = g(X, Y), F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{当 } Z = X + Y \text{ 时,} \\ F_Z(z) = P\{X + Y \leq z\} &= \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy \quad \left(\text{或} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx \right) \end{aligned}$$

由此可得 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx,$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy.$$

独立时

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx,$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy.$$

3、 X 为离散型随机变量、 Y 为连续型随机变量

一般对离散型随机变量 X 的各种可能取值用全概率公式把它们展开,如下:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

Y 为连续型, $Z = g(X, Y)$ 则

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} \\ &= \sum_i P\{X = x_i\} P\{g(X, Y) \leq z | X = x_i\} \\ &= \sum_i p_i P\{g(x_i, Y) \leq z | X = x_i\} \end{aligned}$$



考研斯基

五、典型例题

例 1 设二维随机变量 (ξ, η) 的分布函数为 $F(x, y)$, 则随机变量 (η, ξ) 的分布函数 $F_1(x, y) =$ _____

例 2 设随机变量 X 在1, 2, 3三个数字中等可能地取值, 随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数, 试求

(I) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布; [公众号: 考研斯基]

(II) $P\{X=i | Y=1\}, i=1, 2, 3.$

例 3 设 (X, Y) 的分布律为

$\begin{array}{c} Y \\ \backslash X \end{array}$	0	1
0	a	b
1	c	0.5

已知 $P\{Y=1 | X=0\} = \frac{1}{2}, P\{X=1 | Y=0\} = \frac{1}{3}$, 则 ()

(A) $\begin{cases} a=0.1, \\ b=0.2, \\ c=0.2. \end{cases}$

(B) $\begin{cases} a=0.2, \\ b=0.1, \\ c=0.2. \end{cases}$

(C) $\begin{cases} a=0.2, \\ b=0.2, \\ c=0.1. \end{cases}$

(D) $\begin{cases} a=0.3, \\ b=0.1, \\ c=0.1. \end{cases}$

例 4 从1, 2, 3三个数字中一次任取两数, 记第一个数为 X , 第二个数为 Y , 令 $\xi = \max(X, Y)$ 和 $\eta = \min(X, Y)$, 试求

(I) (X, Y) 的分布律及其边缘分布;

(II) (ξ, η) 的分布及其边缘分布.



考
研
斯
基

例 5 设随机变量 X_i 服从分布

X_i	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$i=1,2$, 且 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$, 则 $P\{X_1 = X_2\} =$ _____

例 6 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布,

令

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & X - Y > 0, \\ 0, & X - Y \leq 0, \end{cases} Z_2 = \begin{cases} 1, & X + Y > 0 \\ 0, & X + Y \leq 0 \end{cases}$$

求: 二维随机变量 (Z_1, Z_2) 的分布律及边缘分布.

例 7 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 ()

(A) $F^2(x)$.

(B) $F(x)F(y)$.

(C) $1 - [1 - F(x)]^2$.

(D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$.

例 8 设随机变量 $X_i (i=1, 2, 3, 4)$ 相互独立, 均服从分布 $B(1, \frac{1}{2})$, 则行列式

$X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布为 _____

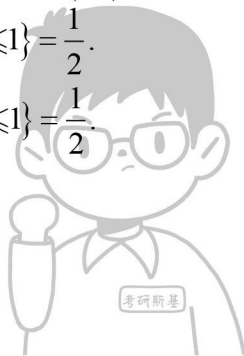
例 9 设相互独立随机变量 X 与 Y 分别服从 $N(0, 1)$ 和 $N(1, 1)$, 则 ()

(A) $P\{X + Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$.

(B) $P\{X + Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$.

(C) $P\{X - Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$.

(D) $P\{X - Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$.



例 10 设两随机变量 X 与 Y 相互独立同分布, 且 $P\{X = -1\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}$, 则有

()

(A) $P\{X = Y\} = \frac{1}{2}$.

(B) $P\{X = Y\} = 1$.

(C) $P\{X + Y = 0\} = \frac{1}{4}$.

(D) $P\{XY = 1\} = \frac{1}{4}$.

