

强化分题型答案册

(数学一)



微信公众号：小松学长

目录

第一部分 高等数学	4
第一章 函数、极限、连续	4
一、求函数的极限	4
二、求数列的极限	5
三、确定极限中的参数	7
四、无穷小量及其阶的比较	8
五、函数连续性及其间断点的类型	10
第二章 一元函数微分学	11
一、导数与微分的概念	11
二、导数与微分计算	13
三、导数的几何意义	14
四、函数的单调性、极值与最值	15
五、曲线的凹向、拐点、渐近线	16
六、证明函数不等式	17
七、方程根的存在性与个数	19
八、微分中值定理有关的证明题	20
第三章 一元函数积分学	22
一、不定积分的计算	22
二、定积分的概念、性质及几何意义	23
三、定积分的计算	25
四、变上限积分函数及其应用	26
五、与定积分有关的证明题	28
六、反常积分的概念与计算	30
七、定积分的应用	32
第四章 向量代数和空间解析几何	34
一、求旋转面的方程	34
第五章 多元函数的微分学	35
一、求多元函数的偏导数及全微分	35
二、求多元函数的极值	36
三、反问题	37
四、求方向导数与梯度	38
五、多元函数微分学的几何应用	39
第六章 重积分	41
一、基本概念及性质	41
二、二重积分的基本计算	42
三、交换积分次序及坐标系	44
四、三重积分的计算	45
五、重积分的应用	47
第七章 曲线、曲面积分	48

一、第一类曲线积分的计算	48
二、第二类曲线积分的计算	49
三、平面曲线积分与路径无关的问题	50
四、第一类曲面积分的计算	52
五、第二类曲面积分的计算	53
第八章 无穷级数	57
一、数项级数敛散性的判定	57
二、求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域	59
三、求幂级数的和函数及数项级数的和	60
四、傅里叶级数	62
第九章 常微分方程	64
一、一阶微分方程	64
二、高阶常系数线性微分方程的求解	65
第二部分 线性代数	67
第一章 行列式	67
一、数字型行列式的计算	67
二、抽象型行列式的计算	68
第二章 矩阵	71
一、矩阵运算、初等变换	71
二、伴随矩阵、可逆矩阵	72
三、矩阵的秩	74
第三章 向量	77
一、向量的线性表出	77
二、向量组的线性相关和线性无关	78
三、向量组的极大线性无关组与秩	79
四、向量组的正交	81
五、向量空间	82
第四章 线性方程组	85
一、齐次方程组、基础解系	85
二、非齐次方程组的求解	86
三、公共解与同解	89
第五章 特征值与特征向量	91
一、特征值、特征向量的概念与计算	91
二、相似与相似对角化	92
三、关于相似时可逆矩阵	94
四、实对称矩阵	99
第六章 二次型	101
一、二次型的概念与标准形	101
第三部分 概率论与数理统计	106
第一章 随机事件和概率	106

一、事件关系、概率性质和五大公式	106
第二章 随机变量及其分布	108
第三章 多维随机变量及其分布	111
一、 (X,Y) 的概率分布, X 与 Y 相互独立性	111
二、二维随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布	112
三、条件分布与条件概率密度	115
第四章 随机变量的数字特征	118
一、数学期望与方差	118
二、协方差	121
三、相关系数	123
第五章 大数定律和中心极限定理	126
第六章 数理统计的基本概念	128
第七章 参数估计	129
一、参数的矩估计和最大似然估计	129
二、无偏估计量与置信区间	133
第八章 假设检验	136

小松学长

微信公众号【小松学长】

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续

一、求函数的极限

例 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+x^2+1}{e^x+x^3}(\sin x + \cos x) =$ [公众号: 小松学长]

【2023 李 880 题 · 数学一 · P2 第 5 题】

解:

(5)0.

解 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+x^2+1}{e^x+x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+2x}{e^x+3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+2}{e^x+6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x+6} = 0$,

而 $|\sin x + \cos x| \leq 2$, 即有界, 故原式 $= 0$.

【注】当 $x \rightarrow +\infty$ 时, e^x 是比 x^3 高阶的无穷大, 则立即可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+x^2+1}{e^x+x^3} = 0.$$

例 2. $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}) =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P6 第 5 题】

解:

5 【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析】方法 1 $\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5} = x(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}} - 1) - x(\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}} - 1)$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}} - 1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}} - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \times \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{x} \right) \right] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

【评注】这里先作恒等变形后利用了等价无穷小因子代换:

$$(1+t)^a - 1 \sim at \quad (t \rightarrow 0).$$

方法 2 这是求 $\infty - \infty$ 型的极限, 先转化为 $\frac{0}{0}$ 型极限, 然后再用洛必达法则.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}} - \sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \\ &\stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^{\frac{1}{6}} - (1-t)^{\frac{1}{6}}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{6}(1+t)^{-\frac{5}{6}} + \frac{1}{6}(1-t)^{-\frac{5}{6}} \right] \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

例 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \arctan \frac{1}{x} \right)^{x^2} =$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P106 第 15 题】

解:

15. (答案) $e^{-\frac{1}{3}}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \arctan \frac{1}{x} \right)^{x^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\arctan t - t}{t} \right)^{\frac{t}{\arctan t - t}} \right]^{\frac{\arctan t - t}{t^3}} \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t - t}{t^3}} = e^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

二、求数列的极限

例 4. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ 的连续性

【2023 李 880 题 · 数学一 · P3 第 8 题】

解:

(8) 解 先求极限得到 $f(x)$ 的表达式, 再讨论 $f(x)$ 的连续性.
当 $x \neq 0$ 时, 有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2} - 1}{x^{2n} + 1} = \begin{cases} -1, & 0 < |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ x^2, & |x| > 1, \end{cases}$$

故在 $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, +\infty)$ 内 $f(x)$ 连续. 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0, \pm 1$ 处间断, 是第一类间断点, 其中 $x = 0$ 是可去间断点.

例 5. 数列极限 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1} \right) =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P8 第 12 题】

解:

12 【答案】 2【分析】 方法1 这是 $\infty \cdot 0$ 型的数列极限, 转化为求 $\frac{0}{0}$ 型的函数极限, 然后用洛必达法则.

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n(1 + \frac{1}{n})}}{\frac{1}{n^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan 2x - \arctan \frac{2x}{1+x}}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1+x)^2}} \cdot \frac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2}}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^2 - 1}{x(1+4x^2)((1+x)^2 + 4x^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2+x}{(1+4x^2)((1+x)^2 + 4x^2)} = 2.
 \end{aligned}$$

方法2 这是 $\infty \cdot 0$ 型极限, 为简化计算设法寻求 $\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1}$ 的等价无穷小, 它是 $f(x) = \arctan x$ 的改变量 $f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n+1}\right)$. 由拉格朗日中值定理, 它可改写成

$$\begin{aligned}
 \arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1} &= f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n+1}\right) = f'(\xi) \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) \\
 &= \frac{1}{1+\xi^2} \cdot \frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{2}{n(n+1)} \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

其中 $\frac{2}{n+1} < \xi < \frac{2}{n}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{1+\xi^2} \rightarrow 1$.

因此, $I = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{2}{n(n+1)} = 2$.

【评注】 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

求形如

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n [f(y_n) - f(z_n)]$$

的数列极限 ($\infty \cdot 0$ 型), 可考虑用拉格朗日中值定理, 转化为求

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n (y_n - z_n) \cdot f'(\xi_n)$$

其中 ξ_n 在 y_n 与 z_n 之间.

例6. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n+1)} = 1$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P109 第 16 题】

解:

16. **证明** 当 $x \in [1, 2]$ 时, 有 $1 \geq \frac{1}{x}$, 则 $1 \geq \int_1^2 \frac{1}{x} dx$,

当 $x \in [2, 3]$ 时, 有 $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x}$, 则 $\frac{1}{2} \geq \int_2^3 \frac{1}{x} dx$,

$\vdots$

当 $x \in [n, n+1]$ 时, 有 $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x}$, 则 $\frac{1}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$,

从而有 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1)$.

又当 $x \in [1, 2]$ 时, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x}$, 则 $\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx$,

当 $x \in [2, 3]$ 时, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x}$, 则 $\frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{1}{x} dx$,

$\vdots$

当 $x \in [n-1, n]$ 时, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{x}$, 则 $\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx$,

从而有 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n$,

故 $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n$, 于是 $1 \leq \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n+1)} \leq \frac{1 + \ln n}{\ln(n+1)}$,

由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n+1)} = 1$.

三、确定极限中的参数

例 7. 设 $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 - \tan x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则 $a + b + c + d =$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P2 第 7 题】

解:

$$(7) \frac{4}{3}.$$

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 - \left[x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + (b-1)x + cx^2 + \left(d - \frac{1}{3} \right)x^3 + o(x^3)}{x^3} = 0, \end{aligned}$$

由上式可得, $a = 0, b = 1, c = 0, d = \frac{1}{3}$, 故 $a + b + c + d = \frac{4}{3}$.

例 8. 设 a, b 为常数, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^6} - ax^2 - b) = 0$, 则 $a =$, $b =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P10 第 17 题】

解:

17 【答案】 $-1, 0$

【分析】 由泰勒展开, 当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\sqrt[3]{1-x^6} = -x^2 \left(1 - \frac{1}{x^6}\right)^{\frac{1}{3}} = -x^2 \left(1 - \frac{1}{3x^6} + o(x^{-6})\right),$$

所以 $a = -1, b = 0$.

例 9. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - e^{bx} + \cos x}{x^2} = -\frac{9}{2}$, 求 a, b 的值

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P109 第 13 题】

解:

13. 解 由 $\ln(1+ax) = ax - \frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2)$, $e^{bx} = 1 + bx + \frac{b^2 x^2}{2} + o(x^2)$,

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ 得

$$\ln(1+ax) - e^{bx} + \cos x = (a-b)x - \frac{a^2 + b^2 + 1}{2}x^2 + o(x^2),$$

于是由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - e^{bx} + \cos x}{x^2} = -\frac{9}{2}$ 得 $\begin{cases} a-b=0, \\ -\frac{a^2 + b^2 + 1}{2} = -\frac{9}{2}, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-2, \\ b=-2. \end{cases}$

四、无穷小量及其阶的比较

例 10. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷大 (B) 无穷小 (C) 有界但非无穷小 (D) 无界但非无穷大

【2023 李 880 题 · 数学一 · P1 第 5 题】

解:

(5) D.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$, $\sin \frac{1}{x}$ 在 -1 和 1 之间振荡, 且重复函数值为零, 故可排除 A, B.

取 $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} (n = 1, 2, \dots)$, 则当 $x_n \rightarrow 0$ 时, $f(x_n) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi^2 \rightarrow \infty$, 故

$\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} (x \rightarrow 0)$ 不是无穷小, 也不是有界量.

令 $y_n = \frac{1}{n\pi} (n = 1, 2, \dots)$, 当 $y_n \rightarrow 0$ 时, $f(y_n) = 0$, 故当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 不是无穷大.

例 11. 设 $f(x)$ 连续, $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 是 $x - a$ 的 n 阶无穷小, 则 $x \rightarrow a$ 时 $\int_a^x f(t) dt$ 是 $x - a$ 的 _____ 阶无穷小 (填阶数)

【2023 李 660 题 · 数学一 · P11 第 20 题】

解:

20 【答案】 $n + 1$

【分析】 已知 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = A \neq 0 (\exists)$, 求正数 k 使得 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{(x-a)^k} \exists \neq 0$.

这是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 用洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{(x-a)^k} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{k(x-a)^{k-1}} \xrightarrow{\text{取 } k = n+1} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(n+1)(x-a)^n} \\ &= \frac{A}{n+1} \neq 0 (\exists) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_a^x f(t) dt$ 是 $(x-a)$ 的 $(n+1)$ 阶无穷小.

例 12. 设 $f(x) = \int_0^x dt \int_0^t t \ln(1+u^2) du$, $g(x) = \int_0^{\sin x^2} (1 - \cos t) dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小 (C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价的无穷小

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P107 第 4 题】

解:

44 【答案】 (A)

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x \ln(1+u^2) du}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+u^2) du}{n x^{n-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{n(n-2)x^{n-3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-2)x^{n-5}} = 1, \end{aligned}$$

得 $n=5$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim \frac{1}{15}x^5$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x^2 [1 - \cos(\sin^2 x^2)]}{m x^{m-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x^2}{m x^{m-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{m x^{m-6}} = 1,$$

得 $m=6$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \sim \frac{1}{6}x^6$, 故当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小, 选 (A).

五、函数连续性及间断点的类型

例 13. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P2 第 3 题】

解:

(3) - 2.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2ax} - 1}{x} = 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax}{x} = 2 + 2a.$$

又由函数连续的定义, 可得 $2 + 2a = a$, 解得 $a = -2$.

例 14. 设 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-b)}$ 有无穷间断点 $x = e$, 可去间断点 $x = 1$, 则 $(a, b) =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P12 第 24 题】

解:

24 【答案】 (1, e)

【分析】 $f(x)$ 只有间断点 $x = a, x = b$.

当 $a = 1, b = e$ 时

$$f(x) = \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} = \frac{1}{1-e} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1} = \frac{e}{1-e},$$

$x = 1$ 为可去间断点.

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} = \infty$$

$x = e$ 为无穷间断点.

当 $a = e, b = 1$ 时

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{(x-e)(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow e} f(x) = \infty.$$

$x = 1, x = e$ 均为无穷间断点. 因此, $(a, b) = (1, e)$.

例 15. 设 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$, 求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P110 第 23 题】

解:

23. 解 $f(x)$ 的间断点为 $x = k\pi (k=0, \pm 1, \dots)$ 及 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \dots)$.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$, 所以 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点;

因为 $\lim_{\substack{x \rightarrow k\pi \\ k \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow k\pi \\ k \neq 0}} \frac{x}{\tan x} = \infty$, 所以 $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点;

因为 $\lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0$, 所以 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \dots)$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

第二章 一元函数微分学

一、导数与微分的概念

例 1. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 \cdot \varphi(x), & x \leq 0 \end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

- (A) 可导 (B) 连续, 但不可导 [公众号: 小松学长]
(C) 极限存在, 但不连续 (D) 极限不存在

【2023 李 880 题 · 数学一 · P7 第 1 题】

解:

(1) A.

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \cdot \varphi(x) = 0, \end{aligned}$$

而 $f(0) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}} = 0, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2\varphi(x)}{x} = 0, \end{aligned}$$

故 $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$, 所以 $f'(0) = 0$, A 正确.

例 2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+bx)}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$, 其中 b 为某常数, $f(x)$ 在定义域上处处可导, 则

$f'(x) =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P13 第 27 题】

解:

27

【答案】

$$\begin{cases} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}, & -\infty < x < 1, x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

【分析】 首先由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续确定 b 值:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x} = b = f(0) = -1$$

$$\Rightarrow b = -1.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x}, & -\infty < x < 1, x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

 $x \neq 0$ 时

$$f'(x) = \frac{\frac{-x}{1-x} - \ln(1-x)}{x^2} = \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)} \quad (-\infty < x < 1, x \neq 0)$$

下求 $f'(0)$.方法 1 按定义求 $f'(0)$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1-x)}{x} + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{1-x} + 1}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1 + 1 - x}{2x} \cdot \frac{1}{1-x} \right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

或用泰勒公式

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

方法 2 在连续的条件下求 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 在 $x=0$ 空心邻域可导, 于是

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \frac{1-x}{1-x} + \ln(1-x)}{2x} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

因此

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}, & -\infty < x < 1, x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

小松学长

微信公众号

小松学长

【评注】 求形如 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0 \\ A, & x = x_0 \end{cases}$ 分段函数在分段点处的导数时一般要用定义来求,或函数在分段点连续的条件下求导数的极限.即用下面定理求分段函数在分段点的导数:

(1) $f(x)$ 在 x_0 处连续; (2) $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内可导, (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 则

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

例 3. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处可微, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}, b = \underline{\hspace{1cm}}$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P111 第 14 题】

解:

【答案】 2, -1.

【解】 因为 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可微, 所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 于是 $f(1-0) = f(1) = 1 = f(1+0) = a + b$, 即 $a + b = 1$.

$$\text{又 } f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - 1}{x - 1} = a,$$

由 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可微得 $a = 2$, 所以 $a = 2, b = -1$.

二、导数与微分计算

例 4. 设 $f(x) = x(2x - 1)(3x - 2) \cdots (100x - 99)$, 则 $f'(0) =$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P9 第 14 题】

解:

$$(13) - 99!.$$

【解】 记 $u(x) = x, v(x) = (2x - 1)(3x - 2) \cdots (100x - 99)$, 则 $f(x) = u(x)v(x)$. 又 $u'(0) = 1, u(0) = 0, v(0) = -99!$, 故

$$f'(0) = u'(0)v(0) + u(0)v'(0) = -99!.$$

【注】 此题也可用导数定义计算.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1)(3x - 2) \cdots (100x - 99) = -99!.$$

例 5. 设 $f(x) = x^{\sin x} (x > 0)$, 则 $f'(x) =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P15 第 32 题】

解:

32 【答案】 $x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$

【分析】 $f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x}$,

$$f'(x) = e^{\sin x \cdot \ln x} (\sin x \cdot \ln x)' = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

例 6. 设函数 $y = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 满足 $f'(x) = \arctan\sqrt{x}$, 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} =$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P110 第 3 题】

解:

3. 【答案】 $-\frac{2\pi}{3}$.

解 由 $y = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 得

$$\frac{dy}{dx} = f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} \arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

于是 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = -2\arctan\sqrt{3} = -\frac{2\pi}{3}$.

三、导数的几何意义

例 7. 已知 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 在 $x = -2$ 处取得极值, 且与直线 $y = -3x + 3$ 相切于点 $(1, 0)$, 则

(A) $a = 1, b = -8, c = 6$

(B) $a = -1, b = -8, c = -6$

(C) $a = 1, b = 8, c = -6$

(D) $a = -1, b = 8, c = -6$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P8 第 16 题】

解:

(16) A.

解 由已知, $y'(-2) = 0, y'(1) = -3, y(1) = 0$, 即

$$\begin{cases} (x^3 + ax^2 + bx + c)' \Big|_{x=-2} = 0, \\ (x^3 + ax^2 + bx + c)' \Big|_{x=1} = -3, \\ (x^3 + ax^2 + bx + c) \Big|_{x=1} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 12 - 4a + b = 0, \\ 3 + 2a + b = -3, \\ 1 + a + b + c = 0, \end{cases} \text{解得 } a = 1, b = -8, c = 6.$$

例 8. 曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 2$ 垂直的切线方程为

【2023 李 660 题 · 数学一 · P16 第 36 题】

解:

36 【答案】 $y = x - 1$

【分析】 直线 $x + y = 2$ 的斜率为 $k_1 = -1$, 故与直线 $x + y = 2$ 垂直的切线的斜率为 $k_2 = 1$.

$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} = 1$, 解得 $x = 1$. 所以曲线 $y = \ln x$ 上 $x = 1$ 点处的切线与直线 $x + y = 2$ 垂直. 此时切线方程为 $y = x - 1$.

例 9. 设两曲线 $y = x^2 + ax + b$ 与 $-2y = -1 + xy^3$ 在点 $(-1, 1)$ 处相切, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}, b = \underline{\hspace{1cm}}$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P111 第 9 题】

解:

9. (答案) 3, 3.

解 因为两曲线过点 $(-1, 1)$, 所以 $b - a = 0$, 又由 $y = x^2 + ax + b$ 得 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=-1} = a - 2$,

再由 $-2y = -1 + xy^3$ 得 $-2 \frac{dy}{dx} \Big|_{x=-1} = 1 - 3 \frac{dy}{dx} \Big|_{x=-1}$, 且两曲线在点 $(-1, 1)$ 处相切, 则

$a - 2 = 1$, 解得 $a = b = 3$.

四、函数的单调性、极值与最值

例 10. 设 $k > 0$, 方程 $\ln x - \frac{x}{e} + k = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内不同实根的个数为

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

【2023 李 880 题 · 数学一 · P13 第 9 题】

解:

(9) C.

解 令 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex}$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = e$, 可知 $x = e$ 是 $f(x)$ 的最大值点, 最大值为 $f(e) = k$.

由 $k > 0$, 知当 $x \in (0, e)$ 时, $f(x)$ 单调增加; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调减少, 故函数 $f(x)$ 的图形与 x 轴有两个不同交点, 即方程有两个不同实根, C 正确.

例 11. 设 $f(0) = 0$, $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 为严格单调增函数, 则函数 $g(x) = \frac{1-f(x)}{x}$

在 $(0, +\infty)$

(A) 有界函数

(B) 有极值

(C) 单调增函数

(D) 单调减函数

【2023 李 660 题 · 数学一 · P55 第 157 题】

解:

157 【答案】 D

【分析】

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

因为 $f(0) = 0$, 所以由中值定理知 $f(x) = xf'(\xi)$, 其中 $0 < \xi < x$. 所以

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x}$$

而 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为严格单调增函数, 所以 $g'(x) < 0$, 函数 $g(x) = \frac{1-f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 为单调减函数.

例 12. 设 $f(x) = \int_0^1 t|x-t|dt (x > 0)$,

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 求 $f(x)$ 的最小值

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P114 第 11 题】

解:

解 (1) 当 $0 < x < 1$ 时,

$$f(x) = \int_0^x t(x-t)dt + \int_x^1 t(t-x)dt = x \int_0^x tdt - \int_0^x t^2 dt + \int_x^1 t^2 dt - x \int_x^1 tdt = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3},$$

$$\text{当 } x \geq 1 \text{ 时, } f(x) = \int_0^1 t(x-t)dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}, \text{ 即}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}, & 0 < x < 1, \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{3}, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f'(x) = x^2 - \frac{1}{2}; \text{ 当 } x > 1 \text{ 时, } f'(x) = \frac{1}{2};$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{x - 1} = \frac{1}{2}, \text{ 则 } f'(1) = \frac{1}{2}, \text{ 故}$$

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{2}, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x \geq 1. \end{cases}$$

(2) 当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 的最小值为

$$m = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

五、曲线的凹向、拐点、渐近线

例 13. $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

【2023 李 880 题 · 数学一 · P7 第 9 题】

解:

(9) C.

解

$$y' = [(x-1)^2(x-3)^2]' = 4(x-1)(x-2)(x-3),$$

则 y'' 是二次函数, 故 y'' 最多只有两个零点, 由罗尔定理, 知 y'' 在 $(1, 2)$ 和 $(2, 3)$ 内各有一个零点, 且 y'' 在其零点两侧变号, 故有 2 个拐点, C 正确.

例 14. 设 $(1, 3)$ 是曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 14$ 的拐点, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P19 第 44 题】

解:

44 【答案】 $-3, -9$

【分析】 求出 $y'' = 6x + 2a$.

$(1, 3)$ 为该曲线拐点 $\Rightarrow$

$$y(1) = 1 + a + b + 14 = 3$$

$$y''(1) = 6 + 2a = 0$$

$\Rightarrow a = -3, b = -9$. 又

$$y''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1) \begin{cases} > 0, & x > 1 \\ = 0, & x = 1 \\ < 0, & x < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = -3, b = -9$ 时 $(1, 3)$ 确为该曲线的拐点.

因此, $a = -3, b = -9$.

例 15. 曲线 $y = \frac{2x^5 - 4x^4 + 1}{x^4 + 1}$ 的斜渐近线为

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P115 第 5 题】

解:

5. 【答案】 $y = 2x - 4$.

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 4x^4 + 1}{x^5 + x} = 2,$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^5 - 4x^4 + 1}{x^4 + 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^4 - 2x + 1}{x^4 + 1} = -4,$$

曲线 $y = \frac{2x^5 - 4x^4 + 1}{x^4 + 1}$ 的斜渐近线为 $y = 2x - 4$.

六、证明函数不等式

例 16. 设可导函数 $f(x), x \in [0, 1]$ 满足 $f'(x) \geq M > 0$, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$, 则在区间 ()

上, 有 $f(x) \geq \frac{1}{4}M$

(A) $\left[0, \frac{1}{4}\right]$

(B) $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

(C) $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$

(D) $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P13 第 12 题】

解:

(12) D.

解 由拉格朗日中值定理,有

$$f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'(\xi)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}f'(\xi) \geq \frac{1}{4}M, \xi \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right),$$

$$\text{即 } f\left(\frac{3}{4}\right) \geq \frac{1}{4}M + f\left(\frac{1}{2}\right).$$

又 $f'(x) \geq M > 0$, 知 $f(x)$ 单调增加, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$, 故 $f\left(\frac{3}{4}\right) \geq \frac{1}{4}M > 0$, 所以在 $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ 上, 有 $f(x) \geq \frac{1}{4}M$, D 正确.

例 17. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, $f(a) = \max_{[a, b]} f(x)$, 则

(A) $f'_+(a) = 0$

(B) $f'_+(a) \geq 0$

(C) $f'_+(a) < 0$

(D) $f'_+(a) \leq 0$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P57 第 163 题】

解:

163

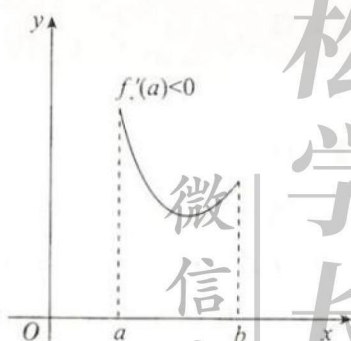
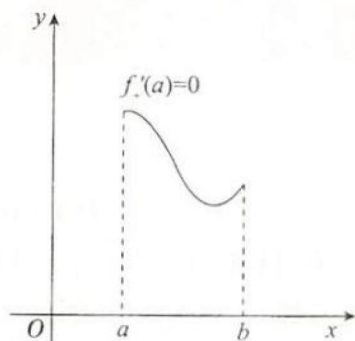
【答案】 D

【分析】 方法 1 考察 $f'_+(a)$.

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

选(D).

方法 2



由 $f'_+(a)$ 的几何意义可知, 应选(D).

【评注】 最值点处的导数性质:

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, $f(c) = \max_{[a, b]} f(x)$ 或 $f(c) = \min_{[a, b]} f(x)$.