例 11 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 则 $P\{\max(X, Y) \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$

例 12 设二维随机变量 (X, Y) 在 xOy 平面上由曲线 $y = x$ 与 $y = x^2$ 所围成的区域上服从均匀分布, 则概率 $P\left\{0 < X < \frac{1}{2}, 0 < Y < \frac{1}{2}\right\} = \underline{\hspace{2cm}}$

例 13 设 $(X, Y) \sim N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $P\{X < Y\} = \underline{\hspace{2cm}}$

例 14 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(I) 求 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 并判断 X, Y 是否独立;

(II) 求 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$.

例 15 设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 内服从均匀分布, 在 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 内服从均匀分布, 求:

(I) X 和 Y 的联合概率密度;

(II) Y 的概率密度; [公众号: 考研斯基]

(III) 概率 $P\{X + Y > 1\}$.



例 16 设 X 与 Y 相互独立, 且均服从参数为 λ 的泊松分布, 则 $Z = X + Y$ 服从的分布为_____

例 17 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求: (I) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(II) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$;

(III) $P\left\{Y \leq \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{1}{2}\right\}$.

例 18 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X = i\} = \frac{1}{3} (i = -1, 0, 1)$, Y

的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

记 $Z = X + Y$. [公众号: 考研斯基]

(I) 求 $P\left\{Z \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right\}$;

(II) 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

例 19 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = Ae^{-2x^2 + 2xy - y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$, 求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

例 20 设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 是由 $x - y = 0$, $x + y = 2$ 与 $y = 0$ 所围成的三角形区域.

(I) 求 X 的概率密度 $f_X(x)$;

(II) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.



第四章 数字特征

考试要求	理解	随机变量数字特征(数学期望、方差、标准差、矩、协方差、相关系数).
	掌握	常用分布的数字特征.
	会	运用数字特征的基本性质, 求随机变量函数的数学期望.

一、随机变量的数学期望

1、数学期望

(1) 离散型

设随机变量 X 的概率分布为[公众号: 考研斯基]

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称此级数为随机变量 X 的数学期望或均值, 记作 $E(X)$, 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

(2) 连续型

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛, 则称此积分为随机变量 X 的数学期望或均值, 记作 $E(X)$, 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

2、数学期望的性质

(1) 设 C 是常数, 则有 $E(C) = C$.

(2) 设 X 是随机变量, C 是常数, 则有 $E(CX) = CE(X)$.

(3) 设 X 和 Y 是任意两个随机变量, 则有 $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$.

(4) 设 X 与 Y 是任意两个随机变量, 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$.

【注】 $E(XY) = E(X)E(Y)$ 成立的充要条件是 X 与 Y 不相关.

考
研
斯
基



3、函数的数学期望 $Y = g(X)$

X 是离散型	X 是连续型
$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots,$ $E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$ 绝对收敛	$X \sim f(x)$ $E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$ 绝对收敛

4、函数的数学期望 $Z = g(X, Y)$

(X, Y) 是离散型	(X, Y) 是连续型
$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots,$ $E(Z) = E[g(X, Y)] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$ 绝对收敛	$(X, Y) \sim f(x, y)$ $E(Z) = E[g(X, Y)]$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$ 绝对收敛

二、随机变量的方差

1、方差

$$D(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 \quad [\text{公众号：考研斯基}]$$

2、方差的性质

① 设 C 为常数, 则 $D(C) = 0$. 反过来, 从 $D(X) = 0$ 并不能得出 X 为常数的结论.

② 设 X 是随机变量, a 和 b 是常数, 则有 $D(aX + b) = a^2 D(X)$, $D(-X) = D(X)$.

③ 设 X 与 Y 是任意两个随机变量, 则 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

【注】 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ 成立的充要条件是 X 和 Y 不相关.

3、常用随机变量的数学期望和方差

分布名称	符号	期望 $E(X)$	方差 $D(X)$
二项分布	$X \sim B(n, p)$	np	$np(1-p)$

泊松分布	$X \sim P(\lambda)$	λ	λ
均匀分布	$X \sim U(a, b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$X \sim E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2

4、协方差

(1) 协方差的定义

对于随机变量 X 和 Y , 如果 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 存在, 则称之为 X 和 Y 的协方差, 记作 $\text{Cov}(X, Y)$, 即

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} \\ &= E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

(2) 协方差的性质

- ① $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$.
- ② $\text{Cov}(aX, bY) = ab\text{Cov}(X, Y)$, 其中 a, b 是常数.
- ③ $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$.
- ④ $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$.

5、相关系数

(1) 定义

随机变量 X 和 Y , 如果 $D(X)D(Y) \neq 0$, 则称 $\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为 X 和 Y 的相关系数, 记为 ρ_{XY} , 即 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{E(X-EX)(Y-EY)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$.

如果 $D(X)D(Y) = 0$, 则 $\rho_{XY} = 0$. $\rho_{XY} = 0$ 称 X 和 Y 不相关. [公众号: 考研斯基]

(2) 性质

- ① $|\rho_{XY}| \leq 1$;
- ② $|\rho_{XY}| = 1$ 的充分必要条件是存在常数 a 和 b , 其中 $a \neq 0$, 使得 $P\{Y = aX + b\} = 1$.



考
研
斯
基

本章小结

1. $E(X), D(X), Cov(X, Y), \rho_{xy}$ 定义, 性质, 计算

2. B, P, U, E, N 的 $E(X), D(X)$

3. $P\{g(X, Y) \leq z\} = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

三、典型例题

例 1 将一均匀骰子独立地抛掷三次, 求掷得的三点数之和 X 的数学期望 $EX =$ _____

例 2 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = E(X^2)\} =$ _____

例 3 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $EX =$ _____

例 4 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{DX}\} =$ _____

例 5 商店经销某种商品, 每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量, 且都在区间 $[10, 20]$ 上服从均匀分布. 商店每售出一单位商品可得利润 1000 元; 若需求量超过了进货量, 商店可从其他商店调剂供应, 这时每单位商品获利为 500 元, 试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.



例 6 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, 则 $E(Xe^{2X}) = \underline{\hspace{2cm}}$

例 7 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 EX 与 EY 存在, 记 $U = \max\{X, Y\}$ 和 $V = \min\{X, Y\}$, 则 $E(UV) = (\quad)$

- (A) $EU \cdot EV$. (B) $EX \cdot EY$.
(C) $EU \cdot EY$. (D) $EX \cdot EV$.

例 8 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从参数为 1 的指数分布, 记 $U = \max\{X, Y\}$, $V = \min\{X, Y\}$.

- (I) 求 V 的概率密度 $f_V(v)$;
(II) 求 $E(U+V)$.

例 9 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2} + Bx}, -\infty < x < +\infty,$$

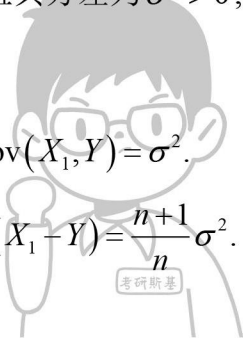
其中 A, B 为常数, 已知 $E(X) = D(X)$, 试求 A, B 和 $E(X)$.

例 10 设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1), (1,0), (1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布, 试求随机变量 $U = X+Y$ 的方差.

例 11 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$, 令

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ 则 } (\quad)$$

- (A) $\text{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$. (B) $\text{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2$.
(C) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$. (D) $D(X_1 + Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2$.



例 12 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$$

(I) 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

(II) 求 X 与 $|X|$ 的协方差, 并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?

(III) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立? 为什么?

例 13 设随机变量 (X, Y) 在 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 内服从均匀分布, 则 X 和 Y 的相关系数

$\rho_{XY} =$ _____

例 14 已知随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N\left(1, 0; 9, 16; -\frac{1}{2}\right)$, 设 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$.

(I) 求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$;

(II) 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ} ;

(III) 问 X 与 Z 是否相互独立? 为什么?

例 15 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$, 则随机变量

$\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 相互独立的充要条件是 ()

(A) $\mu_1 = \mu_2$.

(B) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

(C) $E(X^2) = E(Y^2)$.

(D) $\rho = 0$.

例 16 将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 X 和 Y 的相关系数等于 ()

(A) -1 .

(B) 0 .

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 1 .

例 17 已知随机变量 X 的分布 $P\{X=k\} = \frac{c}{2^k k!}, k=0, 1, 2, \dots$, 其中 c 为常数, 则随机变量 $Y = 2X - 3$ 的 $DY =$ _____.



例 18 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$. 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生,} \\ 0, & A \text{ 不发生,} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生,} \\ 0, & B \text{ 不发生.} \end{cases}$$

求(I) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} ;

(III) $Z = X^2 + Y^2$ 的概率分布.