(1) 若 $c \in (a, b)$, 则 $f'(c) = 0$.

(2) 若 $c = a, f(a) = \max_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_+(a) \leq 0$,

$f(a) = \min_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_+(a) \geq 0$.

(3) 若 $c = b, f(b) = \max_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_-(b) \geq 0$,

$f(b) = \min_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_-(b) \leq 0$.

例 18. 设 $f(x)$ 二阶可导, $f(0) = 0$, 且 $f''(x) > 0$. 证明: 对任意的 $a > 0, b > 0$, 有

$$f(a+b) > f(a) + f(b)$$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P117 第 21 题】

解:

21. 证明 不妨设 $a \leq b$, 由微分中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, a), \xi_2 \in (b, a+b)$, 使得

$$\begin{cases} f(a) - f(0) = f'(\xi_1)a, \\ f(a+b) - f(b) = f'(\xi_2)a, \end{cases}$$

两式相减得 $f(a+b) - f(a) - f(b) = [f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]a$.

因为 $f''(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 单调增加, 而 $\xi_1 < \xi_2$, 所以 $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$,

故 $f(a+b) - f(a) - f(b) = [f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]a > 0$, 即

$$f(a+b) > f(a) + f(b).$$

七、方程根的存在性与个数

例 19. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有二阶导数, $f(0) = 0, f'_+(0) < 0$,

$f''(x) \geq M > 0 (x > 0)$.

证明: $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一实根

【2023 李 880 题 · 数学一 · P14 第 11 题】

解:

(10) 证 由 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 可知存在 $x_1 \in (0, \delta), \delta > 0$,

使得 $f(x_1) < 0$.

由拉格朗日中值定理, 有

$$f'(x) = f'(0) + f''(\xi_1)(x-0) \geq f'(0) + Mx \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty),$$

其中 ξ_1 介于 0 与 x 之间, 故存在充分大的 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得在 $(x_0, +\infty)$ 内有 $f'(x) > 1$.

对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi_2)(x-x_0) \geq f(x_0) + (x-x_0) \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty),$$

其中 ξ_2 介于 x_0 与 x 之间, 于是存在充分大的 $x_2 \in (x_0, +\infty)$, 使得 $f(x_2) > 0$.

在区间 (x_1, x_2) 内由零点定理, 可知 $f(x) = 0$ 至少有一个实根.

用反证法, 证明 $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内至多有一个实根.

若 $f(x) = 0$ 有两个不同实根 $a_1, a_2 (a_1 < a_2)$, 则由罗尔定理, 在 $(0, a_1)$ 和 (a_1, a_2) 内分别有 $f'(x)$ 的零点 b_1 与 b_2 . 再由罗尔定理, 存在 $c \in (b_1, b_2)$, 使 $f''(c) = 0$, 与已知条件 $f''(x) \geq M > 0$ 矛盾, 所以 $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一实根.

例 20. 函数 $f(x) = 3\ln x - x$

(A) 没有零点 (B) 有 1 个零点 (C) 有 2 个零点 (D) 有 3 个零点

【2023 李 660 题 · 数学一 · P61 第 175 题】

解:

175 【答案】 C

【分析】 令 $f'(x) = \frac{3}{x} - 1 = 0$, 解得函数 $f(x)$ 的驻点为 $x = 3$.

函数 $f(x) = 3\ln x - x$ 在 $(0, 3)$ 单调增, 在 $(3, +\infty)$ 单调减.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, f(3) = 3\ln 3 - 3 > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 所以函数 $f(x) = 3\ln x - x$ 在

$(0, 3)$ 和 $(3, +\infty)$ 各有 1 个零点.

例 21. 设 $k > 0$, 则函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 的零点个数为

- (A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P116 第 9 题】

解:

9. (答案) (C)

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 由 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = 0$ 得 $x = e$, 当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 由驻点的唯一性知 $x = e$ 为函数 $f(x)$ 的最大值点, 最大值为 $f(e) = k > 0$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 于是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内且仅有两个零点, 选 (C).

八、微分中值定理有关的证明题

例 22. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f'_+(a)f'_-(b) > 0$.

证明: 在 (a, b) 内存在两点 ε 与 η , 使得 $f(\varepsilon) = 0, f''(\eta) = 0$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P14 第 9 题】

解:

(9) 证 (I) 用反证法.

假设不存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 则在 (a, b) 内, 总有 $f(x) > 0$ 或 $f(x) < 0$.

若 $f(x) > 0$, 由 $f(a) = f(b) = 0$, 则

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x - a} \geq 0,$$

$$f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x - b} \leq 0,$$

故有 $f'_+(a) \cdot f'_-(b) \leq 0$, 与条件 $f'_+(a)f'_-(b) > 0$ 矛盾;

若 $f(x) < 0$, 则 $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x - a} \leq 0, f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x - b} \geq 0$, 故有 $f'_+(a)f'_-(b) \leq 0$, 与条件 $f'_+(a)f'_-(b) > 0$ 矛盾.

综上所述, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

(II) 由 $f(a) = f(\xi) = f(b)$, 在 $[a, \xi]$ 与 $[\xi, b]$ 上对 $f(x)$ 分别应用罗尔定理, $\exists \eta_1 \in (a, \xi), \eta_2 \in (\xi, b)$, 使得 $f'(\eta_1) = 0, f'(\eta_2) = 0$, 对 $f'(x)$ 在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上再用罗尔定理, $\exists \eta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$, 使得 $f''(\eta) = 0$.

例 23. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 证明: 存在 $\varepsilon \in (0, 1)$, 使得

$$f''(\varepsilon) = \frac{2f'(\varepsilon)}{1 - \varepsilon}$$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P116 第 7 题】

解:

证明 令 $\varphi(x) = (x-1)^2 f'(x)$, 显然 $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导. 由 $f(0) = f(1) = 0$, 根据罗尔定理, 存在 $c \in (0, 1)$, 使得 $f'(c) = 0$, 再由 $\varphi(c) = \varphi(1) = 0$, 根据罗尔定理, 存在 $\xi \in (c, 1) \subset (0, 1)$, 使得 $\varphi'(\xi) = 0$, 而 $\varphi'(x) = 2(x-1)f'(x) + (x-1)^2 f''(x)$, 所以 $2(\xi-1)f'(\xi) + (\xi-1)^2 f''(\xi) = 0$, 整理得 $f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

例 24. 设 $f(x) \in C[a, b]$, 在 (a, b) 内可导 ($a > 0$), 证明: 存在 $\varepsilon, \eta \in (a, b)$, 使得

$$abf'(\varepsilon) = \eta^2 f'(\eta)$$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P117 第 16 题】

解:

16. 证明 令 $g(x) = -\frac{1}{x}, g'(x) = \frac{1}{x^2} \neq 0 (a < x < b)$, 存在 $\eta \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}, \text{ 即 } \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta^2}}, \text{ 整理得}$$

$$ab \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \eta^2 f'(\eta),$$

由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, 故

$$ab f'(\xi) = \eta^2 f'(\eta).$$

小松学长

微信公众号【小松学长】

第三章 一元函数积分学

一、不定积分的计算

例 1. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, 若 $\int xf(x)dx = \arcsin x + C$, 则 $\int \frac{dx}{f(x)} =$

(A) $\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

(B) $\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

(C) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

(D) $-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P16 第 1 题】

解:

(1) C.

解 已知等式 $\int xf(x)dx = \arcsin x + C$, 两边同时对 x 求导, 得 $xf(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

故 $\frac{1}{f(x)} = x\sqrt{1-x^2}$, 所以

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

例 2. $I = \int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P22 第 54 题】

解:

54

【答案】 $2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2\ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$, C 为任意常数

【分析】 先用分部积分法.

$$I = \int 2xd\sqrt{1+e^x} = 2x\sqrt{1+e^x} - 2 \int \sqrt{1+e^x}dx$$

再作变量替换, 令 $\sqrt{1+e^x} = t$, 则 $x = \ln(t^2-1)$, $dx = \frac{2t}{t^2-1}dt$, 于是

$$\int \sqrt{1+e^x}dx = \int \frac{2t^2}{t^2-1}dt = 2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C$$

$$= 2\sqrt{1+e^x} + \ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$$

因此, $I = 2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2\ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C.$

例 3. $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} =$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P119 第 5 题】

解:

5. (答案) $-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan \frac{1}{x} + C.$

解 $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} \xrightarrow{x=\frac{1}{t}} \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^4}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)} dt = -\int \frac{t^4}{t^2+1} dt$

$$= -\int \frac{(t^4-1)+1}{t^2+1} dt = -\int \left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right) dt$$

$$= -\frac{t^3}{3} + t - \arctan t + C = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan \frac{1}{x} + C.$$

二、定积分的概念、性质及几何意义

例 4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 记

$$M = \int_0^1 f(x) dx, N = f(1), P = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)], \text{ 则}$$

- (A) $M < N < P$ (B) $N < M < P$ (C) $P < M < N$ (D) $P < N < M$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P16 第 5 题】

解:

(5) B.

解 由已知条件, 画出示意图, 如图 3-1 所示. 由 $f'(x) < 0$, 知当 $x \in [0,1]$ 时, $f(x) > f(1)$, 故

$$N = (1-0)f(1) < M = \int_0^1 f(x) dx.$$

由 $f''(x) > 0$, 知

$$P = \frac{1}{2}(1-0)[f(0) + f(1)] > \int_0^1 f(x) dx = M,$$

故 B 正确.

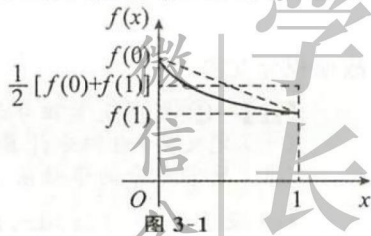


图 3-1

例 5. 设 $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx$, 则 $f(x) =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P24 第 58 题】

解:

58 【答案】 $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

【分析】 设 $\int_0^1 f(x)dx = a, \int_0^2 f(x)dx = b$, 则

$$f(x) = x^2 - bx + 2a$$

对上式两边分别在 $[0, 1]$ 和 $[0, 2]$ 上作定积分

$$a = \int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + 2ax \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{b}{2} + 2a$$

即 $a - \frac{1}{2}b = -\frac{1}{3}$ (1)

$$b = \int_0^2 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + 2ax \right] \Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 2b + 4a$$

即 $4a - 3b = -\frac{8}{3}$ (2)

由(1)式和(2)式得

$$a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$$

于是 $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$.

【评注】 注意: $\int_a^b f(x)dx$ 是一个确定的数是解本题的关键.

例 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i + \sqrt{n^2 - i^2}} =$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P119 第 9 题】

解:

9. 【答案】 $\frac{\pi}{4}$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i + \sqrt{n^2 - i^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{i}{n} + \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}}$

$$\stackrel{x = \sin t (*)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = I,$$

同理(*)处令 $x = \cos t$, 有 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$, 以上两式相加得

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{\pi}{2}, \text{ 故 } I = \frac{\pi}{4}.$$

三、定积分的计算

例 7. 设 $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = 0$, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 1$, 则 $I = \int_0^1 x^2 f''(2x) dx =$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P20 第 8 题】

解:

(5) 0.

解

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^2 f''(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d[f'(2x)] \\ &= \frac{1}{2} \left[x^2 f'(2x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2x f'(2x) dx \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 x d[f(2x)] = -\frac{1}{2} \left[x f(2x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(2x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx - \frac{1}{2} f(2) \stackrel{2x=t}{=} \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) dt - \frac{1}{4} = 0. \end{aligned}$$

例 8. $I = \int_0^2 \left(x\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)^3} \right) dx =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P24 第 60 题】

解:

60 【答案】 $\frac{\pi}{8}$

【分析】 $I = \int_0^2 x \sqrt{2x-x^2} dx - \int_0^2 \sqrt{\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)^3} dx$, 而

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \sqrt{2x-x^2} dx &= \int_0^2 x \sqrt{1-(x-1)^2} dx \\ &\stackrel{\text{令 } x-1=t}{=} \int_{-1}^1 t \sqrt{1-t^2} dt + \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt \\ &= 0 + 2 \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2} \text{ (单位圆面积的一半)} \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \sqrt{\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)^3} dx \stackrel{\text{令 } x=2\sin t}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} \pi.$$

因此, 原式 $= \frac{\pi}{2} - \frac{3}{8} \pi = \frac{\pi}{8}$.

【评注】 解答本题时, 要注意以下两条:

- (1) 有时需作定积分的换元法后再利用定积分的几何意义.
- (2) 记住结论:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}, & n \text{ 为大于 1 的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

有时对计算定积分很有用.

例 9. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} dx =$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P119 第 17 题】

解:

⑪. (答案) $4 - \pi$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^4 \frac{x}{2}} dx \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^2 \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1) dx = 4 - \pi. \end{aligned}$$

四、变上限积分函数及其应用

例 10. 设 $f(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$, 则 $I = \int_0^\pi f(x) \cos x dx =$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P20 第 9 题】

解:

(6) $e^{-1} - e$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad I &= \int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi f(x) d(\sin x) = f(x) \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \sin x dx \\ &= 0 - \int_0^\pi e^{\cos x} \sin x dx = \int_0^\pi e^{\cos x} d(\cos x) = e^{\cos x} \Big|_0^\pi = e^{-1} - e. \end{aligned}$$

例 11. 设 $f(x) = \max\{1, x^2\}$, 则 $\int_1^x f(t) dt =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P26 第 65 题】

解:

65

【答案】

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}, & x < -1 \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

【分析】 方法 1 因为

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ 1, & -1 \leq x \leq 1. \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

所以这是求分段函数的变限积分.

$$\begin{aligned} \text{当 } x < -1 \text{ 时, } \int_1^x f(t) dt &= \int_1^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^x f(t) dt = \int_1^{-1} 1 dt + \int_{-1}^x t^2 dt \\ &= -2 + \frac{1}{3}t^3 \Big|_{-1}^x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } -1 \leq x \leq 1 \text{ 时, } \int_1^x f(t) dt = \int_1^x 1 dt = x - 1.$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } \int_1^x f(t) dt = \int_1^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}.$$

因此,

$$\int_1^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}, & x < -1 \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

方法 2 $\int_1^x f(t) dt \stackrel{(\text{记})}{=} F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 满足 $F(1) = 0$. 因而, 也可用求得分段函数 $f(x)$ 的一个原函数, 记为 $F_0(x)$, 则有

$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & x \leq -1 \\ x + C_1, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_2, & x \geq 1 \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 满足

$$\frac{1}{3}x^3 \Big|_{x=-1} = (x + C_1) \Big|_{x=-1} \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}$$

小松学长

微信公众号【小松学长】

$$(x + C_1) \Big|_{x=1} = \left(\frac{1}{3}x^3 + C_2 \right) \Big|_{x=1} \Rightarrow C_2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = F_0(x) + C.$$

$$\text{现定出 } C \text{ 使得 } 0 = F_0(1) + C = 1 + \frac{2}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{5}{3}.$$

因此

$$\int_1^x f(t) dt = F_0(x) - \frac{5}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}, & x \leq -1 \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

【评注】若求分段函数 $f(x) = \max\{1, x^2\}$ 的不定积分 $\int f(x) dx$, 或由变限积分法先求得一个原函数 $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ (这时要用分段积分法如方法 1), 然后就可得

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

或由方法 2 中的拼接法, 先求得一个原函数, 同样可得 $\int f(x) dx$. 对于多个连接点的分段函数, 也许拼接法更简便些.

例 12. 设 $f(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$, 则 $\int_0^\pi f(x) \cos x dx =$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P120 第 21 题】

解:

21. (答案) $e^{-1} - e$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^\pi f(x) \cos x dx &= \int_0^\pi f(x) d(\sin x) = f(x) \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \sin x dx \\ &= - \int_0^\pi e^{\cos x} \sin x dx = e^{\cos x} \Big|_0^\pi = e^{-1} - e. \end{aligned}$$

五、与定积分有关的证明题

例 13. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P21 第 13 题】

解:

(16) 证法 1 利用夹逼准则, 当 $x \in [0, 1]$ 时, 有 $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$.

根据定积分的性质, 得 $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$.

证法 2 利用推广的积分中值定理, 有

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{(1+\xi)(1+n)} (0 < \xi < 1),$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\xi)(1+n)} = 0.$$

【注】推广的积分中值定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且不变号, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

例 14. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $f(0) = 0, \int_0^1 f(x)dx = 0$. 证明: 存在 $\varepsilon \in (0, 1)$, 使得

$$\int_0^\varepsilon f(x)dx = \varepsilon f(\varepsilon)$$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P123 第 20 题】

解:

20. 证明 令 $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 所以 $\varphi(x)$ 在

$[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 又 $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = \frac{\int_0^1 f(x)dx}{1} = 0$, 由罗尔定理, 存在

$\xi \in (0, 1)$, 使得 $\varphi'(\xi) = 0$, 而 $\varphi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(t)dt}{x^2}$, 所以 $\int_0^\xi f(x)dx = \xi f(\xi)$.

例 15. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调增加, 证明: $\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P123 第 25 题】

解:

25. 证明 方法一 令 $\varphi(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$,

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加, 所以 $\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x)dx &= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] dx \\ &= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx = \int_a^b xf(x)dx - \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx, \end{aligned}$$

故 $\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$.

方法二 令 $\varphi(x) = \int_a^x t f(t) dt - \frac{a+x}{2} \int_a^x f(t) dt$, 显然 $\varphi(a) = 0$.

$$\varphi'(x) = x f(x) - \frac{1}{2} \int_a^x f(t) dt - \frac{a+x}{2} f(x) = \frac{1}{2} \left[(x-a) f(x) - \int_a^x f(t) dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_a^x f(x) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \frac{1}{2} \int_a^x [f(x) - f(t)] dt \geq 0,$$

由 $\begin{cases} \varphi(a) = 0, \\ \varphi'(x) \geq 0 (a \leq x \leq b), \end{cases}$ 得 $\varphi(b) \geq \varphi(a) = 0$, 所以 $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

六、反常积分的概念与计算

例 16. 设 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 则 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx =$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P21 第 10 题】

解:

(7) $\frac{\pi}{2}$.

解 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = - \int_0^{+\infty} \sin^2 x d\left(\frac{1}{x}\right) = - \frac{\sin^2 x}{x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx$
 $= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx \xrightarrow{2x=t} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$

例 17. $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P27 第 69 题】

解:

69 【答案】 $\ln 2$

【分析】 方法 1 $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{1+e^{-x}} \Big|_0^b - \int_0^b \frac{dx}{1+e^{-x}} \right]$
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(1+e^x) \Big|_0^b \right]$

$$\begin{aligned}
 &= \ln 2 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right] \\
 \text{而 } \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right] &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-b}} \left[b - (1+e^{-b}) \ln(e^b + 1) \right] \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln e^b - (1+e^{-b}) \frac{\ln(1+e^b)}{e^b} \right] \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{e^b}{e^b + 1} - \frac{\ln(1+e^b)}{e^b} \right] \\
 &= \ln 1 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{或 } \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right] &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b(1+e^{-b}-e^{-b})}{1+e^{-b}} - \ln[e^b(1+e^{-b})] \right] \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[b - \frac{be^{-b}}{1+e^{-b}} - b - \ln(1+e^{-b}) \right] \\
 &= 0 - \ln 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \ln 2.$$

方法2 作恒等变形后,对无穷积分作分部积分.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(e^x+1)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x de^x}{(e^x+1)^2} \\
 &= - \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{e^x+1}\right) = - \frac{x}{e^x+1} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1} \\
 &= - \int_0^{+\infty} \frac{de^{-x}}{1+e^{-x}} = - \ln(1+e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = \ln 2.
 \end{aligned}$$

【评注】 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$,但不可对它直接用分部积分公式,因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+e^{-x}} = +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^{-x}} \text{ 发散.}$$

因此 中,先对 $\int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$ 用分部积分,然后再求

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right).$$

例 18. 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^a \ln^b x} dx (a > 0, b > 0)$ 收敛, 则

- (A) $a > 1, b > 1$ (B) $a > 1, b < 1$ (C) $a > 2, b > 1$ (D) $a > 2, b < 1$

【2023 汤 1800 题 • 数学一 • P121 第 10 题】

解:

【答案】 (D).

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^b \cdot \frac{1+x}{x^a \ln^b x} = 2 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^b}{\ln^b [1+(x-1)]} = 2 \text{ 得 } 0 < b < 1;$$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{a-1} \cdot \frac{1+x}{x^a \ln^b x} = 0 \text{ 得 } a-1 > 1, \text{ 即 } a > 2, \text{ 应选 (D).}$$

七、定积分的应用

例 19. 由曲线 $y = \ln x$ 与两直线 $y = (e+1) - x$ 及 $y = 0$ 所围平面图形的面积 $S =$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P17 第 8 题】

解:

(8) $\frac{3}{2}.$

解 如图 3-2 所示,

$$S = \int_0^1 [(e+1) - y - e^y] dy = \frac{3}{2},$$

或
$$S = \int_1^e \ln x dx + \int_e^{e+1} (e+1-x) dx = \frac{3}{2}.$$

例 20. 摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴围成图形绕 $y = 2a$ 旋转一周而得的旋转体的体积 $V =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P28 第 70 题】

解:

70 【答案】 $7\pi^2 a^3$

【分析】 该曲线可表为 $y = y(x) (0 \leq x \leq 2\pi a)$.

先求出摆线和直线 $y = 2a, x = 0, x = 2\pi a$ 所围平面图形绕 $y = 2a$ 旋转一周所成旋转体的体积 V_1 .

任取 $[x, x+dx] \subset [0, 2\pi a]$, 对应的小窄条相应的体积微元

$$dV_1 = \pi[2a - y(x)]^2 dx$$

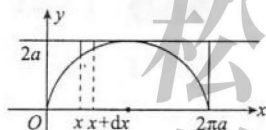
于是

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{2\pi a} [2a - y]^2 dx \\ &\stackrel{x = a(t - \sin t)}{=} \pi \int_0^{2\pi} [2a - a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 (1 - \cos t) dt \\ &= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \cos^4 \frac{t}{2} \sin^2 \frac{t}{2} dt = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \cos^4 s (1 - \cos^2 s) ds \\ &= 16\pi a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 s (1 - \cos^2 s) ds \\ &= 32\pi a^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 s ds - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 s ds \right] \\ &= 32\pi a^3 \left[\frac{3 \times 1}{4 \times 2} - \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \right] \times \frac{\pi}{2} = \pi^2 a^3 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t)(1 + \cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \cos^2 t - \cos^3 t) dt \\ &= \pi a^3 \left[2\pi - \pi - \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d\sin t \right] = \pi^2 a^3 \end{aligned}$$

因此, $V = \pi(2a)^2 2\pi a - \pi^2 a^3 = 7\pi^2 a^3.$



微信公众号【小松学长】

小松学长

例 21. 设区域 D 由 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 与 x 轴围成, 求区域 D 绕 $x = 3$ 旋转而成的几何体的体积.

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P124 第 43 题】

解:

43. 解 方法一 取 $[x, x + dx] \subset [0, 2]$, 体积元素为

$$dV = 2\pi(3 - x)y dx = 2\pi(3 - x)\sqrt{2x - x^2} dx,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } V &= 2\pi \int_0^2 (3 - x)\sqrt{2x - x^2} dx = 2\pi \int_0^2 [2 - (x - 1)]\sqrt{1 - (x - 1)^2} d(x - 1) \\ &= 4\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = 8\pi \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = 2\pi^2. \end{aligned}$$

方法二 取 $[y, y + dy] \subset [0, 1]$, 体积元素为

$$dV = [\pi(3 - x_1)^2 - \pi(3 - x_2)^2] dy,$$

由 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 得 $x_1 = 1 - \sqrt{1 - y^2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{1 - y^2}$ 得

$$dV = [\pi(2 + \sqrt{1 - y^2})^2 - \pi(2 - \sqrt{1 - y^2})^2] dy = 8\pi\sqrt{1 - y^2} dy,$$

$$\text{则 } V = 8\pi \int_0^1 \sqrt{1 - y^2} dy = 2\pi^2.$$

小松学长

微信公众号【小松学长】

第四章 向量代数和空间解析几何

一、求旋转面的方程

例 1. 求平行于平面 $x + y + z = 9$ 且与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 相切的平面方程

【2023 李 880 题 · 数学一 · P26 第 1 题】

解:

(1) 解 由于所求平面与平面 $x + y + z = 9$ 平行, 故可设其为平面 $\pi: x + y + z + D = 0$, 又因平面 π 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 相切, 所以球心 $O(0, 0, 0)$ 到平面 π 的距离为

$$\frac{|0 + 0 + 0 + D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 2,$$

解得 $D = \pm 2\sqrt{3}$, 故所求平面方程为

$$x + y + z + 2\sqrt{3} = 0 \text{ 或 } x + y + z - 2\sqrt{3} = 0.$$

例 2. 直线 $L: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程为

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P140 第 5 题】

解:

5: (答案) $\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} = 1.$

解 所求的曲面为 $\Sigma: \frac{x^2 + z^2}{4} - y^2 = 1$, 即 $\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} = 1.$

例 3. 设平面 π 与点 $P(1, 2, 1)$ 的距离为 1, 且过直线 $L: \begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0 \\ x - 2y - z + 6 = 0 \end{cases}$, 求平面 π 的方程 [公众号: 小松学长]

【2023 李 880 题 · 数学一 · P26 第 3 题】

解:

(3) 解 过直线 L 的平面束方程为

$$(x - z + 4) + \lambda(x + 5y + z) = 0$$

即

$$(1 + \lambda)x + 5\lambda y + (\lambda - 1)z + 4 = 0.$$

由于平面 π 与平面 π_1 夹角为 45° , 即两平面的法向量夹角为 45° , 故

$$\begin{aligned} \cos 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(1 + \lambda) + 5\lambda \cdot (-4) + (\lambda - 1) \cdot (-8)}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{(1 + \lambda)^2 + (5\lambda)^2 + (\lambda - 1)^2}} \\ &= \frac{9 - 27\lambda}{9\sqrt{27\lambda^2 + 2}} = \frac{1 - 3\lambda}{\sqrt{27\lambda^2 + 2}}, \end{aligned}$$

解得 $\lambda = 0, \lambda = -\frac{4}{3}$, 故平面 π 的方程为

$$x - z + 4 = 0 \text{ 或 } x + 20y + 7z - 12 = 0.$$

第五章 多元函数的微分学

一、求多元函数的偏导数及全微分

例 1. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x = ze^{y+z}$ 确定, 则 $dz|_{(e,0)} =$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P28 第 6 题】

解:

$$(6) \frac{1}{2e}dx - \frac{1}{2}dy.$$

解 由 $x = e, y = 0$, 知 $z = 1$. 令 $F(x, y, z) = ze^{y+z} - x$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-1}{e^{y+z}(1+z)} = \frac{1}{e^{y+z}(1+z)} = \frac{z}{x(1+z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{ze^{y+z}}{e^{y+z}(1+z)} = -\frac{z}{1+z},$$

故

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(e,0)} = \frac{1}{2e}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(e,0)} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } dz|_{(e,0)} = \frac{1}{2e}dx - \frac{1}{2}dy.$$

例 2. 设 $z = e^x + y^2 + f(x+y)$, 且当 $y = 0$ 时, $z = x^3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P33 第 87 题】

解:

87 【答案】 $e^x + 3(x+y)^2 - e^{x+y}$

【分析】 在等式 $z = e^x + y^2 + f(x+y)$ 中令 $y = 0$, 得

$$x^3 = e^x + f(x)$$

则 $f(x) = x^3 - e^x, z = e^x + y^2 + (x+y)^3 - e^{x+y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x + 3(x+y)^2 - e^{x+y}$$

例 3. 设 $z = (x-2y)^{y-2x}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{x=1, y=0} =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P34 第 88 题】

解:

88 【答案】 -2

【分析】 在 $z = (x-2y)^{y-2x}$ 中令 $y = 0$, 得 $z = x^{-2x}$.

$$z'_x = (e^{-2x \ln x})' = x^{-2x}(-2 \ln x - 2)$$

$$\text{则 } z'_x \Big|_{x=1} = -2, \text{ 即 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=1, y=0} = -2.$$

二、求多元函数的极值

例 4. 设 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$, 则 $f(x, y)$ 在点 $P(\frac{1}{2}, -1)$ 处 ().