例 19 设随机变量 X 概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

令 $Y = X^2$, $F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数,

求(I) Y 的概率密度 $f_Y(y)$; [公众号: 考研斯基]

(II) $\text{Cov}(X, Y)$;

(III) $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$.

考
研
斯
基



第五章 大数定律和中心极限定理

考 试 要 求	了解	切比雪夫不等式,切比雪夫大数定律、伯努利大数定律和辛钦大数定律棣莫弗—拉普拉斯定理和列维—林德伯格定理.
	会	用相关定理近似计算有关随机事件的概率.(仅数学三)

一、切比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 存在,则对任意的 $\varepsilon > 0$,总有

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

这个不等式称为切比雪夫不等式.[微信公众号：考研斯基]

二、依概率收敛

设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是一个随机变量序列, A 是一个常数,如果对任意 $\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - A| < \varepsilon\} = 1,$$

则称随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 依概率收敛于常数 A , 记作 $X_n \xrightarrow{P} A$.

三、大数定律

1、切比雪夫大数定律

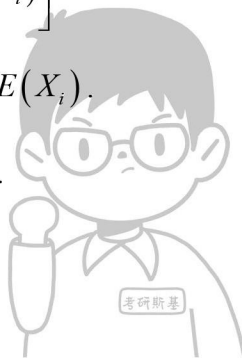
设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为两两不相关的随机变量序列, 存在常数 C , 使 $D(X_i) \leq C (i=1, 2, \dots)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

简化: ① X_i 不相关, 方差有界, 则 $\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right] \xrightarrow{P} 0$.

② X_i 不相关, 方差有界, 则 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$.

③ X_i 不相关, 方差有界, 则 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} E(\quad)$.



2、辛钦大数定律

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, 具有数学期望 $E(X_i) = \mu, i=1, 2, \dots$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

简化: X_i 独立同分布, 期望存在, 则 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} E(\quad)$.

3、伯努利大数定律

设随机变量 $X_n \sim B(n, p), n=1, 2, \dots$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 有[微信公众号：考研斯基]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{X_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

或者: $X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, Y_i \sim B(1, p)$, 有 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} E(\quad) = p$.

4、列维—林德伯格中心极限定理

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, 具有数学期望与方差, $E(X_n) = \mu$, $D(X_n) = \sigma^2, n=1, 2, \dots$, 则对于任意实数 x , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

简化: ① X_i 独立同分布, $D(X_n) = \sigma^2, E(X_n) = \mu$, 则 $P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x \right\} \approx \Phi(x)$.

② X_i 独立同分布, $D(X_n) = \sigma^2, E(X_n) = \mu$, 则 $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \approx N(0, 1)$.

③ X_i 独立同分布, $D(X_n) = \sigma^2, E(X_n) = \mu$, 则 $\sum_{i=1}^n X_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$.

④ X_i 独立同分布, 方差存在, 则 $\sum_{i=1}^n X_i \approx N(\quad, \quad)$.



5、棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理

设随机变量 $X_n \sim B(n, p) (n=1, 2, \dots)$, 则对于任意实数 x , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \Phi(x)$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态的分布函数.

6、总结

切比雪夫不等式	$P\{ X - E(X) \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$
切比雪夫大数定律	X_i 不相关, 方差有界, 则 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} E(\quad).$
辛钦大数定律	X_i 独立同分布, 期望存在, 则 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} E(\quad).$
列维—林德伯格中心极限定理	X_i 独立同分布, 方差存在, 则 $\sum_{i=1}^n X_i \approx N(\quad, \quad).$

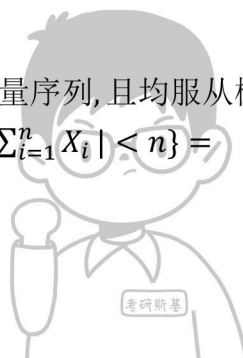
四、典型例题

例 1 设随机变量 X 的方差为 2, 则根据切比雪夫不等式有估计 [微信公众号: 考研斯基]

$$P\{|X - E(X)| \geq 2\} \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

例 2 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数为 -0.5, 则根据切比雪夫不等式 $P\{|X + Y| \geq 6\} \leq \underline{\hspace{2cm}}$

例 3 设 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ 为独立同分布的随机变量序列, 且均服从概率密度 $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \lambda > 0, -\infty < x < +\infty$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\sum_{i=1}^n X_i| < n\} = \underline{\hspace{2cm}}$



例 4 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为独立同分布的随机变量序列, 且均服从参数为 $\lambda (\lambda > 1)$ 的指数分布, 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则有 ()

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

$$(D) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

例 5 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为独立同分布的随机变量序列, 其中 $P\{X_i = 0\} = P\{X_i = 1\} = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, \dots$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\}$ 的近似值为 ()

$$(A) 1 - \Phi(1).$$

$$(B) \Phi(1).$$

$$(C) 1 - \Phi(0.2).$$

$$(D) \Phi(0.2).$$



考
研
斯
基

第六章 数理统计的基本概念

数一 考试 要求	理解	总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差及样本矩.
	了解	χ^2 分布, t 分布和 F 分布及性质, 上侧 α 分位数及查表计算, 正态总体的常用抽样分布.

数三 考试 要求	掌握	正态总体的样本均值、样本方差、样本矩的抽样分布.
	了解	总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差及样本矩. 产生 χ^2 变量、 t 变量和 F 变量的典型模式, 标准正态分布、 χ^2 分布、 t 分布和 F 分布的上侧 α 分位数及查相应的数值表, 经验分布函数和性质.

一、总体、样本、统计量和样本数字特征

1、总体

数理统计中所研究对象的某项数量指标 X 的全体称为总体. 总体中的每个元素称为个体.

2、样本

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且都与总体 X 同分布, 则称 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 简称为样本.

若 X 的分布为 $F(x)$, 则样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的分布为

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i)$$

若 X 有密度 $f(x)$, 则样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的密度为

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

若 X 的分布 $P\{X = a_j\} = p_j, j = 1, 2, \dots$, 则样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的分布为

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i\}$$

其中 x_i 取 $a_1, a_2, \dots$ 中的某一个数. [公众号: 考研斯基]

3、统计量

样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的不含未知参数的函数 $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为统计量. 如果 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的样本值, 则数值 $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为统计 $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的观测值.

4、样本的数字特征

$$(1) \text{ 样本均值 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$(2) \text{ 样本方差 } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$(3) \text{ 样本标准差 } S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

5、样本数字特征的性质

$X, X_1, X_2, \dots, X_n, E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$ 则

$$(1) E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu = E(X).$$

$$(2) D(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n} D(X).$$

$$(3) E(S^2) = \sigma^2 = D(X).$$

二、常用统计抽样分布

1、 χ^2 分布

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且均服从标准正态分布 $N(0,1)$, 则称随机变量

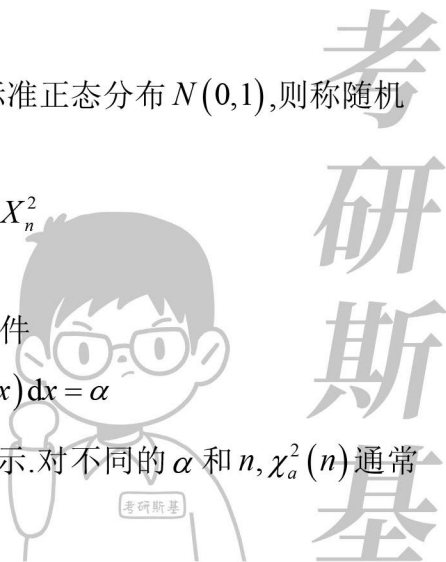
$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 记作 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 称满足条件

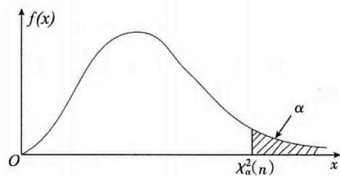
$$P\{\chi^2 > \chi_a^2(n)\} = \int_{\chi_a^2(n)}^{+\infty} f(x) dx = \alpha$$

的点 $\chi_a^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位点, 如下图所示. 对不同的 α 和 n , $\chi_a^2(n)$ 通常



通过查表求得.

设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 则 $E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.



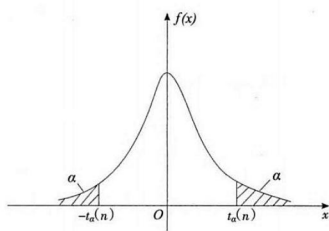
2、t 分布

设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, 则称随机变量

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为 n 的 t 分布, 记作 $T \sim t(n)$. [公众号: 考研斯基]

t 分布的概率密度 $f(x)$ 是偶函数, 即 $f(x) = f(-x)$, 且当 n 充分大时, $t(n)$ 分布近似于 $N(0,1)$ 分布.