(A) 取得极小值 $-\frac{e}{2}$

(B) 取得极大值 $-\frac{e}{2}$

(C) 取得极大值 e

(D) 不取得极值

【2023 李 880 题 · 数学一 · P27 第 5 题】

解:

(5) A.
解 由

$$\begin{cases} f'_x = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0, \\ f'_y = e^{2x}(2y + 2) = 0, \end{cases}$$

得驻点 $P(\frac{1}{2}, -1)$, 由于 $A = f''_{xx}(P) = 2e$, $B = f''_{xy}(P) = 0$, $C = f''_{yy}(P) = 2e$, 故

$$AC - B^2 = 2e \cdot 2e - 0 > 0, A = 2e > 0,$$

所以 $f(\frac{1}{2}, -1) = -\frac{e}{2}$ 为极小值, A 正确.

例 5. 求函数 $z = x^3 - 3x^2 - 3y^2$ 在闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq 16$ 上的最大值.

【2023 李 880 题 · 数学一 · P29 第 5 题】

解:

(5) 解 (I) 在 $D: x^2 + y^2 < 16$ 内. 由

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 6x = 0, \\ z'_y = -6y = 0, \end{cases}$$

得驻点 $(0, 0), (2, 0)$.

(II) 在 $D: x^2 + y^2 = 16$ 上.

利用拉格朗日乘数法, 令 $L = x^3 - 3x^2 - 3y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 16)$, 则

$$\begin{cases} L'_x = 3x^2 - 6x + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = -6y + 2\lambda y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 16 = 0, \end{cases}$$

解得 $(0, \pm 4), (\pm 4, 0)$.

(III) 比较大小 $z(0, 0) = 0, z(2, 0) = -4, z(0, 4) = -48,$

$$z(0, -4) = -48, z(4, 0) = 16, z(-4, 0) = -112,$$

得最大值为 $z(4, 0) = 16$.

例 6. 下列命题正确的是

(A) 若 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极值点, 则 (x_0, y_0) 必为 $f(x, y)$ 的驻点.

(B) 若 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的驻点, 则 (x_0, y_0) 必为 $f(x, y)$ 的极值点.

(C) 若 (x_0, y_0) 为有界闭区域 D 上连续的函数 $f(x, y)$ 在 D 内部唯一的极值点, 且

$f(x, y)$ 在该点取极大值, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得它在 D 上的最大值.

(D) 若 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值, 则 $f(x, y)$ 在 $x = x_0$ 处取极小值, $f(x, y)$ 在 $y = y_0$ 处取极小值.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P86 第 248 题】

解:

248 【答案】 D

【分析】 由 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值及极值的定义可知, $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 取极小值, $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处取极小值, 故应选(D).

例 7. 函数 $f(x, y) = 1 + x + y$ 在区域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值与最小值之积为

(A) -1. (B) 1. (C) $1 + \sqrt{2}$. (D) $1 - \sqrt{2}$.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P87 第 251 题】

解:

251 【答案】 A

【分析】 显然 $f(x, y) = 1 + x + y$ 在区域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 内无驻点, 令

$$F(x, y, \lambda) = 1 + x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\text{令} \begin{cases} F'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{得 } x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2}$ 为最大值, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}$ 为最小值, $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$.
故应选(A).

三、反问题

例 8. 设 $f(u)$ 有二阶连续导数, 且 $z = f(e^x \sin y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ze^{2x}$, 求 $f(u)$.

【2023 李 880 题 · 数学一 · P29 第 9 题】

解:

(8) 解 令 $e^x \sin y = u$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'(u)e^x \sin y + f''(u)e^{2x} \sin^2 y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -f'(u)e^x \sin y + f''(u)e^{2x} \cos^2 y,$$

代入原方程得 $f''(u) - f(u) = 0$, 此为二阶线性齐次微分方程, 解得
 $f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$ (C_1, C_2 为任意常数).

例 9. 设 $u = u(\sqrt{x^2 + y^2})$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$) 有二阶连续的偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2 + y^2 \text{ 则 } u(\sqrt{x^2 + y^2}) =$$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P33 第 85 题】

解:

85 【答案】 $C_1 \cos \sqrt{x^2 + y^2} + C_2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 - 2$ (C_1, C_2 均为任意常数)

【分析】 $u(\sqrt{x^2 + y^2})$ 是一元函数 $u = u(r)$ 与二元函数 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的复合函数, 由复合函数求导法则得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{du}{dr} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{d^2 u}{dr^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{d^2 u}{dr^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) \\ \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \end{aligned}$$

于是原方程化为二阶线性常系数微分方程

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + u = r^2$$

即

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + u = r^2$$

通解为

$$u = C_1 \cos r + C_2 \sin r + r^2 - 2$$

因此

$$u(\sqrt{x^2 + y^2}) = C_1 \cos \sqrt{x^2 + y^2} + C_2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 - 2$$

例 10. 设 $z = f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, 且 $f(x, 0) = x, f(0, y) = y^2$, 则 $f(x, y) =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P36 第 96 题】

解:

96 【答案】 $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + y^2$

【分析】 连续两次分别对 x 和 y 积分, 即可得到 $f(x, y)$ 的表达式.

由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int (x + y) dy = xy + \frac{1}{2}y^2 + C_1(x)$$

进一步有

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \left(xy + \frac{1}{2}y^2 + C_1(x) \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \int C_1(x) dx + C_2(y) \end{aligned}$$

又 $f(x, 0) = \int C_1(x) dx + C_2(0) = x$, 两边对 x 求导得, $C_1(x) = 1$, 于是

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + C_2(y)$$

再由

$$f(0, y) = C_2(y) = y^2$$

从而得

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + y^2$$

四、求方向导数与梯度

例 11. 设 $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) =$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P51 第 13 题】

解:

答案 4.**解** $\text{grad} f = \{2x, -2y, 4z\},$

$$\text{则 } \text{div}(\text{grad} f) = \frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial(-2y)}{\partial y} + \frac{\partial(4z)}{\partial z} = 2 - 2 + 4 = 4.$$

例 12. 设向量场 $A = \{xz^2 + y^2, x^2y + z^2, y^2z + x^2\}$, 求 $\text{rot} A$ 及 $\text{div} A$.

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P56 第 42 题】

解:

$$\text{解 } \text{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^2 + y^2 & x^2y + z^2 & y^2z + x^2 \end{vmatrix} = \{2yz - 2z, 2xz - 2x, 2xy - 2y\},$$

$$\text{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = x^2 + y^2 + z^2.$$

例 13. 向量场 $A(x, y, z) = (x + y + z)i + xyj + zk$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的旋度 $\text{rot} A =$ $\text{div} A =$ _____

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P51 第 5 题】

解:

(5) $j, 3.$

$$\text{解 } \text{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y + z & xy & z \end{vmatrix} = j + (y - 1)k,$$

在点 $P(1, 1, 1)$ 处, 有 $\text{rot} A = j.$

$$\text{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + x + 1 = 2 + x,$$

故在点 $P(1, 1, 1)$ 处, $\text{div} A = 2 + 1 = 3.$

五、多元函数微分学的几何应用

例 14. 曲面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $P(2, 1, 4)$ 处的切平面方程为, 法线方程为

【2023 李 880 题 · 数学一 · P28 第 16 题】

解:

$$(16) 4x + 2y - z - 6 = 0, \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}.$$

解 令 $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2 + 1$, 则法向量为
 $n = (F'_x(P), F'_y(P), F'_z(P)) = (-4, -2, 1)$,
 故切平面方程为 $4(x-2) + 2(y-1) - (z-4) = 0$,
 即 $4x + 2y - z - 6 = 0$.
 法线方程为 $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}$.

例 15. 设可微函数 $f(x, y)$ 对任意 x, y, t , 满足 $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$, $P_0(1, -2, 2)$ 是曲面 $z = f(x, y)$ 上一点, 且 $f'_x(1, -2) = 4$, 则曲面在 P_0 点处的切平面方程为

【2023 李 880 题 · 数学一 · P30 第 5 题】

解:

(5) $4x - z - 2 = 0$.
 解 依题设, 只需求法向量 $n = (f'_x, f'_y, -1)$.
 $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$ 两边同时对 t 求导, 得 $xf'_1(tx, ty) + yf'_2(tx, ty) = 2tf(x, y)$,
 令 $t = 1$, 则上式为 $xf'_1(x, y) + yf'_2(x, y) = 2f(x, y)$.
 将 $x = 1, y = -2, z = f(1, -2) = 2, f'_1(1, -2) = 4$ 代入上式, 得 $f'_2(1, -2) = 0$, 即 $f'_y(1, -2) = 0$, 故法向量为 $n = (4, 0, -1)$, 所求切平面方程为
 $4(x-1) + 0 \cdot (y+2) + (-1)(z-2) = 0$,
 即 $4x - z - 2 = 0$.

例 16. 平面 $\Pi: x - 2y + 2z + 9 = 0$ 与以点 $M_0(2, 0, -1)$ 为球心的球面相切, 则该球面的方程是

【2023 李 660 题 · 数学一 · P209 第 595 题】

解:

595 【答案】 $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$

【分析】 关键是求出球面的半径, 它就是点 M_0 与 Π 的距离

$$d = \frac{|x - 2y + 2z + 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \Big|_{(2, 0, -1)} = \frac{9}{3} = 3$$

因此该球面的方程是

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$$

第六章 重积分

一、基本概念及性质

例 1. 设 D 为由直线 $x + y = \frac{1}{2}$, $x + y = 1$ 与两坐标轴所围的区域,

$I_1 = \iint_D [\ln(x+y)]^9 dx dy$, $I_2 = \iint_D (x+y)^9 dx dy$, $I_3 = \iint_D [\sin(x+y)]^9 dx dy$, 则 ().

(A) $I_1 \leq I_2 \leq I_3$

(B) $I_1 \leq I_3 \leq I_2$

(C) $I_3 \leq I_2 \leq I_1$

(D) $I_3 \leq I_1 \leq I_2$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P32 第 1 题】

解:

(1) B.

解 D 如图 7-1 所示, 在 D 上有 $[\ln(x+y)]^9 \leq [\sin(x+y)]^9 \leq (x+y)^9$, 故 B 正确.

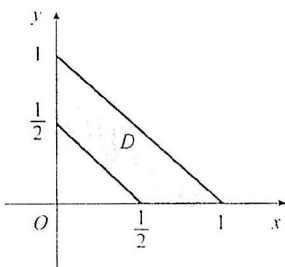


图 7-1

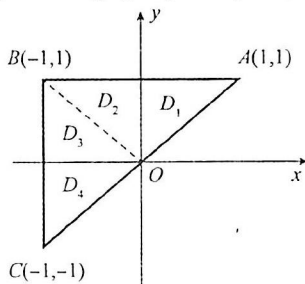


图 7-2

例 2. $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy$, $I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 1$, 则 ().

(A) $I_1 > I_2 > I_3$

(B) $I_1 < I_2 < I_3$

(C) $I_2 > I_1 > I_3$

(D) $I_3 > I_1 > I_2$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P35 第 1 题】

解:

(1) B.

解 在 $D: 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ 上有

$$\frac{\pi}{2} > 1 \geq \sqrt{x^2 + y^2} \geq x^2 + y^2 \geq (x^2 + y^2)^2 \geq 0,$$

且 $\cos x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上为单调减少函数, 故

$$0 \leq \cos \sqrt{x^2 + y^2} \leq \cos(x^2 + y^2) \leq \cos(x^2 + y^2)^2,$$

所以 $I_1 < I_2 < I_3$, B 正确.

例 3. 设 $I_1 = \iint_D \frac{x+y}{4} dx dy$, $I_2 = \iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}} dx dy$, $I_3 = \iint_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}} dx dy$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ 所确定, 则

(A) $I_2 < I_3 < I_1$.

(B) $I_1 < I_2 < I_3$.

(C) $I_3 < I_1 < I_2$.

(D) $I_3 < I_2 < I_1$.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P94 第 270 题】

解:

270 【答案】 B

【分析】 同一积分域上二重积分大小的比较, 只要比较被积函数的大小, 而被积函数为同一函数 $\frac{x+y}{4}$ 的不同方幂, 关键是要确定在 D 上 $\frac{x+y}{4}$ 是大于 1 还是小于 1.

由于直线 $\frac{x+y}{4} = 1$ (即 $x+y=4$) 与圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 在点 $(2, 2)$ 处相切, 则在区域 $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ 上, $\frac{x+y}{4} \leq 1$, 从而有

$$\frac{x+y}{4} \leq \sqrt{\frac{x+y}{4}} \leq \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}$$

则 $I_1 < I_2 < I_3$, 故应选(B).

例 4. 设平面域 D 由 $x+y=\frac{1}{2}$, $x+y=1$ 及两条坐标轴围成, $I_1 = \iint_D \ln(x+y)^3 dx dy$, $I_2 = \iint_D (x+y)^3 dx dy$, $I_3 = \iint_D \sin(x+y)^3 dx dy$ 则

(A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_3 < I_1 < I_2$. (C) $I_1 < I_3 < I_2$. (D) $I_3 < I_2 < I_1$.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P94 第 271 题】

解:

271 【答案】 C

【分析】 显然在 D 上 $0 < x+y \leq 1$, 则

$$\ln(x+y)^3 \leq 0, 0 < \sin(x+y)^3 < (x+y)^3$$

从而有

$$\iint_D \ln(x+y)^3 dx dy < \iint_D \sin(x+y)^3 dx dy < \iint_D (x+y)^3 dx dy$$

故应选(C).

二、二重积分的基本计算

例 5. 设积分区域 D 由曲线 $y = \ln x$ 以及直线 $x=2, y=0$ 围成, 则 $\iint_D \frac{e^{xy}}{x^x-1} d\sigma =$

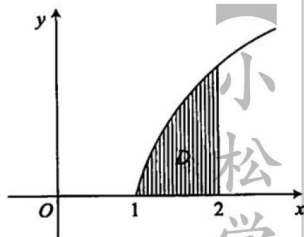
【2023 李 660 题 · 数学一 · P42 第 120 题】

解:

120 【答案】 $\ln 2$

【分析】 由题设知积分区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \ln x\}$, 从而

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{e^{xy}}{x^x-1} d\sigma &= \int_1^2 dx \int_0^{\ln x} \frac{e^{xy}}{x^x-1} dy \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x^x-1} \int_0^{\ln x} e^{xy} dy \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x(x^x-1)} \int_0^{\ln x} e^{xy} d(xy) \\ &= \int_1^2 \frac{e^{xy}}{x(x^x-1)} \Big|_{y=0}^{y=\ln x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{e^{x \ln x} - 1}{x(x^x-1)} dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2. \end{aligned}$$



例 6. 设区域 D 由 $y = x, y = x + 1, y = 1, y = 3$ 围成, 则 $\iint_D y d\sigma =$

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 6.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P91 第 261 题】

解:

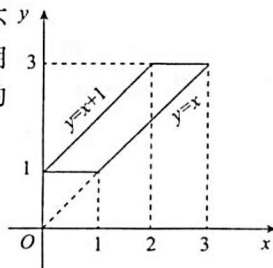
261 【答案】 C

【分析】 对被积函数而言, 先积 x 还是先积 y , 繁简程度差别不大. 但对积分区域 D , 如右图, 若先积 y 后积 x , D 的边界分段表示, 要用分块积分法, 不方便. 选择先积 x 后积 y 的积分顺序则不必分块, D 的表示是:

$$1 \leq y \leq 3, y-1 \leq x \leq y$$

于是

$$\iint_D y d\sigma = \int_1^3 dy \int_{y-1}^y y dx = \int_1^3 y dy = \frac{1}{2} y^2 \Big|_1^3 = 4$$



例 7. 设积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则二重积分

$$I = \iint_D \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

- (A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{\pi}{3}$. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{\pi}{6}$.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P91 第 263 题】

解:

263 【答案】 D

【分析】 在二重积分 I 中积分区域 D 被直线 $y = x$ 分割成关于 $y = x$ 对称的两个部分区域 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, $D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\} = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$ (如图所示), 被积函数 $f(x, y)$ 关于变量 x, y 对称, 即 $f(x, y) = f(y, x)$, 从而

$$\iint_{D_1} \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \iint_{D_2} \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

故

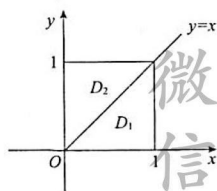
$$I = \iint_D \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \iint_{D_1} \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 在极坐标系 (r, θ) 中 D_1 可表示成 $\{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta}\}$,

所以

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \frac{r dr}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \frac{d(1+r^2)}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \Big|_0^{\frac{1}{\cos \theta}} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+\cos^2 \theta}}\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin \theta)}{\sqrt{2-\sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

即应选 (D).



三、交换积分次序及坐标系

例 8. 设 $D: -1 \leq x \leq 0, 1 - \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq -x$, 则 $I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4-x^2-y^2}} =$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P33 第 7 题】

解:

(7) $\frac{\pi^2}{32}$.

解 D 如图 7-10 所示, 用极坐标有

$$\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2\sin \theta,$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin \theta} \frac{r}{r \sqrt{4-r^2}} dr = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \arcsin \frac{r}{2} \Big|_0^{2\sin \theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} (\pi - \theta) d\theta = \frac{\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

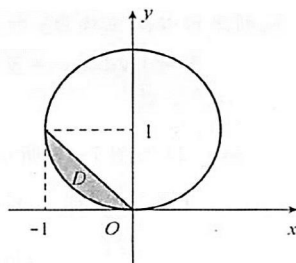


图 7-10

例 9. 设 $D: 2x \leq x^2 + y^2, 0 \leq y \leq x \leq 2$, 则 $I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P33 第 8 题】

解:

(8) $2\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}$.

解 D 如图 7-11 所示, 采用极坐标. $x^2 + y^2 = 2x$ 的极坐标方程为 $r = 2\cos \theta$, $x = 2$ 的极坐标方程为 $r = 2\sec \theta$, $y = x$ 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 故

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{2\cos \theta}^{2\sec \theta} \frac{1}{r} \cdot r dr \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec \theta - \cos \theta) d\theta \\ &= 2(\ln |\sec \theta + \tan \theta| - \sin \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

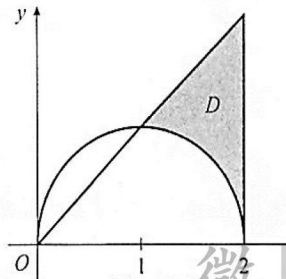


图 7-11

例 10. 积分 $I = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x, y) dy + \int_2^{2\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dy = (\quad)$.

(A) $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$

(B) $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$

(C) $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$

(D) $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P32 第 4 题】

解:

(4) C.

解 原积分 I 的积分区域如图 7-3 所示,

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq \frac{x^2}{2}, \end{cases} \\ D_2 &= \begin{cases} 2 \leq x \leq 2\sqrt{2}, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{8-x^2}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{故 } I = \int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx.$$

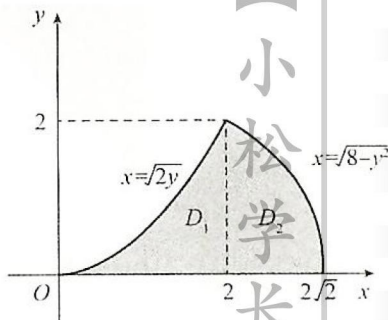


图 7-3

例 11. 交换积分次序 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P39 第 107 题】

解:

107 【答案】 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$

【分析】 由题设知对应的二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \text{ 的积分区域 } D = D_1 \cup D_2, \text{ 且}$$

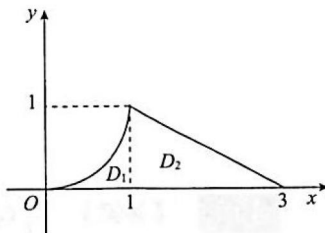
$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}(3-x)\},$$

画出积分区域 D 如图所示. 由此可见在区域 D 中最高点的纵坐标为 1, 最低点的纵坐标为 0, 左边界的方程是 $x = \sqrt{y}$, 右边界的方程 $x = 3 - 2y$, 从而积分区域 D 又可表成

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 3 - 2y\}.$$

故交换积分次序得 $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx.$



例 12. 将直角坐标中的累次积分转换成极坐标系下的累次积分并计算 $I =$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{-y^2} dy \int_0^y e^{-x^2} dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^R e^{-y^2} dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-x^2} dx =$$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P39 第 108 题】

解:

108 【答案】 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{8} (1 - e^{-R^2})$

【分析】 I 是二重积分 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$ 的累次积分, 其中

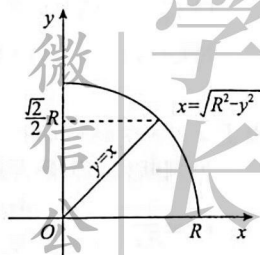
$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}R, 0 \leq x \leq y\} \cup \{(x, y) \mid \frac{\sqrt{2}}{2}R \leq y \leq R,$$

$$0 \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}\}, D \text{ 如图所示, 应作极坐标变换}$$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 可得

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq r \leq R, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

于是 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^R = \frac{\pi}{8} (1 - e^{-R^2}).$



四、三重积分的计算

例 13. 设 $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y - 2x$, 则 $I = \iiint_V (x + y + z) dV =$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P33 第 12 题】

解:

(12) 0.

解 V 是以 $(-1, 1, 0)$ 为球心, $\sqrt{2}$ 为半径的球体, 若视其密度为常数, 则质心(形心)坐标为 $(-1, 1, 0)$, 则

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x dV}{\iiint_V dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_V y dV}{\iiint_V dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_V z dV}{\iiint_V dV}.$$

而 $\iiint_V dV$ 为球的体积 $\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi$, 故

$$\iiint_V x dV = \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi \times (-1) = -\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi,$$

$$\iiint_V y dV = \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi \times 1 = \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi,$$

$$\iiint_V z dV = \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi \times 0 = 0,$$

于是 $I = \iiint_V (x + y + z) dV = 0$.



例 14. 设 V 是由曲面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 与 $z + 1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围的区域, 计算 $I = \iiint_V z^2 dV$.

【2023 李 880 题 · 数学一 · P34 第 12 题】

解:

(12) 解 用柱面坐标. 积分区域 V 如图 6-32 所示,

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad r - 1 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2},$$

故

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V z^2 dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r-1}^{\sqrt{1-r^2}} z^2 dz \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^1 [r(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - r(r-1)^3] dr = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

【注】此题若采用球面坐标需分两个区域积分:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^2 \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr + \\ &\quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi - \cos \varphi}} r^2 \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr, \end{aligned}$$

显然计算量较大.

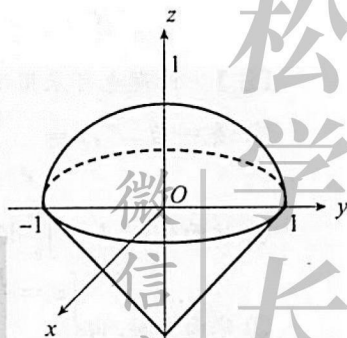


图 6-32

例 15. 计算 $\iiint_{\Omega} x^2 dv$, 其中 Ω 由 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 与 $z = 0$ 围成.