3、F 分布

设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, 则称随机变量

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记作 $F \sim F(n_1, n_2)$, 其中 n_1 和 n_2 分别称为第一自由度和第二自由度.

如果 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$, 且有 $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2, n_1)}$.

4、一个正态总体的抽样分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体的样本, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2 , 则有:

① $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1);$

② $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立, 且 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1);$



$$\textcircled{3} T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1);$$

$$\textcircled{4} \chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n).$$

三、典型例题

例 1 设总体 $X \sim E(\lambda)$, 则来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合概率密度

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underline{\hspace{2cm}}$$

例 2 设总体 X 服从参数为 p 的 0-1 分布, 则来自总体 X 的简单随机样本

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 的概率分布为总体 X 的概率分布为 $\underline{\hspace{2cm}}$

例 3 设总体 $X \sim P(\lambda)$, 则来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的样本均值 $\bar{X}$ 的分布

律为 $\underline{\hspace{2cm}}$

例 4 已知 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 则 $E(\chi^2) = \underline{\hspace{2cm}}$

例 5 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的简单随机样本, 令 $\theta = \mu_1 - \mu_2, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}$, 则 ()

(A) $E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}.$

(B) $E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}.$

(C) $E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}.$

(D) $E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}.$



例 6 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本, 令

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}, \text{ 则 ()}$$

(A) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n).$

(B) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$

(C) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n)$

(D) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n-1).$

例 7 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差, 则 ()

(A) $n\bar{X} \sim N(0, 1).$

(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$

(C) $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$

(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1).$

例 8 设 X_1, X_2 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2), \sigma > 0$ 的简单随机样本, 则统计量

$$Y = \left(\frac{X_1 + X_2}{X_1 - X_2} \right)^2 \text{ 服从分布 ()}$$

(A) $N(0, 1).$

(B) $\chi^2(1).$

(C) $t(1).$

(D) $F(1, 1).$

例 9 已知 X_1, X_2, X_3 相互独立且服从 $N(0, \sigma^2)$, 证明

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{X_1 + X_2 + X_3}{|X_2 - X_3|} \sim t(1)$$



考
研
斯
基

例 10 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其样本方差为 S^2 , 则 $D(S^2) =$

例 11 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$. 求 (I) $E(Y)$; (II) $D(Y)$. [公众号: 考研斯基]

考
研
斯
基



第七章 参数估计

数一 考试 要求	理解	参数的点估计、估计量与估计值、区间估计.
	了解	估计量的无偏性、有效性和一致性.
	掌握	矩估计法（一阶、二阶矩）和最大似然估计法.
	会	验证估计量的无偏性、求单个正态总体的均值和方差的置信区间、求两个正态总体的均值差和方差比的置信区间.

数三 考试 要求	掌握	矩估计法（一阶、二阶矩）和最大似然估计法.
	了解	参数点估计、估计量与估计值.

一、基础知识

1、点估计

用样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 构造的统计量 $\theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 来估计未知参数 θ 称为点估计, 统计量 $\theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为估计量.

估计量是随机变量, 它所取得的观测值 $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为估计值. 有时将 θ 的估计量和估计值统称为 θ 的估计.

2、无偏估计量（数一要求）

设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量, 如果 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta} = \theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是未知参数 θ 的无偏估计量. [公众号：考研斯基]

更有效估计（数一要求）

设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计量, 且 $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效, 或 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效估计量.

一致估计量（数一要求）

设 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 θ 的估计, 如果 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ , 则称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 θ 的一致估计量.



3、矩估计

用样本矩估计相应的总体矩, 用样本矩的函数估计总体矩相应的函数, 然后求出要估计的参数, 称这种估计法为矩估计法.

设总体 X 的分布含有未知参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \alpha_l = E(X^l)$ 存在, 显然它是 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ 的函数, 记作 $\alpha_l(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k), l=1, 2, \dots, k$. 样本的 l 阶原点矩为 $A_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^l$. 令 $\alpha_l(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = A_l, l=1, 2, \dots, k$

从这 k 个方程组中, 可以解得 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$. 矩估计法不需要知道总体的具体分布数学形式, 只要知道各阶矩存在.