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P52 第 1 题】

解:

$$\text{解} \quad I = \iiint_{\Omega} x^2 dv = \iiint_{\Omega} y^2 dv = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv.$$

$$\begin{aligned} \text{方法一} \quad I &= \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2} dr = \pi \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2} dr \xrightarrow{r = \sin t} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t (1 - \sin^2 t) dt \\ &= \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{2\pi}{15}. \end{aligned}$$

五、重积分的应用

例 16. $r \leq 1$ 与 $r \leq 1 + \cos \theta$ 所围平面区域的形心坐标为 [公众号: 小松学长]

【2023 李 880 题 · 数学一 · P33 第 14 题】

解:

$$(14) \left(\frac{15\pi - 32}{30\pi - 48}, 0 \right).$$

解 如图 6-15 所示, 由对称性, 知 $\bar{y} = 0$. 又由于

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\iint_D x \, dx \, dy}{\iint_D dx \, dy} = \frac{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r \cos \theta \cdot r \, dr + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{1+\cos \theta} r \cos \theta \cdot r \, dr}{\frac{1}{2} \pi \times 1^2 + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{1+\cos \theta} r \, dr} \\ &= \frac{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^1 r^2 \, dr + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \theta d\theta \int_0^{1+\cos \theta} r^2 \, dr}{\frac{1}{2} \pi + 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (r^2 \Big|_0^{1+\cos \theta}) d\theta} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{15\pi - 2}{16} \right)}{\frac{5}{4} \pi - 2} = \frac{15\pi - 32}{30\pi - 48}, \end{aligned}$$

故形心坐标为 $\left(\frac{15\pi - 32}{30\pi - 48}, 0 \right)$.

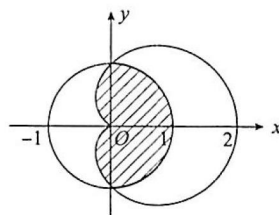


图 6-15

例 17. 均匀的几何体由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = 1$ 围成, 则质心坐标为

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P50 第 3 题】

解:

【答案】 $\left(0, 0, \frac{3}{4} \right)$.

解 设质心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性得 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \, dv}{\iiint_{\Omega} dv}$,

$$\text{而 } \iiint_{\Omega} dv = \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} dx \, dy = \int_0^1 \pi z^2 \, dz = \frac{\pi}{3}, \quad \iiint_{\Omega} z \, dv = \int_0^1 z \, dz \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} dx \, dy = \int_0^1 \pi z^3 \, dz = \frac{\pi}{4},$$

故质心坐标为 $\left(0, 0, \frac{3}{4} \right)$.

例 18. 设球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ 上任一点处的密度等于该点到原点的距离的平方, 则此球的质心的 z 坐标为

【2023 李 660 题 · 数学一 · P211 第 599 题】

解:

【599】 【答案】 $\frac{5}{8}$

【分析】 由质心计算公式知

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2) \, dv}{\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dv} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r \cos \varphi \cdot r^4 \, dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^2 \cdot r^2 \, dr} = \frac{5}{8}$$

第七章 曲线、曲面积分

一、第一类曲线积分的计算

例 1. 设 L 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长为 a , 则 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds =$

【2023 武辅导讲义·数学一·P255 例 1】

解:

【例 1】 设 L 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长为 a , 则 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds =$ _____.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds &= \oint_L (3x^2 + 4y^2) ds \quad (\text{奇偶性}) \\ &= 12 \oint_L \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \right) ds = 12a. \end{aligned}$$

例 2. 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $I = \oint_L (z + x^2) ds =$

【2023 李 880 题·数学一·P48 第 3 题】

解:

$$(3) \quad \frac{2\pi R^3}{3}.$$

解 由于曲线 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 关于直线 $x = y = z$ 对称, 所以

$$\oint_L x^2 ds = \frac{1}{3} \oint_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{3} \oint_L R^2 ds$$

$$\oint_L z ds = \frac{1}{3} \oint_L (x + y + z) ds = \frac{1}{3} \oint_L 0 ds = 0,$$

故 $I = \oint_L (z + x^2) ds = 0 + \frac{1}{3} \oint_L R^2 ds = \frac{R^2}{3} \cdot 2\pi R = \frac{2\pi R^3}{3}$

例 3. 计算 $I = \oint_L [x^2 + (y+1)^2] ds$, 其中 L 为曲线 $x^2 + y^2 = Rx (R > 0)$

【2023 武辅导讲义·数学一·P255 例 2】

解:

$$\text{解} \quad I = \oint_L (x^2 + y^2 + 2y + 1) ds = R \oint_L x ds + \pi R = \frac{\pi R^3}{2} + \pi R,$$

其中计算积分 $\oint_L x ds$ 可以用直接法, 以下介绍两种简单方法.

$$\begin{aligned} \text{【方法 1】} \quad \oint_L x ds &= \oint_L \left[\left(x - \frac{R}{2}\right) + \frac{R}{2} \right] ds = \frac{R}{2} \oint_L ds \quad (\text{奇偶性}) \\ &= \frac{\pi R^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【方法 2】} \quad \oint_L x ds &= \bar{x} \cdot l \quad (\text{形心公式}) \\ &= \frac{\pi R^2}{2}. \end{aligned}$$

二、第二类曲线积分的计算

例 4. 设 L 为椭圆 $4x^2 + y^2 = 8x$ 沿逆时针方向, 则 $\oint_L (e^{y^2}) dx + (x + y^2) dy =$

【2023 武辅导讲义·数学一·P257 例 2】

解:

解 由格林公式得

$$\oint_L e^{y^2} dx + (x + y^2) dy = \iint_D (1 - 2ye^{y^2}) d\sigma = \iint_D d\sigma = S,$$

其中 D 是由 $4x^2 + y^2 = 8x$ 围成的椭圆域, S 为其面积.

该椭圆方程可改写为 $(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, 则其面积 $S = 2\pi$. 故

$$\oint_L e^{y^2} dx + (x + y^2) dy = 2\pi.$$

例 5. 求 $I = \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] dy$, 其中 C^* 是以 $A(1,1), B(2,2)$ 和 $E(1,3)$ 为顶点的三角形的正向边界线

【2023 李正元复习全书·数学一·P283 例 10.2】

解:

【分析】 直接用格林公式

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

求左端的曲线积分转化为求右端的二重积分, 若这个二重积分容易计算则达目的. D 是闭曲线 C 所围成的区域 (见图 10.4).

【解】 记 $I = \oint_C Pdx + Qdy$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = y^2.$$

记 D 为三角形区域 ABE , 则直接由格林公式得

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D y^2 dxdy.$$

用先 y 后 x 的积分顺序, $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq -x + 4\}$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dx \int_x^{-x+4} y^2 dy = \frac{1}{3} \int_1^2 y^3 \Big|_x^{-x+4} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 [(-x+4)^3 - x^3] dx \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_1^2 t^3 dt - \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^2 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} t^4 \Big|_1^2 - \frac{1}{4} \times 15 \right) = \frac{1}{12} (65 - 15) = \frac{25}{6}. \end{aligned}$$

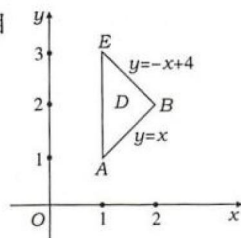


图 10.4

例 6. 计算 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以 $(1,0)$ 为中心, R 为半径的圆周 ($R \neq 1$) 取逆时针方向

【2023 武辅讲义·数学一·P255 例 5】

解:

解 本题中的 $P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}$, 除原点 $(0,0)$ 外, P 和 Q 都有连续一阶偏导数, 且 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2}$. 由例 4 的讨论知, 以下应分 $(0,0)$ 点在曲线 L 所围区域之内和之外两种情况进行计算.

(1) 若 $R < 1$, 则 $(0,0)$ 点不在曲线 L 围成区域内, 则 $I = 0$.

(2) 若 $R > 1$, 则 $(0,0)$ 点在曲线 L 所围区域内, 由例 4 中的讨论知, 此时沿绕原点的任一分段光滑闭曲线的积分相等, 根据本题被积函数分母的特点, 我们选 L 为椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 且取逆时针方向, 则

$$\begin{aligned} I &= \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \oint_L \frac{xdy - ydx}{1} = \oint_L xdy - ydx \\ &= \iint_D (1+1) d\sigma = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \pi. \end{aligned}$$

三、平面曲线积分与路径无关的问题

例 7. 设 $f(s)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有连续的导数, 计算

$$I = \oint_L \frac{1 + y^2 f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy,$$

其中 L 为从点 $A(3, \frac{2}{3})$ 到 $B(1,2)$ 的直线段

【2023 李正元复习全书·数学一·P292 例 10.12】

解:

【解法一】 先验算积分是否与路径无关. 若是, 便可选择适当的积分路径, 使积分化简.

令 $P(x, y) = \frac{1}{y}[1 + y^2 f(xy)]$, $Q(x, y) = \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1]$, 易验证:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 f(xy) + xy^3 f'(xy) - 1}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (y > 0)$$

这是单连通区域, 故积分与路径无关, 可以选择从 A 到 B 的任何一条位于 x 轴上方的曲线作为积分路径.

为了简化计算, 我们选择积分路径为折线 ACB , 其中 $C(1, \frac{2}{3})$, 见图 10.12.

注意到, $\overline{AC}$: $y = \frac{2}{3}$, x 从 3 到 1, $dy = 0$;

$\overline{CB}$: $x = 1$, y 从 $\frac{2}{3}$ 到 2, $dx = 0$.

$$\text{则 } I = \int_3^1 \frac{1 + \frac{4}{9} f(\frac{2}{3}x)}{\frac{2}{3}} dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{1}{y^2} [y^2 f(y) - 1] dy$$

$$= -\int_1^3 \frac{3}{2} dx - \int_1^3 \frac{2}{3} f(\frac{2}{3}x) dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y) dy - \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{dy}{y^2}$$

$$= -3 - \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y) dy + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y) dy + \frac{1}{y} \Big|_{\frac{2}{3}}^2 = -3 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -4.$$

【解法二】 求出被积表达式的原函数, 然后求原函数的改变量. 因为

$$\frac{1 + y^2 f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy = \frac{y dx - x dy}{y^2} + f(xy)(y dx + x dy)$$

$$= d\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy)d(xy) = d\left[\frac{x}{y} + \int_1^{xy} f(s) ds\right],$$

$$\text{所以 } I = \left[\frac{x}{y} + \int_1^{xy} f(s) ds\right] \Big|_{(3, \frac{2}{3})}^{(1, 2)} = \frac{1}{2} + \int_1^2 f(s) ds - \frac{9}{2} - \int_1^{\frac{2}{3}} f(s) ds = -4.$$

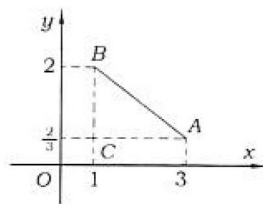


图 10.12

评注 本例中若只假设 $f(s)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 而没有假定它有连续的导数, 则【解法一】中通

过验证 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 来证明积分与路径无关的方法失效, 因为这时 P, Q 不一定有偏导数, 但【解法二】

用求原函数的方法证明积分与路径无关并求得积分值仍然有效.

例 8. 设积分 $I = \oint_L F(x, y)(y dx + x dy)$ 与路径无关, 且 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数的图形过点 $(1, 2)$ 且与坐标轴无交点, 其中 $F(x, y)$ 可微, 则 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数为

【2023 李 880 题 · 数学一 · P50 第 2 题】

解:

$$(2) xy = 2.$$

解 依题设, 记 $P(x, y) = F(x, y)y$, $Q(x, y) = F(x, y)x$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 即

$$F(x, y) + xF'_x(x, y) = F(x, y) + yF'_y(x, y),$$

整理得

$$-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx},$$

故 $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$, 得 $\ln |y| = -\ln |x| + \ln e^{C_1}$, 所以 $xy = C (C = \pm e^{C_1})$, 又过 $(1, 2)$ 点, 得 $C = 2$.

综上可知, 所求函数为 $xy = 2$.

【注】 设 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数为 $y = y(x)$, 则 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$.

例 9. 设 $Pdx + Qdy = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^x}{1+x^2}dy$, 求 $u(x, y)$, 使 $du = Pdx + Qdy$

【2023 李正元复习全书·数学一·P291 例 10.11】

解:

【解法一】 不定积分法. 由 $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2}$, 对 y 积分, 得 $u = \frac{e^y}{1+x^2} + C(x)$ (注意代替积分常数是 x 的任意函数 $C(x)$). 由 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} + C'(x) = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$, 得 $C'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, 进而 $C(x) = -\frac{1}{1+x^2} + C$. 因此, 原函数 $u(x, y) = \frac{e^y - 1}{1+x^2} + C$.

【解法二】 特殊路径积分法. 先判断积分是否与路径无关, 由

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2),$$

可知在全平面积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关.

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy,$$

这里取折线 OAM 为积分路径, $O(0,0), A(x,0), M(x,y)$ (见图 10.11).

$$\text{沿 } \overline{OA}: y = 0, dy = 0, \text{ 得 } \int_{\overline{OA}} Pdx + Qdy = \int_0^x P(x, 0)dx;$$

$$\text{沿 } \overline{AM}: dx = 0, \text{ 得 } \int_{\overline{AM}} Pdx + Qdy = \int_0^y Q(x, y)dy.$$

代入 P, Q 表达式得

$$u(x, y) = \int_0^x 0dx + \int_0^y \frac{e^y}{1+x^2}dy = \frac{e^y}{1+x^2} \Big|_0^y = \frac{e^y - 1}{1+x^2}.$$

这是一个原函数, 全体原函数是 $u(x, y) = \frac{e^y - 1}{1+x^2} + C$.

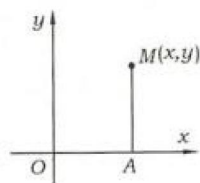


图 10.11

四、第一类曲面积分的计算

例 10. 计算 $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截下的部分 ($a > 0$)

【2023 武辅导讲义·数学一·P263 例 2】

解:

$$\text{解} \quad \iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS = \iint_{\Sigma} zx dS, \quad (\text{奇偶性})$$

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dxdy = \sqrt{2} dxdy,$$

$$\text{则} \quad \iint_{\Sigma} zx dS = \iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2} dxdy \quad (D: x^2 + y^2 \leq 2ax)$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^3 \cos \theta dr = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4.$$

例 11. 设曲面 $S: |x| + |y| + |z| = 1$, 则 $I = \oint_S (x + y + |z|) dS =$

【2023 李 880 题·数学一·P48 第 5 题】

解:

(5) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

解 由 S 关于 yOz 面, xOy 面对称, x 与 y 是奇函数, 故

$$\oint_S x dS = \oint_S y dS = 0.$$

又 S 关于直线 $x = y = z$ 对称, 由轮换性, 知

$$\begin{aligned} I &= \oint_S (x + y + |z|) dS = 0 + 0 + \frac{1}{3} \oint_S (|x| + |y| + |z|) dS \\ &= \frac{1}{3} \oint_S dS. \end{aligned}$$

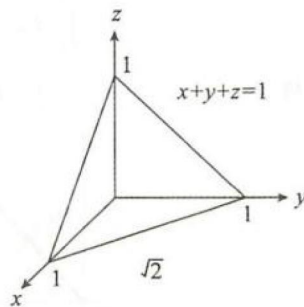


图 9-2

S 由八块等边三角形组成, 等边三角形边长为 $\sqrt{2}$ (如图 9-2),

故 S 的面积为 $8 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$, 所以 $I = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

例 12. 计算 $\iint_{\Sigma} (ax + by + cz + d)^2 dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

【2023 武辅导讲义 · 数学一 · P264 例 4】

解:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (ax + by + cz + d)^2 dS &= \iint_{\Sigma} (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) dS + \iint_{\Sigma} d^2 dS \\ &= \iint_{\Sigma} (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) dS + 4\pi R^2 d^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2) \iint_{\Sigma} x^2 dS + 4\pi R^2 d^2 \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS + 4\pi R^2 d^2 \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS + 4\pi R^2 d^2 \\ &= \frac{4\pi}{3} (a^2 + b^2 + c^2) R^4 + 4\pi R^2 d^2 \end{aligned}$$

五、第二类曲面积分的计算

例 13. 计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{xydz + z^2dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及平面 $z = R, z = -R (R > 0)$ 所围成立体表面外侧

【2023 武辅导讲义 · 数学一 · P265 例 1】

解:

【例 1】 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及平面 $z = R, z = -R (R > 0)$ 所围成立体表面外侧.

解 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 依次为 Σ 的上、下底和圆柱面部分, 则

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma_2} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_3} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} &= \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz - \iint_{D_{xy}} \frac{-\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - y^2} dy \int_{-R}^R \frac{dz}{R^2 + z^2} = \frac{\pi^2}{2} R, \end{aligned}$$

$$\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \frac{z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{D_{xy}} \frac{R^2 dx dy}{x^2 + y^2 + R^2} - \iint_{D_{xy}} \frac{R^2 dx dy}{x^2 + y^2 + R^2} = 0,$$

$$\iint_{\Sigma_3} \frac{z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = 0,$$

故原式 $= \frac{\pi^2}{2} R$.

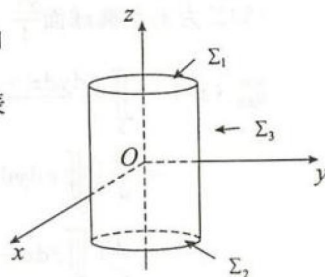


图 9-12

例 14. 设曲面 $S: z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$, 取上侧, 计算 $I = \iint_S (x+1) dy dz + z dx dy$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P50 第 15 题】

解:

(15) 解法 1 (投影法) 如图 9-11 所示.

$$I = \iint_S (x+1) dy dz + z dx dy \stackrel{\text{记}}{=} I_1 + I_2.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_S (x+1) dy dz = \iint_{S_{\text{前}}} (x+1) dy dz + \iint_{S_{\text{后}}} (x+1) dy dz \\ &= - \iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2} dy dz + \iint_{D_{yz}} (-\sqrt{z-y^2}) dy dz \\ &= -2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2} dy dz = -2 \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 \sqrt{z-y^2} dz \\ &= -2 \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (z-y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y^2}^1 dy = -2 \int_{-1}^1 \frac{2}{3} \cdot (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy \\ &= -\frac{4}{3} \cdot 2 \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy \stackrel{y=\sin t}{=} -\frac{4}{3} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt \\ &= -\frac{4}{3} \times 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$I_2 = \iint_S z dx dy = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr = 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

故 $I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$.

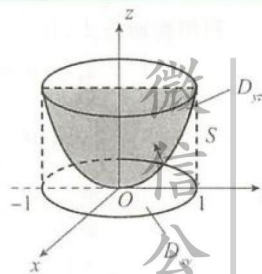


图 9-11

解法 2 (转换公式法) $\frac{dydz}{\cos \alpha} = \frac{dzdx}{\cos \beta} = \frac{dxdy}{\cos \gamma} = dS$.

曲面 $S: z = x^2 + y^2$ 上侧的法向量为 $\mathbf{n} = (-2x, -2y, 1)$, 故

$$\cos \alpha = \frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \cos \beta = \frac{-2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

所以 $dydz = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dxdy = (-2x)dxdy$, 故

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (x+1)dydz + z dxdy \\ &= \iint_S [(x+1) \cdot (-2x) + z] dxdy = \iint_S (-2x^2 + z) dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [-2x^2 + x^2 + y^2] dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 \sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta) r dr \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) d\theta \int_0^1 r^3 dr = -\frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{4} = 0. \end{aligned}$$

解法 3 (高斯公式法)

添加辅助面 $S_1: \begin{cases} z=1, \\ x^2+y^2 \leq 1, \end{cases}$ 取下侧, 则 $I = \oiint_{S+S_1} - \iint_{S_1}$. 又

$$\oiint_{S+S_1} (x+1)dydz + z dxdy = - \iiint_V (1+0+1) dV \xrightarrow{\text{柱坐标}} -2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^1 dz = -\pi.$$

$$\iint_{S_1} (x+1)dydz + z dxdy = 0 + \iint_{S_1} z dxdy = - \iint_{D_{xy}} 1 dxdy = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr = -\pi,$$

故 $I = -\pi - (-\pi) = 0$.

例 15. 设 S 为 $z = x^2 + y^2$ 介于 $z = 0$ 和 $z = 1$ 之间部分的下侧, 计算 $I = \iint_S x^2 dydz + z dxdy$

【2023 李 880 题 · 数学一 · P49 第 14 题】

解:

(14) 解法 1 如图 9-10 所示, 利用高斯公式.

添加曲面 $S_1: z = 1 (x^2 + y^2 \leq 1)$, 取上侧, 有

$$I = \oiint_{S+S_1} x^2 dydz + z dxdy - \iint_{S_1} x^2 dydz + z dxdy.$$

由于

$$\begin{aligned} \oiint_{S+S_1} x^2 dydz + z dxdy &= \iiint_V (2x+1) dV \\ &\xrightarrow{\text{柱面坐标}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^1 (2r \cos \theta + 1) dz = \frac{\pi}{2}, \\ \iint_{S_1} x^2 dydz + z dxdy &= \iint_{D_{xy}} 1 dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr = \pi, \end{aligned}$$

其中 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 故 $I = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$.

解法 2 投影法. $S: z = x^2 + y^2$ 下侧的法向量为 $\mathbf{n} = (2x, 2y, -1)$, 方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{2x}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2}}, \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2}}.$$

由 $\frac{dydz}{\cos \alpha} = \frac{dzdx}{\cos \beta} = \frac{dxdy}{\cos \gamma} = dS$ (转换公式), 可知

$$dydz = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dxdy = (-2x)dxdy,$$

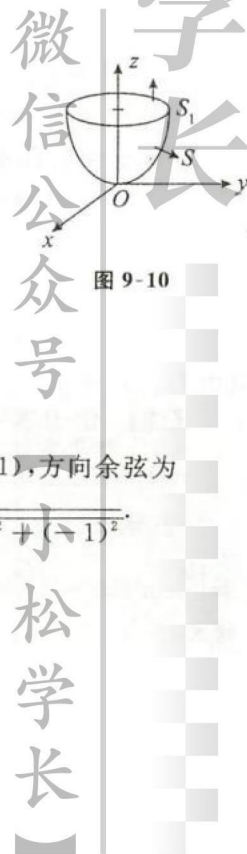


图 9-10

$$\text{故 } I = \iint_S x^2 dydz + z dx dy = \iint_S [x^2 \cdot (-2x) + z] dx dy = - \iint_{D_{xy}} (-2x^3 + x^2 + y^2) dx dy,$$

其中 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, x^3 为奇函数, 从而

$$I = 2 \iint_{D_{xy}} x^3 dx dy - \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = 0 - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr = -\frac{\pi}{2}.$$

【注】 此题若取 $S: z = x^2 + y^2$ 上侧, 则法向量取 $n = (-2x, -2y, 1)$.

小松学长

微信公众号【小松学长】

第八章 无穷级数

一、数项级数敛散性的判定

例 1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则

- (A) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - |u_n|)$ 都收敛.
 (B) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - |u_n|)$ 都发散.
 (C) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$ 收敛而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - |u_n|)$ 发散.
 (D) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$ 发散而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - |u_n|)$ 收敛.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P216 第 616 题】

解:

【分析】 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散. 又

$$u_n = \frac{1}{2}[(u_n + |u_n|) + (u_n - |u_n|)], \quad |u_n| = \frac{1}{2}[(u_n + |u_n|) - (u_n - |u_n|)],$$

再按级数的运算即知, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - |u_n|)$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,

若其中一个收敛, 另一个发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 均与已知矛盾, 因此它们都发散. 即应选 (B).

若熟悉评注中的结论, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 即可知 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm |u_n|)$ 均发散.

例 2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} \sin(n+k)$ (k 为常数)

- (A) 绝对收敛 (B) 条件收敛
(C) 发散 (D) 收敛性与 k 有关

【2023 李 880 题 · 数学一 · P43 第 7 题】

解:

解 已知级数为任意项级数, $\left| \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} \sin(n+k) \right| \leq \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$, 而

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} = \frac{2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} = \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}})},$$

故 $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ($n \rightarrow \infty$), 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 所以原级数绝对收敛, A 正确.

例 3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

- (A) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 收敛

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P59 第 1 题】

解:

解 方法一 令 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在,

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$, 其部分和为

$$S'_n = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_n + a_{n+1}) = 2S_n - a_1 + a_{n+1},$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2S_n - a_1 + a_{n+1}) = 2S - a_1$ 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 收敛, 应选(D).

方法二 取 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 由莱布尼兹审敛法得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散;

取 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, 由莱布尼兹审敛法得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散;

取 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 发散, 应选(D).

例 4. 证明: 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 条件收敛. [公众号: 小松学长]

【2023 张 1000 题 · 数学一 · P59 第 36 题】

解:

36. 【解析】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$ 是交错级数, 但不满足莱布尼茨判别条件.

因为 $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, 所以由比较判别法, 知 $\sum_{n=2}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 发散.

又因为

$$S_{2n} = \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+(-1)^k}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right),$$

由于上式每个括号都小于 0, 因此 $\{S_{2n}\}$ 单调递减, 再由

$$S_{2n} > \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} > -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

知 $\{S_{2n}\}$ 单调递减有下界, 故 $\{S_{2n}\}$ 收敛, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$, 易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + u_{2n+2}) = S + 0 = S.$$

所以原级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 从而级数收敛, 所以原级数条件收敛.

例 5. 设 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln(1 + \frac{1}{n})}$ ($n = 1, 2, \cdots$), 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性.

【2023 张 1000 题 · 数学一 · P64 第 47 题】

解:

38. 【解析】 直接利用不等式: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ ($x > 0$).

显然, $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \cdots$), 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数. 进一步, 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{1+n}} \\ &= \frac{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(1+n)}} = \frac{1}{(\sqrt{1+n} + \sqrt{n})\sqrt{n(1+n)}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}, \end{aligned}$$

根据比较判别法, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ 收敛可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

二、求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域

例 6. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛半径为_____

【2023 李 660 题 · 数学一 · P204 第 579 题】

解:

【分析】 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛, 则 $x=1$ 为该幂级数收敛区间的端点,

则其收敛半径为 1, 而幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 收敛半径也为 1.

例 7. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛域为 $[-1, 3]$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛域为_____

【2023 李 880 题 · 数学一 · P43 第 2 题】

解:

解 由 $-1 \leq x \leq 3$, 知 $-2 \leq x-1 \leq 2$, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛域为 $[-2, 2]$, 令 $t = x^2$, 于是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛域为 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

例 8. 设数列 $\{a_n\}$ 严格单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 无界, 则幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 的收敛域为

(A) $(-2, 2]$ (B) $[-2, 2]$ (C) $[1, 3)$ (D) $(1, 3]$

【2023 张 1000 题 · 数学一 · P62 第 16 题】

解:

16. (C) 【解析】 所给幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 的收敛区间必定是以 $x_0 = 2$ 为中心的对称区间, 可知应排除 (A), (B).

当 $x=3$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 由于 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 无界, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 在 $x=3$ 处发散;

当 $x=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 为交错级数 (因为数列 $\{a_n\}$ 严格单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 可知 $a_n > 0$), 由莱布尼茨定理知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

综上所述, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 的收敛域为 $[1, 3)$. 故选 (C).

例 9. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 在 $x=-2$ 处条件收敛, $a_n > 0, n=0, 1, 2, \dots$, 则

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^{2n+1}$ 的收敛域为

(A) $(1, 3)$ (B) $(0, 4)$ (C) $[-2, 2]$ (D) $[-4, 4]$

【2023 张 1000 题 · 数学一 · P62 第 19 题】

解:

19. (B) 【解析】因为 $a_n > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-4)^n$ 条件收敛, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = 4$, 且收敛域为 $[-4, 4)$. 由此可知, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 的收敛半径 $R = 2$, 收敛域为 $(-2, 2)$. 故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^{2n+1}$ 的收敛域为 $(0, 4)$. 应选(B).

例 10. 将 $f(x) = \frac{1}{x^2-3x-4}$ 展开为 $x-1$ 的幂级数, 并指出收敛区间.

【2023 张 1000 题 · 数学一 · P65 第 51(1)题】

解:

$$42. \text{【解析】(1) 因为 } \frac{1}{x^2-3x-4} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right), \text{ 且}$$

$$\frac{1}{x-4} = \frac{1}{(x-1)-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-1}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n, x \in (-2, 4),$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x-1)+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-1}{2} \right)^n, x \in (-1, 3).$$

所以

$$\frac{1}{x^2-3x-4} = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] (x-1)^n, x \in (-1, 3).$$

例 11. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} x^{n-1}$ 的收敛域.

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P64 第 31 题】

解:

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2}$, 则收敛半径为 $R = 2$,

当 $x = -2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{2^n \cdot n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛;

当 $x = 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2^n \cdot n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故幂级数的收敛域为 $[-2, 2)$.

三、求幂级数的和函数及数项级数的和

例 12. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n$, 则和函数 $S(x) =$

- (A) $\frac{\ln(1-x)}{1-x}, |x| < 1$ (B) $\frac{\ln(1-x)}{x-1}, |x| < 1$
 (C) $\frac{\ln(1+x)}{1+x}, |x| < 1$ (D) $\frac{\ln(1+x)}{x-1}, |x| < 1$

【2023 张 1000 题 · 数学一 · P66 第 5 题】

解:

5. (B) 【解析】令 $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, 则

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n, u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} (n=2, 3, \cdots),$$

于是

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} u_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \\ &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \\ &= xS(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \end{aligned}$$

故

$$S(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}, |x| < 1.$$

例 13. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx}$ 的收敛域及和函数.

【2023 李 880 题 · 数学一 · P47 第 14 题】

解:

(14) 解 所给级数不是幂级数.

由 $\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx} = x \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n$, 令 $e^{-x} = t$, 而 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, $t \in (-1, 1)$, 故当 $-1 < e^{-x} < 1$ 时 ($e^{-x} > 0$ 恒成立), 即 $x > 0$ 时, 原级数收敛, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx} = \frac{x}{1-e^{-x}} = \frac{x e^x}{e^x - 1}$, $x \in (0, +\infty)$.

当 $x = 0$, 级数和为 0, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx} = \begin{cases} \frac{x e^x}{e^x - 1}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

例 14. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1}$ 的和

【2023 张 1000 题 · 数学一 · P65 第 54(2)题】

解:

(2) 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, 若该幂级数的收敛域包括 $x = \frac{1}{2}$, 则原式 $= S(\frac{1}{2})$.

该幂级数为不缺项情形, $a_n = n$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1 = \rho,$$

可知收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$, 易知在 $x = \pm 1$ 处, 级数发散, 故收敛域为 $(-1, 1)$.

在收敛域 $(-1, 1)$ 内,

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \Big|_0^x = \frac{x}{1-x}, \\ S(x) &= \left[\int_0^x S(t) dt \right]' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, x \in (-1, 1), \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

例 15. 设曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ 所围成区域的面积为 $a_n (n = 1, 2, \cdots)$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 的和

【2023 张 1000 题 · 数学一 · P65 第 60 题】

解:

52.【解析】曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ 的交点为 $(0,0)$ 与 $(1,1)$, 所以两曲线围成区域的面积为

$$a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

因为级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛, 所以每两项加括号所成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right)$ 也收敛, 且二者的和相等, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 1 - \ln 2.$$

四、傅里叶级数

例 16. 将 $f(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 2 \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ 展开为以 2 为周期的傅里叶级数

【2023 李 880 题 · 数学一 · P44 第 12 题】

解:

$$\begin{aligned} (12) \text{ 解} \quad a_0 &= \frac{1}{1} \int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 dx + \int_2^3 (3-x) dx = \frac{3}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{1} \int_1^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{1} dx = \int_1^2 \cos n\pi x dx + \int_2^3 (3-x) \cos n\pi x dx \\ &= \frac{1}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{2}{n^2 \pi^2}, & n \text{ 为奇数,} \end{cases} \\ b_n &= \frac{1}{1} \int_1^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{1} dx = \int_1^2 \sin n\pi x dx + \int_2^3 (3-x) \sin n\pi x dx = \frac{(-1)^n}{n\pi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \sin n\pi x, \end{aligned}$$

$$\text{由收敛定理, 其和函数为 } S(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 2, \\ 3-x, & 2 < x < 3, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, x = 3. \end{cases}$$

例 17. 将 $f(x) = 1 - x^2 \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right)$ 展开为傅里叶级数

【2023 张 1000 题 · 数学一 · P66 第 65 题】

解:

65. 【解析】 $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理. 由于 $f(x)$ 为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 内的偶函数, 因此 $l = \frac{1}{2}$, 且

$$b_n = 0 (n = 1, 2, \dots), a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2) dx = \frac{11}{6},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2) \cos 2n\pi x dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \pi^2} (n = 1, 2, \dots).$$

由于 $f(x) = 1-x^2$ 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 内连续, 因此在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 内有

$$f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos 2n\pi x.$$

由于 $f(-\frac{1}{2}^+) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} (1-x^2) = \frac{3}{4}, f(\frac{1}{2}^-) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} (1-x^2) = \frac{3}{4},$

故在 $x = -\frac{1}{2}$ 与 $x = \frac{1}{2}$ 处傅里叶级数收敛于 $\frac{f(-\frac{1}{2}^+) + f(\frac{1}{2}^-)}{2} = \frac{3}{4} = f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$, 即在 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 上有

$$f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos 2n\pi x.$$

例 18. 将 $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P64 第 41 题】

解:

41. 【解】函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足狄里克莱充分条件, 将 $f(x)$ 进行周期延拓,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{4},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2} \right) (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = 0 (n = 1, 2, \dots),$$

$$x = \pm \frac{\pi}{2} \text{ 时, 傅里叶级数收敛于 } \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) \right] = \frac{\pi}{4},$$

则

$$f(x) = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2} \right) \cos nx \quad \left(-\pi \leq x \leq \pi \text{ 且 } x \neq \pm \frac{\pi}{2} \right).$$

第九章 常微分方程

一、一阶微分方程

例 1. 微分方程 $(y - x \sin x)dx + xdy = 0$ 的通解为

【2023 李 880 题 · 数学一 · P38 第 1 题】

解:

$$(1) y = \frac{1}{x}(\sin x - x \cos x + C) (C \text{ 为任意常数}).$$

解 原方程变形为 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \sin x$, 为一阶线性微分方程, 故通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right] \\ &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \sin x \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) \\ &= e^{-\ln|x|} \left(\int e^{\ln|x|} \sin x dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\int x \sin x dx + C \right) = \frac{1}{x}(\sin x - x \cos x + C), \end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

例 2. 当 $y > 0$ 时, 微分方程 $(x - 2xy - y^2)dy + y^2dx = 0$ 的通解为

【2023 李 660 题 · 数学一 · P31 第 79 题】

解:

79 【答案】 $x = y^2(Ce^{\frac{1}{y}} + 1)$, C 为任意常数

【分析】 当 $y > 0$ 时方程可改写为 $\frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y}\right)x = 1$, 这是以 y 为自变量, x 为未知函数的一阶线性微分方程.

$$\text{两边乘 } \mu(y) = e^{\int (\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y}) dy} = e^{-\frac{1}{y} - 2 \ln y} = \frac{1}{y^2} e^{-\frac{1}{y}} \text{ 得}$$

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y^2} e^{-\frac{1}{y}} x \right) = \frac{1}{y^2} e^{-\frac{1}{y}}$$

积分得

$$\frac{1}{y^2} e^{-\frac{1}{y}} x = \int \frac{1}{y^2} e^{-\frac{1}{y}} dy + C = e^{-\frac{1}{y}} + C$$

通解为 $x = y^2 e^{\frac{1}{y}} (C + e^{-\frac{1}{y}}) = y^2 (Ce^{\frac{1}{y}} + 1)$, 其中 C 是任意常数.

【评注】 此题给我们的启示是: 在解微分方程时, 变量 x, y 地位可看作相同的, 既可将 y 看作 x 的函数, 又可把 x 看作 y 的函数.

例 3. 微分方程 $y' - xe^{-y} + \frac{1}{x} = 0$ 的通解为

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P130 第 3 题】

解:

3. (答案) $e^y = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right)$ (C 为任意常数).

解 由 $y' - x e^{-y} + \frac{1}{x} = 0$, 得 $e^y y' - x + \frac{1}{x} e^y = 0$, 即 $\frac{d(e^y)}{dx} + \frac{1}{x} e^y = x$,

令 $z = e^y$, 则 $\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x} z = x$, 解得 $z = \left(\int x e^{\frac{1}{x}} dx + C \right) e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right)$,

所以原方程的通解为 $e^y = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right)$ (C 为任意常数).

二、高阶常系数线性微分方程的求解

例 4. 设二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = (cx + d)e^{2x}$ 有特解 $y = 2e^x + (x^2 - 1)e^{2x}$, 求该方程的通解, 并求 a, b, c, d 的值

【2023 李 880 题 · 数学一 · P40 第 6 题】

解:

(4) 解 方程的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x), \quad \text{①}$$

其中 $y_1(x), y_2(x)$ 是对应齐次微分方程的两个线性无关的解, $y^*(x)$ 是非齐次微分方程的特解.

若 $y^*(x) = (Ax + B)e^{2x}$, 则 $\lambda = 2$ 不是特征根;

若 $y^*(x) = x(Ax + B)e^{2x}$, 则 $\lambda = 2$ 是单特征根.

由已知特解 $y = 2e^x + (x^2 - 1)e^{2x} = 2e^x - e^{2x} + x^2 e^{2x}$, 应为 ① 式中取定常数所得, 从而

$$y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{2x}, y^*(x) = x^2 e^{2x},$$

因此 $r = 1, r = 2$ 为特征根, 由根与系数的关系, 知 $a = -(1 + 2) = -3, b = 1 \times 2 = 2$, 所以原方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x^2 e^{2x}$ (C_1, C_2 为任意常数).

将 $y^* = x^2 e^{2x}$ 代入原方程, 可得

$$e^{2x}(4x^2 + 8x + 2) - 3e^{2x}(2x^2 + 2x) + 2x^2 e^{2x} = (cx + d)e^{2x},$$

即 $2x + 2 = cx + d$, 得 $c = 2, d = 2$.

综上可得, $a = -3, b = 2, c = 2, d = 2$.

例 5. 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x + e^{-x}, y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解, 则此微分方程为

【2023 李 660 题 · 数学一 · P32 第 84 题】

解:

84 【答案】 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$

【分析】 $y_1 - y_3 = e^{-x}$ 与 $y_1 - y_2 = e^{2x} - e^{-x}$ 都是对应齐次方程的解, $(y_1 - y_3) + (y_1 - y_2) = e^{2x}$ 也是对应齐次方程的解, e^{-x} 与 e^{2x} 是对应齐次方程两个线性无关的特解; 而 $y_2 - e^{-x} = xe^x$ 是非齐次方程的解.

下面求该微分方程:

方法 1 由 e^{-x}, e^{2x} 是对应齐次方程线性无关的两个解知 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ 是特征方程的两个根, 从而特征方程为 $(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$ 即 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, 故对应齐次微分方程为

$$y'' - y' - 2y = 0$$

设所求非齐次方程为 $y'' - y' - 2y = f(x)$, 把非齐次解 xe^x 代入, 使得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2(xe^x) = (1 - 2x)e^x$$

于是所求方程为 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$.

方法 2 由前面求得该微分方程的一个特解 xe^x 及相应的齐次方程两个线性无关的解: e^{-x}, e^{2x} , 于是该微分方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^x$, 求出

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} + (x+1)e^x, y'' = C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{2x} + (x+2)e^x$$

并消去 C_1, C_2

$$y'' - y' = 2(C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^x) - 2xe^x + e^x = 2y + (1 - 2x)e^x$$

使得微分方程 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$.

例 6. 微分方程 $y'' - 2y' = 2x + \cos x$ 的通解为

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P130 第 7 题】

解:

【答案】 $C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}(x^2 + x) - \frac{1}{5}(\cos x + 2\sin x).$

【解】 $y'' - 2y' = 0$ 的通解为 $y = C_1 + C_2 e^{2x}$;

令 $y'' - 2y' = 2x$ 的特解为 $y_1 = x(ax + b) = ax^2 + bx$, 代入得 $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$;

令 $y'' - 2y' = \cos x$ 的特解为 $y_2 = A \cos x + B \sin x$, 代入得 $A = -\frac{1}{5}, B = -\frac{2}{5}$,

故原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}(x^2 + x) - \frac{1}{5}(\cos x + 2\sin x).$$

第二部分 线性代数

第一章 行列式

一、数字型行列式的计算

例 1.
$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【2023 李 660 题 • 数学一 • P100 第 281 题】

解：

【分析】 除去主对角线，第二、三、四列元素一样是爪型行列式，把第一行的 -1 倍分别加到其他各行，有

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 84$$

例 2.
$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【2023 张 1000 • 数学一 • P88 第 8 题】

解：

8. $a(a+x)^n$ 【解析】按第一行展开，有

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax^{n-1} & ax^{n-2} & ax^{n-3} & \cdots & a \end{vmatrix}_n + (-1)^{1+2+1} x \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax^{n-1} & ax^{n-2} & ax^{n-3} & \cdots & a \end{vmatrix}_n \\ &= (a+x)D_n = (a+x)^2 D_{n-1} = \cdots = (a+x)^n D_1 = a(a+x)^n, \end{aligned}$$

其中 $D_1 = a$.

例 3. 计算
$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n).$$

【2023 汤 1800 题 • 数学一 • P143 第 4 题】

解:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + a_n D_{n-1} \\ &= a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + a_n (a_1 a_2 \cdots a_{n-2} + a_{n-1} D_{n-2}) \\ &= a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + a_1 a_2 \cdots a_{n-2} a_n + a_n a_{n-1} D_{n-2} \\ &= \cdots = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_n} + \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_{n-1}} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_2} + a_n a_{n-1} \cdots a_2 (1 + a_1) \\ &= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right). \end{aligned}$$

二、抽象型行列式的计算

例 4. 已知 A 是三阶矩阵且 $(A - E)^{-1} = A^2 + A + E$, 则 $|A| =$
(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 8

【2023 李 660 题 • 数学一 • P123 第 349 题】

解:

【分析】 因 $(A - E)^{-1} = A^2 + A + E$, 有

$$(A - E)(A^2 + A + E) = E, \text{ 即 } A^3 = 2E$$

那么 $|A|^3 = |A^3| = |2E| = 2^3 |E| = 2^3$, 故 $|A| = 2$.

例 5. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 $|A| = 2, |B| = -3$, 则 $|-A^T B^{-1}| =$
【2023 李 660 题 • 数学一 • P100 第 283 题】

解:

【分析】 由 $|kA| = k^n |A|$, $|AB| = |A| \cdot |B|$, $|A^T| = |A|$, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 有

$$\begin{aligned} |-A^T B^{-1}| &= (-1)^n |A^T B^{-1}| = (-1)^n |A^T| \cdot |B^{-1}| \\ &= (-1)^n |A| \cdot \frac{1}{|B|} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

例 6. 设 A 是 n 阶矩阵, α, β 是 n 维列向量, a, b, c 是实数, 已知 $|A| = a$,

$$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} = 0, \text{ 则 } \begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【2023 张 1000 • 数学一 • P86 第 13 题】

解:

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & \alpha + 0 \\ \beta^T & b + c - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & 0 \\ \beta^T & c - b \end{vmatrix} \\ &= 0 + (c - b) |A| = (c - b)a. \end{aligned}$$

例 7. 设 A 是 3 阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $|(2A)^{-1} - 2A^*| =$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{4}$

【2023 李林 880 题 • 数学一 • P55 第 3 题】

解:

解法 1 由 $A^* = |A| A^{-1} = \frac{1}{2} A^{-1}$, 则

$$\begin{aligned} |(2A)^{-1} - 2A^*| &= \left| \frac{1}{2} A^{-1} - 2 \cdot \frac{1}{2} A^{-1} \right| = \left| \frac{1}{2} A^{-1} - A^{-1} \right| \\ &= \left| -\frac{1}{2} A^{-1} \right| = \left(-\frac{1}{2} \right)^3 |A^{-1}| \\ &= -\frac{1}{8} |A|^{-1} = -\frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

解法 2 由 $A^{-1} = |A|^{-1} A^* = 2A^*$, 则

$$\begin{aligned} |(2A)^{-1} - 2A^*| &= \left| \frac{1}{2} \cdot 2A^* - 2A^* \right| \\ &= |A^* - 2A^*| = |-A^*| = (-1)^3 |A^*| \\ &= -|A|^{3-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 8. 设 A 是 3 阶方阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_3 + \alpha_1$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$

【2023 李林 880 题 • 数学一 • P55 第 5 题】

解:

解法 1 利用行列式的性质, 由 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)$, 可知

$$\begin{aligned} |A| |(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| &= |(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)| \\ &= 2 |(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)| \\ &= 2 |(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2)| \\ &= 2 |(\alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2)| = 2 |(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)|. \end{aligned}$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故 $|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| \neq 0$, 所以 $|A| = 2$.

解法 2 利用矩阵的乘法及相似矩阵的性质.

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 由已知, P 可逆, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 故 $AP = PB$, 即 $P^{-1}AP = B$, 所以

$$|A| = |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

[公众号：小松学长]

小松学长

微信公众号【小松学长】



第二章 矩阵

一、矩阵运算、初等变换

例 1. 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^5 =$ _____

【2023 李 660 题 · 数学一 · P 102 第 287 题】

解:

【分析】 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是两行互换的初等矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n} = E, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 如 $r(A) = 1$, 则 $A^n = l^{n-1}A, l = \sum a_{ii}$.

例 2. 已知 A 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵, 且 $A^3 = E$, 则 $\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}^{98} =$
 (A) $\begin{bmatrix} A & E \\ O & A \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} A & O \\ E & A \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -A & O \\ O & -A \end{bmatrix}$

【2023 张 1000 · 数学一 · P94 第 4 题】

解:

4. (D) 【解析】记 $P = \begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}$, 则 $P^2 = \begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & O \\ O & -A \end{bmatrix}$, 故

$$P^{98} = (P^2)^{49} = \begin{bmatrix} -A^{49} & O \\ O & -A^{49} \end{bmatrix},$$

又

$$A^{49} = A^{3 \times 16 + 1} = (A^3)^{16}A = EA = A,$$

所以 $\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}^{98} = \begin{bmatrix} -A & O \\ O & -A \end{bmatrix}$. 答案选 (D).

例 3. 设 A 为三阶可逆矩阵, 将 A 的第 1 行乘以 -2 得到矩阵 B , 则

(A) A^{-1} 的第 1 行乘以 -2 得到矩阵 B^{-1} .

(B) A^{-1} 的第 1 列乘以 $-\frac{1}{2}$ 得到矩阵 B^{-1} .

(C) A^{-1} 的第 1 行乘以 2 得到矩阵 B^{-1} .

(D) A^{-1} 的第 1 列乘以 $\frac{1}{2}$ 得到矩阵 B^{-1} .

【2023 李 660 题 · 数学一 · P128 第 366 题】

解:

【分析】 由已知条件, 有

$$\begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$\text{那么 } \mathbf{B}^{-1} = \left(\begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} \right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

所以 $\mathbf{A}^{-1}$ 的第一列乘以 $-\frac{1}{2}$ 得矩阵 $\mathbf{B}^{-1}$, 故应选 B.

二、伴随矩阵、可逆矩阵

例 4. 设 α, β 为 n 维单位列向量, P 是 n 阶可逆矩阵, 则下列矩阵中可逆的是.

(A) $\mathbf{A} = \mathbf{E} - \alpha\alpha^T$

(B) $\mathbf{B} = \alpha^T P P^{-1} - \alpha\alpha^T$

(C) $\mathbf{C} = \alpha^T P^{-1} \beta P - \beta\alpha^T$

(D) $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \beta\beta^T$

【2023 张 1000 · 数学一 · P91 第 7 题】

解:

方法三 由题设条件, n 维单位列向量 α, β, n 阶可逆矩阵 P 是任意的, 若取特殊的 α, β, P , 使矩阵不可逆, 则该选项即可排除.

对 (A) 取 $\alpha = [1, 0, 0]^T$, 则 $\mathbf{E} - \alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}$ 不可逆.

对 (B) 取 $\alpha = [1, 0, 0]^T, P = \mathbf{E}$; 对 (C) 取 $\alpha = \beta = [1, 0, 0]^T, P = \mathbf{E}$. $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ 不可逆, 即可排除 (B), (C), 故应选 (D).

例 5. 已知三阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵为 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则矩阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵

$\mathbf{A}^*$ 的逆矩阵 $(\mathbf{A}^*)^{-1} =$ _____

【2023 李 660 题 · 数学一 · P103 第 290 题】

解:

【分析】 由 $AA^* = |A|E$, 有

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = |A^{-1}|A$$

因为 $(A^{-1})^{-1} = A$, 求出 A^{-1} 的逆矩阵就是求出矩阵 A .

$$\begin{aligned}(A^{-1} | E) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \\ &= (E | A)\end{aligned}$$

可知 $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. 又因 $|A^{-1}| = 2$, 故

$$(A^*)^{-1} = |A^{-1}|A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

例 6. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ (a, b 均不为 0), 且 $r(A^*) = 1$, 则必有

(A) $a = b$ (B) $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$ (C) $a + 2b = 0$ (D) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P59 第 2 题】

解:

解 由 $r(A^*) = 1$, 知 $r(A) = n - 1 = 3 - 1 = 2$, 故 $|A| = 0$. 又

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a + 2b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a - b & 0 \\ 1 & 0 & a - b \end{vmatrix} = (a + 2b)(a - b)^2 = 0,$$

得 $a + 2b = 0$ 或 $a = b$.又当 $a = b$ 时, $r(A) = 1 \neq 2$, 故 $a + 2b = 0$ (由 a, b 均不为零, 可知 $a + 2b = 0$ 已经蕴含 $a \neq b$), 故 C 正确.

例 7. 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} =$

【2023 李 660 题 · 数学一 · P104 第 293 题】

解:

【分析】 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} &= 3A^{-1} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

记住初等矩阵逆矩阵的 3 个公式, 以及左乘行变换右乘列变换的法则.

三、矩阵的秩

例 8. 已知 A 是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = r < \min\{m, n\}$, 则 A 中

- (A) 没有等于零的 $r-1$ 阶子式, 至少有一个不为零的 r 阶子式
- (B) 有不为零的 r 阶子式, 所有 $r+1$ 阶子式全为零
- (C) 有等于零的 r 阶子式, 没有不为零的 $r+1$ 阶子式
- (D) 所有 r 阶子式不等于零, 所有 $r+1$ 阶子式全为零

【2023 张 1000 · 数学一 · P96 第 1 题】

解:

1. (B) 【解析】由矩阵的秩的定义知, $r(A) = r$, 即 r 是 A 中最大的不等于零的子行列式的阶数, 故 A 中有不等于零的 (至少一个) r 阶子式, 而 r 阶以上子式都等于零, 即所有 $r+1$ 阶子式全为零即可, 故选 (B), 而 (A), (C), (D) 均不成立.

例 9. 设 A 是 3 阶方阵, 有 3 个特征值为 0, 1, 1, 且不相类似于对角矩阵, 则

$$r(E - A) + r(A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

【2023 张 1000 · 数学一 · P97 第 6 题】

解:

6.4 【解析】因 $\lambda = 0$ 是特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的单根, 所以对应的线性无关的特征向量有且只有一个, 即 $Ax = 0$ 的基础解系只有一个非零解, 故 $r(A) = 2$.

因 $\lambda = 1$ 是二重特征值, 又 A 不相类似于对角矩阵, 所以对应的线性无关的特征向量也只有一个, 即

$$1 = 3 - r(E - A),$$

即

$$r(E - A) = 2.$$

因此

$$r(A) + r(E - A) = 4.$$

例 10. 设 A, B 都是四阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则必有

- (A) 若 $r(A) = 1$, 则 $r(B) = 3$.
- (B) 若 $r(A) = 2$, 则 $r(B) = 2$.
- (C) 若 $r(A) = 3$, 则 $r(B) = 1$.
- (D) 若 $r(A) = 4$, 则 $r(B) = 1$.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P130 第 370 题】

解:

【分析】 因 A, B 均四阶非零矩阵, 那么 $1 \leq r(A) \leq 4, 1 \leq r(B) \leq 4$.

又 $AB = O$, 有 $r(A) + r(B) \leq 4$.

所以 $r(A) = 3$ 时, 必有 $r(B) = 1$, 即 (C) 正确.

当 $r(A) = 4$ 时, 只有 $r(B) = 0$, (D) 一定不可能.

当 $r(A) = 1$ 时, $r(B)$ 可能为 1, 可能为 2, 也可能为 3.