如果不用原点矩, 而用中心矩也可以求解: 用样本中心矩等于总体中心矩来建立方程组. 求 k 个参数的估计一般就列出一阶矩到 k 阶矩的方程. 考试大纲只要求最多两个参数的估计, 故一般最多两个方程.

设 $g(\alpha_1, \alpha_2)$ 是一阶矩 α_1 和二阶矩 α_2 的函数, 而 $\hat{\alpha}_1$ 和 $\hat{\alpha}_2$ 分别为 α_1 和 α_2 的矩估计, 则 $g(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$, 就是 $g(\alpha_1, \alpha_2)$ 的矩估计.

4、最大似然估计法

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是样本值, θ 是待估参数.

(1) 参数的 θ 似然函数

① 对于离散型总体 X , 概率分布为 $P\{X = a_i\} = p(a_i; \theta), i=1, 2, \dots$:

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta).$$

② 对于连续型总体 X , 概率密度为 $f(x; \theta)$:

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta).$$

(2) 最大似然估计法

对于给定的样本值 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使似然函数 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ 达到最大值的参数值 $\theta = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为未知参数 θ 的最大似然估计值, 相应的使似然函数 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ 达到最大值的参数值 $\theta = \theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为 θ 的最大似然估计量. 一般统称为 θ 的最大似然估计. 称这种估计法为最大似然估计法.



(3) 最大似然估计法的步骤

如果 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 可微, 值 θ 往往可以从方程

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0 \text{ 或 } \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 0$$

中求解, 称这两个方程为似然方程.

如果要估计的参数是两个, θ_1 和 θ_2 , 则得似然方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0, \\ \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0, \\ \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0. \end{cases}$$

解这两个方程组, 可以得到 θ_1 和 θ_2 .

有时, 使 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 达到最大值的 θ 不一定是 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 的驻点, 这时不能用似然方程来求解, 应采用其他方法求最大似然估计.

5、区间估计 (数一要求)

(1) 置信区间

设 θ 是总体 X 的未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 对于给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 如果两个统计量满足

$$P\{\theta_1 < \theta < \theta_2\} = 1 - \alpha$$

则称随机区间 (θ_1, θ_2) 为参数 θ 的置信水平 (或置信度) 为 $1 - \alpha$ 的置信区间 (或区间估计), 简称为 θ 的 $1 - \alpha$ 置信区间, θ_1 和 θ_2 分别称为置信下限和置信上限.

(2) 一个正态总体参数的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, $\bar{X}$ 是样本均值, S^2 是样本方差. 下表列出了 μ 和 σ^2 的 $1 - \alpha$ 置信区间. [公众号: 考研斯基]

未知参数		$1 - \alpha$ 置信区间
μ	σ^2 已知	$\left(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$
	σ^2 未知	$\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$

σ^2	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right)$
------------	---

二、典型例题

例 1 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差, 记统计量 $T = \bar{X} - S^2$, 则 $ET =$ _____

例 2 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____

例 3 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 均未知. 现从中随机抽取 16 个零件, 测得样本均值 $\bar{x} = 20(\text{cm})$, 样本标准差 $S = 1(\text{cm})$, 则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是 ()

(A) $(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(16))$.

(B) $(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(16))$.

(C) $(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(15))$.

(D) $(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(15))$.

例 4 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2$$

(I) 求 ET ;

(II) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 求 DT . [公众号: 考研斯基]



考
研
斯
基

例 5 设总体 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=\frac{1-\theta}{2}, P\{X=2\}=P\{X=3\}=\frac{1+\theta}{4}$, 利用来自总体的样本值 1,3,2,2,1,3,1,2, 可得 θ 的最大似然估计值为 ()

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{3}{8}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{5}{8}$.

例 6 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求

(I) θ 的矩估计量;

(II) θ 的最大似然估计量.

例 7 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0,1)$ 未知, 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 ($i=1,2,3$). 试求常数 a_1, a_2, a_3 , 使 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差. [公众号: 考研斯基]

例 8 某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的, 设 n 次测量结果 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu|$ ($i=1,2,\dots,n$), 利用 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 估计 σ .

(I) 求 Z_1 的概率密度;

(II) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(III) 求 σ 的最大似然估计量.



考
研
斯
基