即 (A) 不一定必成立.

例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, B 可以是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

同理 (B) 也不是必然的.

小松学长

微信公众号【小松学长】

例 11. 设 α, β 是 3 维单位列向量, 且 α 与 β 正交, 求 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ 的特征值及 $r(A)$.

【李林 108 题 · 数学一 · P84 第 3 题】

解:

(3) 解 由已知, $\alpha^T\alpha = 1, \beta^T\beta = 1, \alpha^T\beta = \beta^T\alpha = 0$, 则

$$A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha(\alpha^T\alpha) + \beta(\beta^T\alpha) = 2\alpha,$$

$$A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = 2\alpha(\alpha^T\beta) + \beta(\beta^T\beta) = \beta,$$

故 A 有特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$.

又因为 $\alpha\alpha^T$ 与 $\beta\beta^T$ 的秩均为 1, 所以

$$r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(2\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2 < 3,$$

则 $|A| = 0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2 \cdot 1 \cdot \lambda_3$, 故 $\lambda_3 = 0$.

又由 $A^T = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)^T = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T = A$, 知 A 是实对称矩阵, 则

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \Lambda,$$

故 $r(A) = r(\Lambda) = 2$.

例 12. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & -1 \\ 4 & 2 & a \end{pmatrix}$, $B \neq O$ 为三阶矩阵, 且 $BA = O$, 则 $r(B) =$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P143 第 4 题】

解:

解 $BA = O \Rightarrow r(A) + r(B) \leq 3$, 因为 $r(A) \geq 2$, 所以 $r(B) \leq 1$, 又因为 $B \neq O$, 所以 $r(B) = 1$.

第三章 向量

一、向量的线性表示

例 1. 已知 $\beta_1 = (4, -2, a)^T, \beta_2 = (7, b, 4)^T$ 可由 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (-2, 1, -1)^T$ 线性表示, 则

- (A) $a = 2, b = -3$. (B) $a = -2, b = 3$. (C) $a = 2, b = 3$. (D) $a = -2, b = -3$.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P135 第 387 题】

解:

【分析】 β_1, β_2 可由 α_1, α_2 线性表示 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \beta_1, y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 = \beta_2$ 都有解.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -2 & b \\ 3 & -1 & a & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -10 & b-14 \\ 0 & 5 & a-12 & -17 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -10 & b-14 \\ 0 & 0 & a-2 & -b-3 \end{array} \right]$$

所以 $a = 2, b = -3$.

例 2. 设 n 维向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k (k < n)$ 线性无关, 则 n 维向量组 (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 也线性无关的充要条件是

- (A) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 线性表示
(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 线性表示
(C) 向量组 (I) 与向量组 (II) 等价
(D) 矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ 与 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ 等价

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P63 第 4 题】

解:

解 对于 A: 在选项 A 的条件下, 可得 $r(\text{II}) \leq r(\text{I})$, 不能保证 $r(\text{II}) = r(\text{I})$, 故不能推得 (II) 线性无关.

对于 B: 由 $k \geq r(\text{II}) \geq r(\text{I}) = k$, 得 $r(\text{II}) = k$, 故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 线性无关, 选项 B 的条件是充分条件, 但不是必要条件, 如 (I) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (II) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 均线性无关, 但 (I) 不能由 (II) 线性表示.

对于 C: 由 (I) 与 (II) 等价, 即 (I) 与 (II) 可互为线性表示, 故 C 不是必要条件.

对于 D: 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ 与 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ 等价是指: A 经过有限次初等变换化为 B , 故矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是 $r(A) = r(B)$.

在 D 的条件下, 可知 $r(A) = r(B)$, 又 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 线性无关, 故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 线性无关.

反之, 若 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 线性无关, 故 $r(\text{II}) = r(\text{I}) = k$, 即 $r(A) = r(B) = k$, 所以 A 与 B 等价.

例 3. 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 经初等行变换化为矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 则.

- (A) β_4 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示
(B) β_4 能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 但表示法不唯一
(C) β_4 能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 且表示法唯一
(D) β_4 能否由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示不能确定

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P146 第 2 题】

解:

解 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 所以 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示, 又 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 经过有限次初等行变换化为 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, 所以方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \alpha_4$ 与 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = \beta_4$ 是同解方程组, 因为方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \alpha_4$ 有唯一解, 所以方程组 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = \beta_4$ 有唯一解, 即 β_4 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 唯一线性表示, 选(C).

例 4. 设 $\alpha_1 = [1, 0, -1, 2]^T, \alpha_2 = [2, -1, -2, 6]^T, \alpha_3 = [3, 1, t, 4]^T, \beta = [4, -1, -5, 10]^T$, 已知 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 则 $t =$ _____

【2023 张 1000 · 数学一 · P105 第 7 题】

解:

7. -3 【解析】由

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & t & -5 \\ 2 & 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t+3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t+3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

知若 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 则 $t = -3$.

二、向量组的线性相关和线性无关

例 5. 设 n 阶矩阵 A , 则 $|A| = 0$ 的充分必要条件是

- (A) A 的列向量线性相关.
 (B) A 的列向量线性无关.
 (C) A 中每一个列向量都可由其他列向量线性表示.
 (D) A 中一定有 2 个列向量坐标成比例.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P133 第 379 题】

解:

【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)x = 0$ 有非零解
 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$

故(A) 正确, (C)(D) 均为充分条件, 不是必要的.

例 6. 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 则下列命题中正确的是

- (A) 向量组中任意 $r-1$ 个向量都线性无关.
 (B) 向量组中任意 r 个向量都线性无关.
 (C) 向量组中任意 $r-1$ 个向量都线性相关.
 (D) 向量组中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P137 第 391 题】

解:

【分析】 按向量组秩的定义

 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组有 r 个向量 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在 r 个向量线性无关而任意 $r+1$ 个必线性相关,

故应选(D).

例如向量组 $(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$ 的秩为 3, 包含零向量的两个或三个向量组成的向量组线性相关, (A)(B) 都不正确.又如向量组 $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (1,1,1,0)$ 的秩为 3, 任何两个向量都线性无关, (C) 不正确.例 7. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且表达式的系数全不为零. 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 中任意 s 个向量均线性无关.

【2023 张 1000 · 数学一 · P105 第 16 题】

解:

16. 【解析】用反证法. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 中存在 s 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_s, k$, 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{i-1} \alpha_{i-1} + k_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + k_s \alpha_s + k \beta = 0. \quad (*)$$

另一方面, 由题设有

$$\beta = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \dots + l_i \alpha_i + \dots + l_s \alpha_s,$$

其中 $l_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, s$, 代入 (*) 式, 得

$$(k_1 + k l_1) \alpha_1 + (k_2 + k l_2) \alpha_2 + \dots + (k_{i-1} + k l_{i-1}) \alpha_{i-1} + k l_i \alpha_i + (k_{i+1} + k l_{i+1}) \alpha_{i+1} + \dots + (k_s + k l_s) \alpha_s = 0.$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 从而有 $k l_i = 0$, 又 $l_i \neq 0$, 得 $k = 0$, 从而由 (*) 式得 $k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_s$ 均为零, 矛盾.故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 中任意 s 个向量均线性无关.

三、向量组的极大线性无关组与秩

例 8. $a = 1$ 是向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T, \alpha_2 = (1, a, 1)^T, \alpha_3 = (a, 1, 1)^T, \alpha_4 = (-2, -2, a+6)^T$ 的秩为 2 的

(A) 充分必要条件.

(B) 充分而非必要条件. [公众号: 小松学长]

(C) 必要而非充分条件.

(D) 既非充分又非必要条件.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P137 第 393 题】

解:

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ a & 1 & 1 & a+6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 3a+6 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 3a+6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当 $a = 1$ 时, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$,而当 $a = -2$ 时亦有秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$,所以 $a = 1$ 是秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ 的充分而非必要条件.

例 9. 已知向量组

$$\alpha_1 = [1, -1, 2]^T, \alpha_2 = [0, 3, 1]^T, \alpha_3 = [3, 0, 7]^T$$

与向量组

$$\beta_1 = [1, -2, 2]^T, \beta_2 = [2, 1, 5]^T, \beta_3 = [x, 3, 3]^T$$

等秩, 则 $x =$ _____

【2023 张 1000 • 数学一 • P105 第 8 题】

解:

8.1 【解析】由 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 知 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$.

由题设知, $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2$.

因

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 5 & 3+2x \\ 0 & 1 & 3-2x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 3-2x \\ 0 & 0 & -12+12x \end{bmatrix},$$

故 $x = 1$.

例 10. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组为, 其余的向量用极大线性无关组表示为 _____

【2023 汤 1800 题 • 数学一 • P145 第 1 题】

解:

解 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组为 α_1, α_2 , 且 $\begin{cases} \alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$.

例 11. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(I) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组;

(II) 求可逆矩阵 $P_{3 \times 3}, Q_{4 \times 4}$, 使得 $PAQ = B$.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P63 第 1 题】

解:

(I) 解 (I) 对 A 进行初等行变换, 得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{记}} C,$$

显然, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组.

(II) 对 C 作初等列变换, 得

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

故 $E_{21}(-1)E_{32}(-2)AE_{34}(1) = B$, 其中 $E_{ij}(a)$ 表示单位矩阵第 j 行(或第 i 列)乘以 a 加到第 i 行(或第 j 列)上, 则有

$$P = E_{21}(-1)E_{32}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

使得 $PAQ = B$.

四、向量组的正交

例 12. 与 $\alpha_1 = [1, 2, 3, -1]^T, \alpha_2 = [0, 1, 1, 2]^T, \alpha_3 = [2, 1, 3, 0]^T$ 都正交的单位向量是

【2023 张 1000 · 数学一 · P105 第 9 题】

解:

9. $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, -1, 0]^T$ 【解析】设与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都正交的向量为 $\beta = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, 依题意有

$$\begin{cases} \alpha_1^T \beta = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ \alpha_2^T \beta = x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ \alpha_3^T \beta = 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

将上述方程组记作 $Ax = 0$, 对系数矩阵 A 作初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

故 $n - r(A) = 4 - 3 = 1$, 则 $Ax = 0$ 的基础解系只有一个非零解向量.

解得 $Ax = 0$ 的基础解系为 $[-1, -1, 1, 0]^T$ 或 $[1, 1, -1, 0]^T$, 将其单位化, 得 $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, -1, 0]^T$,

即为所求.

例 13. 设矩阵 $A_{5 \times 4}$ 的秩为 2, $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (-1, 1, 4, -1)^T$, $\alpha_3 = (5, -1, -8, 9)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的解向量, 求 $Ax = 0$ 的解空间的一组标准正交基.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P62 第 10 题】

解:

(10) 解 先求 $Ax = 0$ 的解空间的一组基, 再将其正交单位化, 解空间的维数就是 $Ax = 0$ 的基础解系所含解向量的个数, 故 $n - r(A) = 4 - 2 = 2$.

又 α_1, α_2 的分量不成比例, 知 α_1, α_2 线性无关, 所以 α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的解空间的一组基. 将 α_1, α_2 正交化, 令

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T,$$

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (-1, 1, 4, -1)^T - \frac{1}{3}(1, 1, 2, 3)^T \\ &= \frac{2}{3}(-2, 1, 5, -3)^T.\end{aligned}$$

将 β_1, β_2 单位化,

$$r_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 1, 2, 3)^T,$$

$$r_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{39}}(-2, 1, 5, -3)^T,$$

故 r_1, r_2 为所求的一组标准正交基.

五、向量空间

例 14. 设 $\alpha_1 = [1, 0, 1]^T$, $\alpha_2 = [1, 1, -1]^T$, $\alpha_3 = [1, -1, 1]^T$; $\beta_1 = [3, 0, 1]^T$, $\beta_2 = [2, 0, 0]^T$, $\beta_3 = [0, 2, -2]^T$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的两个基. 若向量 ξ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $[1, 2, 0]^T$, 则 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为

(A) $[1, 3, 3]^T$

(B) $[-1, 3, 3]^T$

(C) $[-1, -3, 3]^T$

(D) $[-1, 3, -3]^T$

【2023 张 1000 · 数学一 · P106 第 1 题】

解:

1. (A) **【解析】** 设 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $[x_1, x_2, x_3]^T$, 由题设可得

$$\xi = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$\text{则} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} [\beta_1, \beta_2, \beta_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

故 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $[1, 3, 3]^T$. 应选 (A).

例 15. 向量 $\beta = [1, 2, 3]^T$ 在 $\mathbf{R}^3$ 的一个基 $\alpha_1 = [1, -1, 2]^T, \alpha_2 = [1, 2, -1]^T, \alpha_3 = [2, 1, -1]^T$ 下的坐标为_____

【2023 张 1000 • 数学一 • P106 第 3 题】

解:

3. $[2, 3, -2]^T$ 【解析】向量 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标是线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 的解. 将方程组的增广矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right], \end{aligned}$$

故向量 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标是 $[2, 3, -2]^T$.

例 16. 设 3 维向量空间的两组基分别为 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (2, 3, 1)^T, \alpha_3 = (3, 1, 2)^T$; $\beta_1 = (-1, -1, 2)^T, \beta_2 = (-1, 2, -1)^T, \beta_3 = (3, 1, 2)^T$, 则从 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为_____

【2023 李林 880 题 • 数学一 • P61 第 3 题】

解:

解 设过渡矩阵为 P , 则 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$, 则

$$\begin{aligned} P &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

小松学长

微信公众号【小松学长】

例 17. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组基, 且 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

(I) 证明: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 的一组基, 并写出由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵 P ;

(II) 设向量 $\alpha \in \mathbf{R}^n$, α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 $(n, n-1, \dots, 2, 1)^T$, 求 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标.

【2023 李林 880 题 • 数学一 • P64 第 1 题】

解:

解 (I) 依题设, 有

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) P.$$

而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 且 $|P| = 1 \neq 0$, 故 P 可逆, 所以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关, 即 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的一组基, P 为所求过渡矩阵.

(II) 由已知 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$

由 (I), 知 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) P^{-1}$, 所以

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) P^{-1} \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

故 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标为 $(1, 1, \dots, 1)^T$.

小松学长

微信公众号【小松学长】

第四章 线性方程组

一、齐次方程组、基础解系

例 1. 已知 A 是三阶实对称矩阵, $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 2$ 是 A 的 2 个特征值, 对应的特征向量分别是 $\alpha_1 = (1, a, -1)^T$ 和 $\alpha_2 = (1, 4, 5)^T$. 若矩阵 A 不可逆, 则 $Ax = 0$ 的通解是_____

【2023 李 330 题 · 数学一 · P97 第 194 题】

解:

【分析】 A 是实对称矩阵, α_1 和 α_2 是不同特征值的特征向量, 相互正交, 则

$$\alpha_1^T \alpha_2 = 1 + 4a - 5 = 0, \text{ 得 } a = 1.$$

由矩阵 A 不可逆, 知 $|A| = 0$, 故 $\lambda = 0$ 是 A 的特征值.

设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$ 是 $\lambda = 0$ 的特征向量. 于是

$$\begin{cases} \alpha^T \alpha_1 = x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ \alpha^T \alpha_2 = x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$$

得基础解系 $(3, -2, 1)^T$, 从而 $Ax = 0$ 的通解为 $k(3, -2, 1)^T, k \in \mathbb{R}$.

注意, $A\alpha = 0\alpha = 0$, 即 $\lambda = 0$ 的特征向量就是 $Ax = 0$ 的解. 又 $A \sim \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = A$, 有 $r(A) =$

$r(A) = 2, n - r(A) = 3 - 2 = 1$, 从而 α 是 $Ax = 0$ 的基础解系.

例 2. 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 A , 若存在 3 阶矩阵 $B \neq O$, 使得 $AB = O$, 则

(A) $\lambda = -2$ 且 $|B| = 0$

(B) $\lambda = -2$ 且 $|B| \neq 0$

(C) $\lambda = 1$ 且 $|B| = 0$

(D) $\lambda = 1$ 且 $|B| \neq 0$

【2023 张 1000 · 数学一 · P98 第 6 题】

解:

6. (C) **【解析】** 已知 $B \neq O, AB = O$, 故 $Ax = 0$ 有非零解, 所以 $|A| = 0$, 即

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 = 0, \lambda = 1,$$

又 $A \neq O$, 故 B 不可逆, 故 $\lambda = 1$ 且 $|B| = 0$.

例 3. 设 $A^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ 是 $n \times (n-1)$ 矩阵, $r(A^T) = n-1$, β_1, β_2 是与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 都正交的两个不同的 n 维列向量, k 是任意常数, 则方程组 $Ax = 0$ 的通解为

A. $k(\beta_1 - \beta_2)$

B. $k(\beta_1 + \beta_2)$

C. $k\beta_1$

D. $k\beta_2$

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P67 第 5 题】

解:

解 由已知, $r(A) = r(A^T) = n-1$, $Ax = 0$ 的基础解系有 $n-r(A) = 1$ 个向量. 因为 β_1, β_2 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 都正交, 所以

$$\alpha_i^T \cdot \beta_1 = 0, \alpha_i^T \cdot \beta_2 = 0, i = 1, 2, \dots, n-1,$$

从而

$$A\beta_j = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T \end{pmatrix} \beta_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, j = 1, 2,$$

由此可知 β_1, β_2 是 $Ax = 0$ 的两个不同解, 故 $k(\beta_1 - \beta_2)$ 是 $Ax = 0$ 的通解.

由于 β_1, β_2 可能是零向量, 故排除 C, D; 由于 $\beta_1 + \beta_2$ 也可能是零向量, 故排除 B.

例 4. 设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵, B 是 $n \times m$ 阶矩阵, 则

- (A) 当 $m > n$ 时, 线性齐次方程组 $ABX = 0$ 有非零解
- (B) 当 $m > n$ 时, 线性齐次方程组 $ABX = 0$ 只有零解
- (C) 当 $n > m$ 时, 线性齐次方程组 $ABB = 0$ 有非零解
- (D) 当 $n > m$ 时, 线性齐次方程组 $ABX = 0$ 只有零解

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P148 第 4 题】

解:

解 AB 为 m 阶方阵, 当 $m > n$ 时, 因为 $r(A) \leq n, r(B) \leq n$ 且 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$, 所以 $r(AB) < m$, 于是方程组 $ABX = 0$ 有非零解, 选 (A).

二、非齐次方程组的求解

例 5. 设 A 是 4×5 矩阵, 且 A 的行向量组线性无关, 则下列说法不正确的是

- (A) $A^T x = 0$ 只有零解
- (B) $A^T A x = 0$ 必有无穷多解
- (C) 对任意的 $b, A^T x = b$ 有唯一解
- (D) 对任意的 $b, Ax = b$ 有无穷多解

【2023 张 1000 · 数学一 · P102 第 7 题】

解:

【解析】 $r(A) = 4, A^T$ 是 5×4 矩阵, 方程组 $A^T x = b$, 对任意的 b , 方程组若有解, 则必有唯一解, 但可能无解, 即可能 $r(A^T) = r(A) = 4 \neq r([A^T | b]) = 5$, 而使方程组无解.

由于 A^T 的列向量组线性无关, 故 $A^T x = 0$ 只有零解, (A) 正确; 由于 $r(A^T A) = r(A) = 4 < 5$, 故 (B) 正确; 由于 $r(A) = r([A | b]) = 4 < 5$, 故 (D) 正确.

例 6. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* \neq 0$, 且非齐次线性方程组 $AX = b$ 有两个不同解 η_1, η_2 , 则下列命题正确的是

- (A) $AX = b$ 的通解为 $k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2$
- (B) $\eta_1 + \eta_2$ 为 $AX = b$ 的解
- (C) 方程组 $AX = 0$ 的通解为 $k(\eta_1 - \eta_2)$
- (D) $AX = b$ 的通解为 $k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2)$

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P146 第 2 题】

解:

解 因为非齐次线性方程组 $AX = b$ 的解不唯一, 所以 $r(A) < n$, 又因为 $A^* \neq O$, 所以 $r(A) = n - 1$, $\eta_2 - \eta_1$ 为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 选(C).

例 7. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 均为三维列向量, $A = (\beta - \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则方程组 $Ax = \beta$ 的一个特解为 _____

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P67 第 1 题】

解:

解 设 $Ax = \beta$ 有特解 $\alpha^* = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, 则

$$A\alpha^* = (\beta - \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= (\beta - \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3)x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_4$$

$$= \beta x_1 + (x_2 - x_1)\alpha_1 + (x_3 - 2x_1)\alpha_2 + (x_4 - 3x_1)\alpha_3 = \beta.$$

只要取 $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 2x_1 = 2, x_4 = 3x_1 = 3$ 即可, 故 $Ax = \beta$ 有一个特解为 $(1, 1, 2, 3)^T$.

例 8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4], B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$. 已知非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为

$$[1, -1, 2, 1]^T + k_1[1, 2, 0, 1]^T + k_2[-1, 1, 1, 0]^T (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

(1) 证明 α_1, α_2 线性无关;

(2) 求方程组 $Bx = \beta$ 的通解.

【2023 张 1000 · 数学一 · P102 第 12 题】

解:

【解析】(1) 因为方程组 $Ax = \beta$ 的通解为

$$[1, -1, 2, 1]^T + k_1[1, 2, 0, 1]^T + k_2[-1, 1, 1, 0]^T (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}),$$

而 A 为 4 阶方阵, 所以 $r(A) = 4 - 2 = 2$, 且 $[1, 2, 0, 1]^T, [-1, 1, 1, 0]^T$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系. 于是

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

故 $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_4 = -\alpha_1 - 2\alpha_2$, 即 α_3, α_4 可由 α_1, α_2 线性表示, 从而向量组 α_1, α_2 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 等价, 故 $r(\alpha_1, \alpha_2) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = r(A) = 2$. 这表明 α_1, α_2 线性无关.

(2) 由 (1) 知, $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_4 = -\alpha_1 - 2\alpha_2$, 又由题设知, $[1, -1, 2, 1]^T$ 是方程组 $Ax = \beta$ 的一个特解, 故

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) - \alpha_1 - 2\alpha_2 \\ &= 2\alpha_1 - 5\alpha_2 = [\alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

于是 方程组 $Bx = \beta$ 等价于 $[\alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x = [\alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, 再由 (1) 知 α_1, α_2 线性无关, 从而 方程组 $Bx = \beta$ 等价于 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$. 因此, 方程组 $Bx = \beta$ 的通解为

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (k \text{ 为任意常数}).$$

例 9. 设 A 是 5×4 矩阵, $r(A) = 2$, 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解向量, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = (4, 6, -8, 4)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, -1, 1)^T$, 又 $(0, 1, -3, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的解, 求 $Ax = b$ 的通解.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P68 第 1 题】

解:

(1) 解 由已知条件及 $Ax = b$ 的通解结构, 只需求 $Ax = 0$ 的基础解系, 而基础解系有 $n - r(A) = 4 - 2 = 2$ 个, $(0, 1, -3, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个解, 于是再求一个与 $(0, 1, -3, 0)^T$ 线性无关的解即可.

注意到 $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3$ 是 $Ax = 0$ 的解, 事实上,

$$A(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) = A\alpha_1 + A\alpha_2 - 2A\alpha_3 = b + b - 2b = 0,$$

且 $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = (4, 6, -8, 4)^T - 2(1, 2, -1, 1)^T = (2, 2, -6, 2)^T$,

又 $(2, 2, -6, 2)^T$ 与 $(0, 1, -3, 0)^T$ 线性无关 (分量不成比例), 所以 $Ax = b$ 的通解为

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

例 10. 设方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 4, \\ -x_1 + ax_2 + x_3 = a^2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \end{cases}$$

问 a 分别为何值时, 方程组有解、无解? 有解时, 求出通解.

【李林 108 题 · 数学一 · P89 第 1 题】

解:

解 方程组未知数的个数等于方程的个数, 用行列式讨论参数 a , 方程组的系数矩阵记为 A , 则

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1+a)(4-a).$$

当 $|A| \neq 0$, 即 $a \neq -1$ 且 $a \neq 4$ 时, 方程组有唯一解. 利用克拉默法则求得唯一解

$$\left(\frac{a^2 + 2a}{a+1}, \frac{a^2 + 2a + 4}{a+1}, \frac{-2a}{a+1} \right)^T;$$

当 $a = -1$ 时, 对其增广矩阵 $\bar{A}$ 作初等行变换, 得

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right].$$

由 $r(A) = 2 < r(\bar{A}) = 3$, 知方程组无解;

当 $a = 4$ 时, 对其增广矩阵 $\bar{A}$ 作初等行变换, 得

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

由于 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, 故方程组有无穷多解, 其通解为

$$k(-3, -1, 1)^T + (0, 4, 0)^T,$$

其中 k 为任意常数.

例 11. 设 A 为 n 阶矩阵, $A_{11} \neq 0$. 证明: 非齐次线性方程组 $AX = b$ 有无穷多个解的充分必要条件是 $A^*b = 0$.

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P150 第 13 题】

解:

证明 设非齐次线性方程组 $AX = b$ 有无穷多个解, 则 $r(A) < n$, 从而 $|A| = 0$,

于是 $A^*b = A^*AX = |A|X = 0$.

反之, 设 $A^*b = 0$, 因为 $b \neq 0$, 所以方程组 $A^*X = 0$ 有非零解, 从而 $r(A^*) < n$, 又 $A_{11} \neq 0$, 所以 $r(A^*) = 1$, 且 $r(A) = n - 1$.

因为 $r(A^*) = 1$, 所以方程组 $A^*X = 0$ 的基础解系含有 $n - 1$ 个线性无关的解向量, 而 $A^*A = 0$, 所以 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为方程组 $A^*X = 0$ 的一组解向量.

由 $A_{11} \neq 0$, 得 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 所以 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是方程组 $A^*X = 0$ 的基础解系.

因为 $A^*b = 0$, 所以 b 可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 也可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 故 $r(A) = r(\bar{A}) = n - 1 < n$, 即方程组 $AX = b$ 有无穷多个解.

三、公共解与同解

例 12. 已知非齐次线性方程组 (I) 与 (II) 同解, 其中

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_2 + x_3 = 2, \end{cases} (II) \begin{cases} ax_1 + 4x_2 + x_3 = 11, \\ 2x_1 + 5x_2 - ax_3 = 16, \end{cases} \text{ 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}$$

【2023 李 330 题 · 数学一 · P98 第 195 题】

解:

分析 所谓两个方程组 (I) 与 (II) 同解, 即 (I) 的解全是 (II) 的解, (II) 的解也全是 (I) 的解. 对 (I) 求出其通解

$$(3, 2, 0)^T + k(3, -1, 1)^T = (3k + 3, 2 - k, k)^T, k \text{ 为任意常数.}$$

把 $x_1 = 3 + 3k, x_2 = 2 - k, x_3 = k$ 代入方程组 (II), 有

$$\begin{cases} a(3 + 3k) + 4(2 - k) + k = 11, \\ 2(3 + 3k) + 5(2 - k) - ak = 16, \end{cases}$$

整理为

$$\begin{cases} (k + 1)(a - 1) = 0, \\ k(1 - a) = 0, \end{cases}$$

因为 k 为任意常数, 故 $a = 1$. 此时方程组 (I) 的解全是方程组 (II) 的解.

且当 $a = 1$ 时, 方程组 (II) 为

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 11, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 16, \end{cases}$$

由 $r(A_2) = 2$, 从解的结构知 (II) 的通解形式为 $\alpha + k\eta$ 和 (I) 的相同, (I) 的通解已满足 (II), 也是 (II) 的通解, 故 (I) (II) 同解.

或者易于验算 $\alpha = (3, 2, 0)^T$ 是 $A_2x = b$ 的解, $\eta = (3, -1, 1)^T$ 是 $A_2x = 0$ 的解.

所以 (I) 与 (II) 同解.

例 13. 设 A 与 B 均为 n 阶方阵, 则方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有非零公共解的一个充分条件是

(A) $r(A) = r(B)$

(B) $r(A) + r(B) \leq n$

(C) $r(A) + r(B) < n$

(D) $n < r(A) + r(B) < 2n$

【2023 张 1000 · 数学一 · P101 第 3 题】

解:

(C) 【解析】构造齐次线性方程组 $\begin{cases} Ax = 0, \\ Bx = 0, \end{cases}$ 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 分别是矩阵 A 与

矩阵 B 的行向量组的极大线性无关组, 则矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 的行向量组可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 于是

$$r\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \leq r+t = r(A) + r(B).$$

故当 $r(A) + r(B) < n$ 时, $r\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) < n$, 此时方程组 $\begin{cases} Ax = 0, \\ Bx = 0 \end{cases}$ 有非零解, 而方程组 $\begin{cases} Ax = 0, \\ Bx = 0 \end{cases}$ 有非零解等价于方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有非零公共解. 因此方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有非零公共解的一个充分条件是 $r(A) + r(B) < n$. 故应选(C).

例 14. 设有方程组(1) $\begin{cases} x_1 - x_4 = -2, \\ x_2 - x_4 = -4, \\ -4x_2 - x_3 + 6x_4 = 21, \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + ax_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ bx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -c + 1. \end{cases}$

(I)求方程组(1)的通解; [公众号: 小松学长]

(II)当 a, b, c 为何值时, 方程组(1)与(2)同解.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P66 第 5 题】

解:

(5) 解 (I) 对 ① 的增广矩阵作初等行变换,

$$\bar{A}_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right],$$

解得 ① 的通解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (-2, -4, -5, 0)^T + k(1, 1, 2, 1)^T (k \text{ 为任意常数}).$$

(II) 将方程组 ① 的通解 $x_1 = -2 + k, x_2 = -4 + k, x_3 = -5 + 2k, x_4 = k$ 代入方程组 ② 的第一个方程, 得

$$(-2 + k) + a(-4 + k) - (-5 + 2k) - k = -5,$$

由 k 的任意性, 可得 $a = 2$. 同样将 ① 的通解代入 ② 的第二个方程, 得

$$b(-4 + k) - (-5 + 2k) - 2k = -11,$$

解得 $b = 4$.

将 ① 的通解代入 ② 中的第三个方程, 得 $(-5 + 2k) - 2k = -c + 1$, 解得 $c = 6$, 故方程组 ② 为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$$

对其增广矩阵作初等行变换, 得

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right],$$

故 ② 的通解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (-2, -4, -5, 0)^T + k(1, 1, 2, 1)^T,$$

与 ① 的通解相同.

综上所述, 当 $a = 2, b = 4, c = 6$ 时, 方程组 ① 与 ② 同解.

第五章 特征值与特征向量

一、特征值、特征向量的概念与计算

例 1. 已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \xi_1 = [0, 1, 1]^T$ 为对应于 $\lambda_1 = -1$ 的特征向量, α 是 3 维列向量. 记 $W_1: \alpha$ 是对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的特征向量; $W_2: \alpha$ 非零且与 ξ_1 正交, 则 W_1 是 W_2 的

(A) 充分非必要条件

(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件

【2023 张 1000 · 数学一 · P113 第 1 题】

解:

(C) 【解析】因 $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_3$, 由实对称矩阵知, 不同特征值对应的特征向量正交, 故 α 与 ξ_1 正交, 且 $\alpha \neq 0$.

反过来说, 因 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1, A$ 有二重特征值 1, 故其必有对应的两个线性无关的特征向量 ξ_2, ξ_3 , 且 $\xi_2 \perp \xi_1, \xi_3 \perp \xi_1$.

又因 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关, 而 $\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ 必线性相关(四个 3 维列向量必线性相关), 故 α 可由 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性表示, 写成 $\alpha = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3$.

当 α 与 ξ_1 正交时, 即 $0 = (\alpha, \xi_1) = k_1(\xi_1, \xi_1) + k_2(\xi_2, \xi_1) + k_3(\xi_3, \xi_1) = k_1 \|\xi_1\|^2, \|\xi_1\|^2 \neq 0$, 故 $k_1 = 0$, 于是有 $\alpha = k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3$, 又 $\alpha \neq 0$, 故 α 必为 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 对应的特征向量, 故选 (C).

例 2. 设 $A_{3 \times 3}$ 是秩为 1 的实对称矩阵, $\lambda_1 = 2$ 是 A 的一个特征值, 对应的特征向量为 $\alpha_1 = (-1, 1, 1)^T$, 则方程组 $Ax = 0$ 的基础解系为

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P72 第 2 题】

解:

解 由 $r(A) = 1, A$ 为实对称矩阵, 故 $A \sim \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 且 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

设 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 对应的特征向量为 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 α 与 α_1 正交, 即

$$\alpha_1^T \alpha = -x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

解得 $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 0, 1)^T$.

由 $(0E - A)x = 0$, 知 $Ax = 0$ 的基础解系为

$$\alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 0, 1)^T.$$

例 3. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是三阶矩阵 A 的三个不同特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别是属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量, 若 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2), A^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ 线性无关, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 满足

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P151 第 3 题】

解:

解 令 $x_1 \alpha_1 + x_2 A(\alpha_1 + \alpha_2) + x_3 A^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$, 即

$$(x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_1^2 x_3) \alpha_1 + (\lambda_2 x_2 + \lambda_2^2 x_3) \alpha_2 + \lambda_3^2 x_3 \alpha_3 = 0,$$

则有 $x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_1^2 x_3 = 0, \lambda_2 x_2 + \lambda_2^2 x_3 = 0, \lambda_3^2 x_3 = 0$,

因为 x_1, x_2, x_3 只能全为零, 所以 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 \lambda_3^2 \neq 0$

二、相似与相似对角化

例 4. 下列矩阵中不可相似对角化的是

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

【2023 张 1000 · 数学一 · P112 第 7 题】

解:

(D) 【解析】将选项(A),(B),(C),(D)中的矩阵依次记为 A, B, C, D . 由于矩阵 A 是实对称矩阵, 故 A 可相似对角化. 显然, 矩阵 B 有 3 个互不相同的特征值 1, 2, -3, 故 B 可相似对角化. C 的特征多项式为

$$|\lambda E - C| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda + 1 & 1 \\ 2 & 2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 2 & 2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda + 2),$$

故 C 的特征值为 0, 0, -2. 由于 $3 - r(0E - C) = 3 - r(C) = 3 - 1 = 2$, 故 C 的二重特征值 0 对应两个线性无关的特征向量, 故 C 可相似对角化. D 的特征多项式为

$$|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 2 & -2 \\ 3 & 3 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda - 2 & -\lambda \\ 3 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 & 0 \\ 3 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3,$$

故 D 的特征值为 0, 0, 0. 但由于 $3 - r(0E - D) = 3 - r(D) = 3 - 1 = 2$, 故 D 的三重特征值 0 仅对应两个线性无关的特征向量, 故 D 不可相似对角化. 应选(D).

例 5. 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ 既相似又合同的矩阵是

$$(A) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(B) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(C) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(D) D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P71 第 3 题】

解:

解 对于 A, 由 $|\lambda E - A| = 0$ 可得特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, 故 A 与 Λ 相似 (因 A 有 3 个不同特征值且与 Λ 的特征值相同). 但 A 不是实对称矩阵, 而 Λ 是实对称矩阵, 故 A 与 Λ 不合同.

对于 B, 由 $|\lambda E - B| = 0$ 可得特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -5$, 与 Λ 的特征值不同, 所以 B 与 Λ 不相似, 排除 B.

对于 C, 由 $|\lambda E - C| = 0$ 可得特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$, 故 C 与 Λ 相似, 且实对称矩阵 C 的正、负惯性指数与 Λ 的正、负惯性指数分别相等, 所以 C 正确.

对于 D, 由 $|\lambda E - D| = 0$ 可得特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$, 与 Λ 的特征值不同, 故与 Λ 不相似 (或根据迹不同也可知不相似); D 的正惯性指数为 2, 与 Λ 的正惯性指数不同, 故 D 与 Λ 也不合同.

例 6. 设 A, B, C, D 都是 n 阶矩阵, 且 $A \sim C, B \sim D$, 则必有

- (A) $(A+B) \sim (C+D)$. (B) $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} C & O \\ O & D \end{bmatrix}$.
 (C) $AB \sim CD$ (D) $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} O & C \\ D & O \end{bmatrix}$.

【2023 李 330 题 • 数学一 • P117 第 233 题】

解:

【分析】 $A \sim C$, 即存在可逆阵 P , 使 $P^{-1}AP = C$. $B \sim D$, 即存在可逆阵 Q , 使 $Q^{-1}BQ = D$,

故存在可逆阵 $\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$, 使得

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1} & O \\ O & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1}AP & O \\ O & Q^{-1}BQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & O \\ O & D \end{bmatrix},$$

得 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} C & O \\ O & D \end{bmatrix}$, 应选 (B). (A)(C)(D) 显然不成立.

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 和 $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有 $A \sim C$ 和 $B \sim D$, 但

$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 和 $C+D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 不相似;

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $CD = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 不相似.

关于 (D), 请说出 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 不相似的理由.

例 7. 设 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$ 是单位向量, 矩阵 $A = 2E + 3\alpha\alpha^T$, 则 $A \sim$

- (A) $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$.
 (C) $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$.

【2023 李 330 题 • 数学一 • P118 第 234 题】

解:

【分析】 $\alpha\alpha^T$ 是秩为 1 的矩阵, 由于 $\alpha^T\alpha = 1$, 故 $\alpha\alpha^T$ 的特征值是 1, 0, 0, 所以矩阵 A 的特征值为: 5, 2, 2.

又因 A 是实对称矩阵, 必可相似对角化, 故应选 (D). 你能否写出此时的可逆矩阵 P ?

三、关于相似时可逆矩阵

例 8. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $AB = A - B$, 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 均为对角矩阵, 并写出这两个对角矩阵.

【2023 张 1000 · 数学一 · P114 第 7 题】

解:

【解析】由于 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$, 故 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

对于特征值 $\lambda_1 = 1, E - A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 故 A 的对应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_1 = [0, -1, 1]^T$.

对于特征值 $\lambda_2 = 2, 2E - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 故 A 的对应于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_2 = [1, 0, 0]^T$.

对于特征值 $\lambda_3 = 3, 3E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 故 A 的对应于特征值 $\lambda_3 = 3$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_3 = [0, 1, 1]^T$.

由 $AB = A - B$, 得 $(A + E)(E - B) = E$, 故 $E - B = (A + E)^{-1}$, 即 $B = E - (A + E)^{-1}$. 由于 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 因此由特征值的性质, B 的全部特征值为 $\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{2}, \bar{\lambda}_2 = \frac{2}{3}, \bar{\lambda}_3 = \frac{3}{4}$, 相应

的特征向量分别为 ξ_1, ξ_2, ξ_3 . 于是, 令 $P = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

微信公众号【小松学长】

小松学长

例 9. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 可逆, 3 阶矩阵 B 满足

$$BA = \begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{11} + a_{12} & a_{11} + a_{13} \\ 2a_{21} & a_{21} + a_{22} & a_{21} + a_{23} \\ 2a_{31} & a_{31} + a_{32} & a_{31} + a_{33} \end{bmatrix}.$$

证明: 矩阵 B 可相似对角化, 并求一个可逆矩阵 P (用 A 的元素表示) 及对角矩阵 Λ , 使 $P^{-1}BP = \Lambda$.

【2023 张 1000 · 数学一 · P114 第 10 题】

解:

令 $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则由题设知,

$$BA = \begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{11} + a_{12} & a_{11} + a_{13} \\ 2a_{21} & a_{21} + a_{22} & a_{21} + a_{23} \\ 2a_{31} & a_{31} + a_{32} & a_{31} + a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = AQ,$$

从而 $A^{-1}BA = Q$, 故 $B \sim Q$. 于是, B 与 Q 有相同的特征值.

由于 $|\lambda E - Q| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$, 故 Q 的特征值为 2, 1, 1.

由 $2E - Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 得 Q 对应于特征值 2 的特征向量为

$$\xi_1 = [1, 0, 0]^T.$$

由 $E - Q = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 得 Q 对应于特征值 1 的特征向量为

$$\xi_2 = [-1, 1, 0]^T, \xi_3 = [-1, 0, 1]^T.$$

令 $M = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $M^{-1}QM = \Lambda$.

再令 $P = AM = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} - a_{11} & a_{13} - a_{11} \\ a_{21} & a_{22} - a_{21} & a_{23} - a_{21} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31} & a_{33} - a_{31} \end{bmatrix}$, 则

$$P^{-1}BP = M^{-1}A^{-1}BAM = M^{-1}QM = \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

例 10. 已知 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是 3 阶可逆矩阵, B 是 3 阶矩阵, 且 $BA = (\alpha_1, -4\alpha_3, -\alpha_2)$.

(I) 求 B 的全部特征值;

(II) 求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ , 使得 $P^{-1}BP = \Lambda$.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P72 第 1 题】

解:

解 (I) 由已知, 有

$$\begin{aligned} BA &= B(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (B\alpha_1, B\alpha_2, B\alpha_3) \\ &= (\alpha_1, -4\alpha_3, -\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{记 } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } BA = AC, \text{ 故 } A^{-1}BA = C.$$

又由

$$|\lambda E - C| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0,$$

得 C 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 也是 B 的特征值.

(II) 求 C 的特征向量.

对于 $\lambda_1 = 1$, 由 $(1E - C)x = 0$, 得 $\xi_1 = (1, 0, 0)^T$;

对于 $\lambda_2 = 2$, 由 $(2E - C)x = 0$, 得 $\xi_2 = (0, -\frac{1}{2}, 1)^T$;

对于 $\lambda_3 = -2$, 由 $(-2E - C)x = 0$, 得 $\xi_3 = (0, \frac{1}{2}, 1)^T$.

$$\text{令 } P_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$P_1^{-1}CP_1 = \Lambda = \text{diag}(1, 2, -2).$$

将 $A^{-1}BA = C$ 代入 ① 式, 得 $P_1^{-1}A^{-1}BAP_1 = \Lambda$, 即 $(AP_1)^{-1}B(AP_1) = \Lambda$. 令

$$\begin{aligned} P &= AP_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_1, -\frac{1}{2}\alpha_2 + \alpha_3, \frac{1}{2}\alpha_2 + \alpha_3), \end{aligned}$$

则 P 为所求可逆矩阵, 使得 $P^{-1}BP = \Lambda$.

[公众号: 小松学长]

小松学长^①

微信公众号【小松学长】

例 11. 设 $A = \begin{pmatrix} k & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ -15 & 8 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $A \sim B$, 求 k 的值及可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P73 第 2 题】

解:

解 由 $A \sim B$, 知 A, B 有相同的迹, 即

$$k + 3 + (-6) = 1 + 2 + (-1),$$

解得 $k = 5$. 由

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0,$$

得 B 的三个不同特征值分别为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$, 由此可知, B 相似于对角矩阵.

由 $(1E - B)x = 0$, 得特征向量 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$;

由 $(2E - B)x = 0$, 得特征向量 $\alpha_2 = (8, 3, 4)^T$;

由 $(-E - B)x = 0$, 得特征向量 $\alpha_3 = (1, 0, -1)^T$.

令 $P_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则

$$P_1^{-1}BP_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda.$$

又由于 $A \sim B$, 故 $1, 2, -1$ 也是 A 的特征值.

由 $(1E - A)x = 0$, 得特征向量 $\beta_1 = (1, 1, -1)^T$;

由 $(2E - A)x = 0$, 得特征向量 $\beta_2 = (0, 1, 1)^T$;

由 $(-E - A)x = 0$, 得特征向量 $\beta_3 = (1, 0, -3)^T$.

令 $P_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 则

$$P_2^{-1}AP_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda.$$

综上可得, $P_2^{-1}AP_2 = P_1^{-1}BP_1$, 即 $(P_2P_1^{-1})^{-1}A(P_2P_1^{-1}) = B$, 故 $P^{-1}AP = B$, 其中

$$P = P_2P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{11}{3} & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

例 12. $A = \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, 求 a, b 及可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P154 第 21 题】

解:

解 由 $|\lambda E - A| = 0$, 得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, 因为 $A \sim B$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

由 $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, 得 $a = 1$, 再由 $|A| = b = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -2$, 得 $b = -2$,

$$\text{即 } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由 $(-E - A)X = 0$, 得 $\xi_1 = (1, 1, 0)^T$;

由 $(E - A)X = 0$, 得 $\xi_2 = (-2, 1, 1)^T$;

由 $(2E - A)X = 0$, 得 $\xi_3 = (-2, 1, 0)^T$,

$$\text{令 } P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

由 $(-E - B)X = 0$, 得 $\eta_1 = (-1, 0, 1)^T$;

由 $(E - B)X = 0$, 得 $\eta_2 = (1, 0, 0)^T$;

由 $(2E - B)X = 0$, 得 $\eta_3 = (8, 3, 4)^T$,

$$\text{令 } P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

由 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$, 得 $(P_1P_2^{-1})^{-1}AP_1P_2^{-1} = B$,

$$\text{令 } P = P_1P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = B.$$

小松学长

微信公众号【小松学长】

四、实对称矩阵

例 13. 设 A, B 是 n 阶实对称可逆矩阵, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使下列关系式

- (1) $PA = B$; (2) $P^{-1}ABP = BA$; (3) $P^{-1}AP = B$; (4) $P^T A^2 P = B^2$. 成立的个数为
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【2023 张 1000 · 数学一 · P112 第 6 题】

解:

(C) 【解析】逐个分析关系式是否成立.

因为 A, B 均是 n 阶可逆矩阵, 故存在可逆矩阵 Q, W , 使 $QA = E, WB = E$ (可逆矩阵可通过初等行(列)变换化为单位矩阵), 故有 $QA = WB, W^{-1}QA = B$. 记 $W^{-1}Q = P$, 则有 $PA = B$ 成立, 故 ① 式成立.

因为 A, B 均是 n 阶可逆矩阵, 可取 $P = A$, 则有 $A^{-1}ABA = (A^{-1}A)BA = BA$, 故 ② 式成立.

因为 A, B 均是 n 阶实对称矩阵, 它们均可以相似于对角矩阵, 但不一定相似于同一个对角矩阵, 即 A, B 之间不一定相似. 例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (均满足题设的实对称可逆矩阵的要求), 但对任意可逆矩阵 P , 均有 $P^{-1}AP = P^{-1}EP = E \neq B$, 故 ③ 式不成立.

因为 A, B 均是 n 阶实对称可逆矩阵, 其特征值均不为零, A^2, B^2 的特征值均大于零, 故 A^2, B^2 的正惯性指数均为 n (秩为 n , 负惯性指数为 0), 故 A^2 与 B^2 合同, 即存在可逆矩阵 P , 使得 $P^T A^2 P = B^2$, 故 ④ 式成立.

例 14. 设 4 阶实对称矩阵 A 的特征值为 0, 1, 2, 3, 则 $r(A) =$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P68 第 2 题】

解:

解 因实对称矩阵必相似于由特征值组成的对角矩阵, 即 $\text{diag}(0, 1, 2, 3)$, 且有相同的秩, 即 $r(A) = r(\text{diag}(0, 1, 2, 3)) = 3$.

例 15. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, -1)$, 且 $\alpha_1 = (1, k+1, 2)^T, \alpha_2 = (k-1, -k, 1)^T$ 分别为 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ 的特征向量, A^* 的特征值 λ_0 对应的特征向量 $\beta = (2, -5k, 2k+1)^T$.

(I) 求 λ_0 与 k 的值;

(II) 求矩阵 $(A^{-1})^*$.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P73 第 1 题】

解:

解 (I) 设 $\lambda_3 = -1$ 对应的特征向量为 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$, 由 A 是实对称矩阵, 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交, 故

$$\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_2 = k-1-k(k+1)+2=0, \\ \alpha_1^T \alpha_3 = x_1+(k+1)x_2+2x_3=0, \\ \alpha_2^T \alpha_3 = (k-1)x_1-kx_2+x_3=0, \end{cases}$$

由 ① 解得 $k=1$ 或 $k=-1$.

当 $k=1$ 时, 由 ②③ 解得 $\alpha_3 = (-4, 1, 1)^T$, 且

$$\alpha_1 = (1, 2, 2)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T, \beta = (2, -5, 3)^T.$$

又由已知 $A^* \beta = \lambda_0 \beta$, 两边同时左乘 A , 得

$$AA^* \beta = \lambda_0 A \beta, \quad |A| \beta = \lambda_0 A \beta,$$

即

$$A \beta = \frac{|A|}{\lambda_0} \beta = -\frac{2}{\lambda_0} \beta \quad (|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -2),$$

故 β 应是 A 的特征向量, 但 β 与 A 的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 任一个都不共线, 即 β 不是 A 的特征向量, 所以 $k=1$ 不合题意, 舍去.

当 $k = -1$ 时, $\alpha_1 = (1, 0, 2)^T$, 且
 $\alpha_2 = (-2, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (-2, -5, 1)^T$, $\beta = (2, 5, -1)^T$,
 故 $A\alpha_3 = \lambda_3\alpha_3 = -\alpha_3$, 两边同时左乘 A^* , 得 $A^*A\alpha_3 = -A^*\alpha_3$, 即 $|A|\alpha_3 = -A^*\alpha_3$, 又
 $\alpha_3 = -\beta$, $|A| = -2$, 故

$-2(-\beta) = -A^*(-\beta)$,
 即 $A^*\beta = 2\beta$, 所以 $\lambda_0 = 2, k = -1$.

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad A &= P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -1 & -\frac{1}{5} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{11}{10} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } (A^{-1})^* = \frac{A}{|A|} = -\frac{1}{2}A.$$

例 16. 设 A 为三阶实对称矩阵, A 的每行元素之和为 5, $AX = 0$ 有非零解且 $\lambda_1 = 2$ 是 A 的特征值, 对应特征向量为 $(-1, 0, 1)^T$.

(1) 求 A 的其他特征值与特征向量;

(2) 求 A .

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P154 第 16 题】

解:

解 (1) 因为 A 的每行元素之和为 5, 所以有 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

即 A 有特征值 $\lambda_2 = 5$, 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

又因为 $AX = 0$ 有非零解, 所以 $r(A) < 3$, 从而 A 有特征值 0, 设特征值 0 对应的特征向

为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 根据不同特征值对应的特征向量正交得 $\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$

解得特征值 0 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{(2) 令 } P &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 由 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得} \\ A &= P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

第六章 二次型

一、二次型的概念与标准形

例 1. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ 的规范形是

- (A) $y_1^2 - y_2^2$.
 (B) $y_1^2 + y_2^2$.
 (C) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
 (D) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

【2023 李 330 题 · 数学一 · P118 第 235 题】

解:

【分析】 用配方法

$$f = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2,$$

$$\text{令} \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2 - 2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

得 $f = y_1^2 + y_2^2$, 所以选 (B).

例 2. 设 A 是三阶实对称矩阵, 若对任意的三维列向量 X , 有 $X^T A X = 0$, 则

- (A) $|A| = 0$
 (B) $|A| > 0$
 (C) $|A| < 0$
 (D) 以上都不对

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P155 第 2 题】

解:

【解】 设二次型 $f = X^T A X \xrightarrow{X=QY} \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$, 其中 Q 为正交矩阵. 取 $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

则 $f = X^T A X = \lambda_1 = 0$, 同理可得 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, 由于 A 是实对称矩阵, 所以 $r(A) = 0$, 从而 $A = O$, 选 (A).

例 3. 已知三元二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 的秩为 2, 且 $\alpha = (2, 1, 2)^T$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征向量, 则二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的正惯性指数 $p =$ _____

【2023 李 330 题 · 数学一 · P101 第 201 题】

解:

【分析】 二次型矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -5 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$, 由 $\mathbf{A}\alpha = \lambda\alpha$,

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -5 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{得} \begin{cases} 2 + a + 2 = 2\lambda, \\ 2a - 5 + 2b = \lambda, \\ 2 + b + 2 = 2\lambda, \end{cases} \Rightarrow a = b = 2, \lambda_1 = 3.$$

再由秩 $r(\mathbf{A}) = 2 \Rightarrow |\mathbf{A}| = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$, 那么

$$3 + 0 + \lambda_3 = 1 + (-5) + 1 \Rightarrow \lambda_3 = -6,$$

可见正惯性指数 $p = 1$.

在求出 $a = b = 2$ 后也可由配方法:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + (2x_2 + x_3)^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 - (2x_2 + x_3)^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 9x_2^2, \end{aligned}$$

而求出正惯性指数.

例 4. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 且有可逆矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & b \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 满足 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} =$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{求:}$$

(1) 二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的规范形及二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A}^* \mathbf{x}$ 的标准形;

(2) $(\mathbf{A}^*)^{-1}$.

【2023 张 1000 · 数学一 · P116 第 16 题】

解:

【解析】(1) 由题设知, A 的特征值为 $5, -1, -1$, 从而 $|A| = 5$. 于是, A^* 的特征值为 $1, -5, -5$. 因此, 二次型 $x^T A x$ 的规范形为 $f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$, 二次型 $x^T A^* x$ 的标准形为 $f = y_1^2 - 5y_2^2 - 5y_3^2$.

(2) 由题设知, $\xi_1 = [1, 1, 1]^T$ 是 A 的属于特征值 5 的特征向量, 而 $\xi_2 = [-1, a, 0]^T$ 与 $\xi_3 = [b, 0, 1]^T$ 是 A 的属于二重特征值 -1 的特征向量. 由于 A 为实对称矩阵, 因此 ξ_1 与 ξ_2, ξ_3 均正交. 由此可得 $a = 1, b = -1$. 于是

$$\begin{aligned} A &= P \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \\ \text{因此 } (A^*)^{-1} &= \frac{1}{|A|} A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例 5. 已知 $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$, 求正交变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ 中的矩阵 P , 使得 $f(x, y) = 2u^2 + 2\sqrt{3}uv$.

【2023 张 1000 · 数学一 · P118 第 12 题】

解: [公众号: 小松学长]

【解析】 $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 = [x, y] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} [x, y] A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$

$$f(x, y) = 2u^2 + 2\sqrt{3}uv = [u, v] \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} [u, v] B \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 3)(\lambda + 1), |\lambda E - B| = (\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

实对称矩阵 A 与 B 有相同的特征值, 因此 A 与 B 合同.

A 的对应于 $3, -1$ 的特征向量分别是 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, B 的对应于 $3, -1$ 的特征向量分别是

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

$$\text{令 } Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \text{ 有 } Q_1^T A Q_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = Q_2^T B Q_2. \text{ 故}$$

$$P = Q_1 Q_2^T = Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

例 6. 三元二次型 $f = X^T A X$ 经过正交变换化为标准形 $f = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$, 且 $A^* + 2E$ 的非零特征值对应的特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求此二次型.

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P155 第 5 题】

解:

解 因为 $f = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ 经过正交变换后的标准形为 $f = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$, 所以矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$. 由 $|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -2$ 得 $\mathbf{A}^*$ 的特征值为 $\mu_1 = \mu_2 = -2, \mu_3 = 1$, 从而 $\mathbf{A}^* + 2\mathbf{E}$ 的特征值为 $0, 0, 3$, 即 α_1 为 $\mathbf{A}^* + 2\mathbf{E}$ 的属于特征值 3 的特征向量, 故也为 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 $\lambda_3 = -2$ 的特征向量.

令 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 因为 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵, 所以有

$\alpha_1^T \alpha = 0$, 即 $x_1 + x_3 = 0$, 故矩阵 $\mathbf{A}$ 的属于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

令 $\mathbf{P} = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 由 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$, 得

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ 所求的二次型为}$$

$$f = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = -\frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - 3x_1x_3.$$

例 7. 设 3 阶实对称矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 且 $\sum_{i=1}^3 a_{ii} = 1, \alpha = (1, 0, -2)^T$ 是方程组 $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = 4\alpha$ 的解向量.

(I) 求矩阵 $\mathbf{A}$;

(II) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$, 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 化为标准形.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P75 第 2 题】

解:

解 (I) 由已知 $\mathbf{A}^* \alpha = 4\alpha$, 等式两边同时左乘 $\mathbf{A}$, 得 $\mathbf{A} \mathbf{A}^* \alpha = 4\mathbf{A} \alpha$, 即

$$|\mathbf{A}| \alpha = 4\mathbf{A} \alpha, \quad \text{①}$$

故 $\mathbf{A} \alpha = \frac{|\mathbf{A}|}{4} \alpha$. 又

$$\sum_{i=1}^3 a_{ii} = 1 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 2 + \lambda_3,$$

得 $\lambda_3 = -3$, 于是有 $|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -12$.

由 ① 式, 得 $\mathbf{A} \alpha = -3\alpha$, $\lambda_3 = -3$ 对应的特征向量为 $\alpha_3 = \alpha = (1, 0, -2)^T$.

由 $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵, 令 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 对应的特征向量为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $\mathbf{x}^T \alpha_3 = 0$, 即 $x_1 - 2x_3 = 0$, 解得 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 1)^T$.

由 $\mathbf{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda_1 \alpha_1, \lambda_2 \alpha_2, \lambda_3 \alpha_3)$, 得

$$\mathbf{A} = (\lambda_1 \alpha_1, \lambda_2 \alpha_2, \lambda_3 \alpha_3) (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(II) 由于 α_1, α_2 已正交, 所以只需将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化, 得

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

令 $\mathbf{Q} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, 为正交矩阵, $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 为所求正交变换, 标准形为 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$.

例 8. 设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 = 2A$, 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 经正交变

换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ 化为 $\lambda y_2^2 + \lambda y_3^2 (\lambda \neq 0)$, 其中 $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} (b > 0, c > 0)$.

(I) 求 a, b, c 的值;

(II) 求一个可逆线性变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{z}$ 化 f 为规范形.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P76 第 3 题】

解:

解 (I) 由 Q 是正交矩阵, 知

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1, \end{cases}$$

得 $\begin{cases} b = 1, \\ c = \sqrt{2}, \\ a = \pm 1. \end{cases}$ 当 $a = 1$ 时, Q 的第 1 列与第 3 列不正交, 故 $a = -1$.

综上所述, $a = -1, b = 1, c = \sqrt{2}$.

(II) 由已知, f 经正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ 化为标准形 $2y_2^2 + 2y_3^2$.

令 $\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = \sqrt{2}y_2, \\ z_3 = \sqrt{2}y_3, \end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, 故

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

令 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{x} = P\mathbf{z}$ 为所求的一个可逆线性变换, 规范形为 $z_2^2 + z_3^2$.

第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

一、事件关系、概率性质和五大公式

例 1. 设随机事件 A, B, C 满足 $A \subset C, P(AB) = \frac{1}{2}$ 和 $P(C) = \frac{2}{3}$, 则 $P(\bar{A} \cup \bar{B} | C) =$ _____

【2023 李 660 题 · 数学一 · P151 第 428 题】

解:

$$\text{【分析】 } P(\bar{A} \cup \bar{B} | C) = 1 - P(AB | C) = 1 - \frac{P(ABC)}{P(C)} = 1 - \frac{P(AB)}{\frac{2}{3}}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

例 2. 事件 A 与 B 相互独立, $P(A) = a, P(B) = b$, 如果事件 C 发生必然导致 A 与 B 同时发生, 那么 A, B, C 都不发生的概率为 _____

【2023 张 1000 · 数学一 · P123 第 24 题】

解:

24. $(1-a)(1-b)$ 【解析】“事件 C 发生必然导致 A 与 B 同时发生” $\Leftrightarrow AB \supset C \Leftrightarrow \bar{C} \supset \bar{A} \cup \bar{B}$, 于是 $\bar{A}\bar{B}\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$, 从而有 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1-a)(1-b)$.

例 3. 设 A, B 是两个随机事件, 且 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.5, P(A|B) = P(A|\bar{B})$, 则 $P(\bar{A}\bar{B}) =$ _____

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P156 第 3 题】

解:

解 因为 $P(A|B) = P(A|\bar{B})$, 所以 A, B 相互独立, 从而 $\bar{A}, \bar{B}$ 相互独立, 故 $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = P(A)[1 - P(B)] = 0.4 \times 0.5 = 0.2$.

例 4. 设甲、乙两人独立地对同一目标射击一次, 其命中率分别为 0.5 和 0.4, 已知目标被命中, 则它是乙射中的概率为 _____

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P78 第 1 题】

解:

解 设 $A = \{\text{甲射击一次命中目标}\}, B = \{\text{乙射击一次命中目标}\}$, 由已知, 所求概率为 $P(B|A \cup B) = \frac{P(B(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(B)}{P(A \cup B)}$, 其中 $A \cup B$ 表示目标被命中. 又 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.5 + 0.4 - 0.5 \times 0.4 = 0.7$, 故 $P(B|A \cup B) = \frac{0.4}{0.7} = \frac{4}{7}$.

例 5. 设事件 A, B, C 两两独立, 则 A, B, C 相互独立的充分必要条件是

(A) AB 和 BC 独立.

(B) $A \cup B$ 和 $B \cup C$ 独立.

(C) $A - B$ 和 C 独立.

(D) $A - B$ 和 $B - C$ 独立.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P172 第 490 题】

解:

【分析】 A, B, C 两两独立, 只要满足 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 就有 A, B, C 相互独立. 现 $A - B$ 和 C 独立, 即有 $P(A\bar{B}C) = P(A\bar{B})P(C)$. 又因为 A, B 独立, $A, \bar{B}$ 也独立, $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$. 所以 $P(A\bar{B}C) = P(A)P(\bar{B})P(C)$. A, B, C 两两独立, 即有 $A, \bar{B}, C$ 两两独立, 所以 $A, \bar{B}, C$ 相互独立. 也就有 A, B, C 相互独立. 答案应选 (C).

例 6. 设 $P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{3}{5}$, 则 $P(B|\bar{A})$ 的最小值为.

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

【2023 张 1000 · 数学一 · P124 第 3 题】

解:

3. (B) **【解析】** 由于 $AB \subset A$, 因此 $P(AB) \leq P(A)$, 同理 $P(AB) \leq P(B)$, 故 $P(AB) \leq \min\{P(A), P(B)\} = \frac{2}{5}$, 则

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} \geq \frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$

选 (B).

例 7. 下列命题不正确的是

(A) 若 $P(A) = 0$, 则事件 A 与任意事件 B 独立

(B) 常数与任何随机变量独立

(C) 若 $P(A) = 1$, 则事件 A 与任意事件 B 独立

(D) 若 $P(A+B) = P(A) + P(B)$, 则事件 A, B 互不相容

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P157 第 6 题】

解:

【解】 $P(A) = 0$ 时, 因为 $AB \subset A$, 所以 $P(AB) = 0$, 于是 $P(AB) = P(A)P(B)$, 即 A, B 独立; 常数与任何随机变量独立; 若 $P(A) = 1$, 则 $P(\bar{A}) = 0$, $\bar{A}, B$ 独立, 则 A, B 也独立; 因为 $P(A+B) = P(A) + P(B)$, 得 $P(AB) = 0$, 但 AB 不一定是不可能事件, 故选 (D).

第二章 随机变量及其分布

例 1. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$, 则可以作出概率密度函数

- (A) $f(2x)$. (B) $f(2-x)$. (C) $f^2(x)$. (D) $f(x^2)$.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P177 第 504 题】

解:

【分析】 函数 $f(x)$ 为概率密度函数的充要条件为 ① $f(x) \geq 0$, ② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

(A) $f(2x)$ 不是概率密度函数. 因 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \neq 1$.

(B) $f(2-x)$ 是概率密度函数. 因 $f(2-x) \geq 0$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(2-x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(2-x) d(2-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

对 (C) (D) 容易举出反例, 使 $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2) dx$ 均不为 1.

例如 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 是概率密度函数.

但 $f^2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 和 $f(x^2) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

显然都不是概率密度函数.

例 2. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $P\{X \leq 2 | X \geq 1\}$ 的值为

- (A) e^{-2} . (B) $1 - e^{-2}$. (C) e^{-1} . (D) $1 - e^{-1}$.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P178 第 508 题】

解:

【分析】 方法 1 $P\{X \leq 2 | X \geq 1\} = \frac{P\{X \geq 1, X \leq 2\}}{P\{X \geq 1\}} = \frac{P\{1 \leq X \leq 2\}}{\int_1^{+\infty} e^{-x} dx}$

$$= \frac{\int_1^2 e^{-x} dx}{\int_1^{+\infty} e^{-x} dx} = \frac{e^{-1} - e^{-2}}{e^{-1}} = 1 - e^{-1}.$$

方法 2 $P\{X \leq 2 | X \geq 1\} = 1 - P\{X > 2 | X \geq 1\} = 1 - P\{X \geq 2 | X \geq 1\}$

$$= 1 - P\{X \geq 1\} = 1 - e^{-1}.$$

例 3. 若随机变量 X 存在正概率点, 即存在一点 a , 使得 $P\{X = a\} > 0$, 则 X 为

- (A) 连续型随机变量
(B) 离散型随机变量
(C) 非连续型随机变量
(D) 非离散型随机变量

【2023 张 1000 · 数学一 · P126 第 4 题】

解:

4. (C) 【解析】不同的随机变量类型具有不同的性质和特点: 连续型随机变量只在区间上取值, 在任何定点的概率为零, 且分布函数在实轴上连续; 离散型随机变量的定义域为若干离散点 (正概率点), 分布函数为阶梯形函数, 在间断点处右连续; 还有一类, 既不是连续型也不是离散型随机变量, 简称为一般类型随机变量, 其概率既在区间上取正值, 也在定点上取正值, 且分布函数有间断点. 所以在讨论随机变量的概率分布时, 首先要识别随机变量的类型. 另外, 描述连续型随机变量分布状态用的是概率密度, 处理工具是微积分. 描述离散型随机变量分布状态用的是分布律 (或分布列), 处理工具是代数, 而描述一般类型随机变量的分布状态只能用分布函数. 因此, 依本题题设, 随机变量 X 存在正概率点, 可以否定为连续型随机变量, 但不能进一步确定是离散型还是一般类型随机变量, 只能判定为非连续型随机变量, 故选 (C).

例 4. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 则随机变量 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数 [公众号: 小松学长]

- (A) 是阶梯函数
(B) 恰有一个间断点
(C) 至少有两个间断点
(D) 是连续函数

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P159 第 4 题】

解:

$$\begin{aligned} \text{解} \quad F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\min\{X, 2\} \leq y) = 1 - P(\min\{X, 2\} > y) \\ &= 1 - P(X > y, 2 > y) = 1 - P(X > y)P(2 > y), \end{aligned}$$

当 $y \geq 2$ 时, $F_Y(y) = 1$; 当 $y < 2$ 时, $F_Y(y) = 1 - P(X > y) = P(X \leq y) = F_X(y)$.

而 $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ 所以当 $0 \leq y < 2$ 时, $F_Y(y) = 1 - e^{-y}$;

当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$, 即

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 2, \\ 1 - e^{-y}, & 0 \leq y < 2, \\ 0, & y < 0, \end{cases} \text{显然 } F_Y(y) \text{ 在 } y=2 \text{ 处间断, 选 (B).}$$

例 5. 设随机变量 X 服从泊松分布, 且 $P\{X=1\} = P\{X=2\}$, 则 $P\{X > 1\} =$

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P82 第 3 题】

解 由已知, $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots,$

依题设, $\lambda e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$, 解得 $\lambda = 2, \lambda = 0$ (舍去), 所以

$$\begin{aligned} P\{X > 1\} &= 1 - P\{X \leq 1\} = 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\} \\ &= 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - 3e^{-2}. \end{aligned}$$

例 6. 设 $X \sim N(0, \sigma^2)$, X 在区间 (a, b) 内取值的概率最大, 其中 $a > 0$, 则 $\sigma^2 =$

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P82 第 6 题】

解:

解 依题意, 有 $\frac{X-0}{\sigma} \sim N(0,1)$, 故

$$P\{a < X < b\} = P\left\{\frac{a}{\sigma} < \frac{X}{\sigma} < \frac{b}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\frac{b}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^{\frac{a}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] \stackrel{\text{记}}{=} f(\sigma),$$

所以
$$f'(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{b}{\sigma^2}\right) - e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{a}{\sigma^2}\right) \right].$$

令 $f'(\sigma) = 0$, 得 $be^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}} = ae^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$, 取对数, 得 $\ln b + \frac{-b^2}{2\sigma^2} = \ln a + \frac{-a^2}{2\sigma^2}$, 解得

$$\sigma^2 = \frac{a^2 - b^2}{2(\ln a - \ln b)}.$$

例 7. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} ae^x, & x < 0, \\ b, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - ae^{-(x-1)}, & x \geq 1 \end{cases}$$

(I) 求 a, b 的值;(II) 求 X 的概率密度 $f(x)$;(III) 求 $P\left\{X > \frac{1}{2}\right\}$.

【李林 108 题 · 数学一 · P108 第 5 题】

解:

(2) 解 (I) 由连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 是连续函数, 知

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ae^x = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} b = b,$$

故 $a = b$. 又

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} b = b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [1 - ae^{-(x-1)}] = 1 - a,$$

故 $b = 1 - a$, 所以 $a = b = \frac{1}{2}$, 于是

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-(x-1)}, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$(II) \quad f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}e^{-(x-1)}, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$(III) \quad P\left\{X > \frac{1}{2}\right\} = 1 - P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

第三章 多维随机变量及其分布

一、(X,Y) 的概率分布, X 与 Y 相互独立性

例 1. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, 均服从

$$P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots, 0 < p < 1, \text{ 则 } P\{X = Y\} =$$

(A) $\frac{p}{1-p}$ (B) $\frac{1-p}{2-p}$ (C) $\frac{2p}{1-p}$ (D) $\frac{p}{2-p}$

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P85 第 1 题】

解:

解

$$\begin{aligned} P\{X = Y\} &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = Y = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = k, Y = k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = k\}P\{Y = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} p^2 \cdot (1-p)^{2(k-1)} \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{\infty} [(1-p)^2]^{k-1} = p^2 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}. \end{aligned}$$

例 2. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4}, & |x| < 1, |y| < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则

- (A) X 与 Y 相互独立, X^2 与 Y^2 也相互独立
 (B) X 与 Y 相互独立, X^2 与 Y^2 不相互独立
 (C) X 与 Y 不相互独立, X^2 与 Y^2 相互独立
 (D) X 与 Y 不相互独立, X^2 与 Y^2 也不相互独立

【2023 张 1000 · 数学一 · P135 第 1 题】

解:

1. (C) 【解析】验证 X 与 Y 是否相互独立, 只要求出 X 的概率密度 $f_X(x)$ 和 Y 的概率密度 $f_Y(y)$, 验证 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 是否成立. 在验证过程中应充分利用积分对称性.

X 的概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-1}^1 \frac{1+xy}{4} dy = \frac{1}{4} \cdot 2 + 0 = \frac{1}{2}, & |x| < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $\int_{-1}^1 \frac{xy}{4} dy = 0$ 是因为奇函数在对称区间上积分为零.

同理
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |y| < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

显然 $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$, 即 X, Y 不相互独立.

当 $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$ 时,

$$\begin{aligned} F_{(X^2, Y^2)}(x, y) &= P\{X^2 \leq x, Y^2 \leq y\} = P\{|X| \leq \sqrt{x}, |Y| \leq \sqrt{y}\} \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1+xy}{4} dx dy = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx dy \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{y} = \sqrt{xy}, \end{aligned}$$

其他情况同理. 故

$$F_{(X^2, Y^2)}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geq 1, y \geq 1, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, y \geq 1, \\ \sqrt{y}, & x \geq 1, 0 \leq y < 1, \\ \sqrt{xy}, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0. \end{cases}$$

$$F_{X^2}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad F_{Y^2}(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 1, \\ \sqrt{y}, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

显然 $F_{(X^2, Y^2)}(x, y) = F_{X^2}(x)F_{Y^2}(y)$, 即 X^2 和 Y^2 相互独立.

例 3. 设随机变量 X 服从 $[-3, 3]$ 上的均匀分布, $Y = X^2$, $F(x, y)$ 为 X 与 Y 的联合分布函数, 则 $F(1, 4) =$ _____

【2023 张 1000 · 数学一 · P134 第 14 题】

解:

14. $\frac{1}{2}$ 【解析】因为随机变量 X 服从 $[-3, 3]$ 上的均匀分布, 所以 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & -3 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} F(1, 4) &= P\{X \leq 1, Y \leq 4\} = P\{X \leq 1, X^2 \leq 4\} = P\{-2 \leq X \leq 1\} \\ &= \int_{-2}^1 f(x) dx = \int_{-2}^1 \frac{1}{6} dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

二、二维随机变量的函数 $Z=g(X, Y)$ 的分布

例 4. 已知随机变量 (X_1, X_2) 的概率密度为 $f_1(x_1, x_2)$, 设 $Y_1 = 2X_1, Y_2 = \frac{1}{3}X_2$, 则随机变量 (Y_1, Y_2) 的概率密度 $f_2(y_1, y_2) =$.

(A) $f_1\left(\frac{y_1}{2}, 3y_2\right)$ (B) $\frac{3}{2}f_1\left(\frac{y_1}{2}, 3y_2\right)$ (C) $f_1\left(2y_1, \frac{y_2}{3}\right)$ (D) $\frac{2}{3}f_1\left(2y_1, \frac{y_2}{3}\right)$

【2023 张 1000 · 数学一 · P137 第 1 题】

解:

1. (B) 【解析】设 (X_1, X_2) 的分布函数为 $F_1(x_1, x_2)$, (Y_1, Y_2) 的分布函数为 $F_2(y_1, y_2)$, 则

$$\begin{aligned} F_2(y_1, y_2) &= P\{Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2\} = P\left\{2X_1 \leq y_1, \frac{1}{3}X_2 \leq y_2\right\} \\ &= P\left\{X_1 \leq \frac{y_1}{2}, X_2 \leq 3y_2\right\} = F_1\left(\frac{y_1}{2}, 3y_2\right), \end{aligned}$$

所以

$$f_2(y_1, y_2) = \frac{\partial^2 F_2(y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{3}{2} f_1\left(\frac{y_1}{2}, 3y_2\right).$$

例 5. 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \min(X, Y)$ 的分布函数为

(A) $F^2(x)$. (B) $F(x)F(y)$. (C) $1 - [1 - F(x)]^2$. (D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P184 第 525 题】

解:

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } F_Z(x) &= P\{Z \leq x\} = P\{\min(X, Y) \leq x\} = 1 - P\{\min(X, Y) > x\} \\ &= 1 - P\{X > x, Y > x\} = 1 - P\{X > x\}P\{Y > x\} \\ &= 1 - [1 - P\{X \leq x\}][1 - P\{Y \leq x\}] \\ &= 1 - [1 - F(x)][1 - F(x)] \\ &= 1 - [1 - F(x)]^2. \end{aligned}$$

答案应选 (C).

例 6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从二项分布 $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$, Y 服从 $\lambda = 1$ 的泊松分布, 则概率 $P\{1 < \max\{X, Y\} \leq 3\} =$ _____

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P85 第 1 题】

解:

$$\begin{aligned} \text{解 记 } U &= \max\{X, Y\}, \text{ 依题设, 有} \\ P\{1 < \max\{X, Y\} \leq 3\} &= P\{1 < U \leq 3\} = P\{U \leq 3\} - P\{U \leq 1\} \\ &= P\{X \leq 3, Y \leq 3\} - P\{X \leq 1, Y \leq 1\} \\ &= P\{X \leq 3\} \cdot P\{Y \leq 3\} - P\{X \leq 1\} \cdot P\{Y \leq 1\}. \end{aligned}$$

而

$$P\{X \leq 3\} = 1 - P\{X = 4\} = \frac{15}{16},$$

$$P\{X \leq 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16},$$

$$P\{Y \leq 3\} = \sum_{k=0}^3 \frac{e^{-1}}{k!} = \frac{8}{3}e^{-1},$$

$$P\{Y \leq 1\} = 2e^{-1},$$

故

$$P\{1 < U \leq 3\} = \frac{15}{16} \cdot \frac{8}{3}e^{-1} - \frac{5}{16} \cdot 2e^{-1} = \frac{15}{8e}.$$

例 7. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} Ax + By, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad \text{且 } P\{Y > X\} = \frac{5}{12}, \text{ 记 } Z = \min\{X, Y\}, \text{ 求:}$$

(1) 常数 A, B 的值;

(2) Z 的概率密度.

【2023 张 1000 · 数学一 · P138 第 12 题】

解:

12. 【解析】(1) 由概率密度的规范性, 得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (Ax + By) dy = \int_0^1 \left[A(x - x^2) + \frac{1}{2} B(1 - x)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{6} (A + B) = 1. \end{aligned}$$

由题设可知,

$$\begin{aligned} P\{Y > X\} &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} (Ax + By) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[A(x - 2x^2) + \frac{1}{2} B(1 - 2x) \right] dx \\ &= \left[A \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right) + \frac{1}{2} B(x - x^2) \right] \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24} A + \frac{1}{8} B = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

以上两式联立, 解得 $A = 4, B = 2$.

(2) 设随机变量 $Z = \min\{X, Y\}$ 的分布函数为 $F_Z(z)$, 概率密度为 $f_Z(z)$, 则

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{\min\{X, Y\} \leq z\} = P\{X \leq z \text{ 或 } Y \leq z\} \\ &= P\{X \leq z\} + P\{Y \leq z\} - P\{X \leq z, Y \leq z\}. \end{aligned}$$

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = P\{X \leq z\} + P\{Y \leq z\} - P\{X \leq z, Y \leq z\} = 0$.

当 $0 \leq z < \frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{X \leq z\} + P\{Y \leq z\} - P\{X \leq z, Y \leq z\} \\ &= \int_0^z dx \int_0^{1-x} (4x + 2y) dy + \int_0^z dy \int_0^{1-y} (4x + 2y) dx - \int_0^z dx \int_0^z (4x + 2y) dy \\ &= \int_0^z (1 + 2x - 3x^2) dx + \int_0^z (2 - 2y) dy - \int_0^z (4xz + z^2) dx \\ &= 3z - 4z^3. \end{aligned}$$

由于在闭区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ 上必有 $x \leq \frac{1}{2}$ 或 $y \leq \frac{1}{2}$ (事实上, 若 $x > \frac{1}{2}$ 且 $y > \frac{1}{2}$, 则 $x + y > 1$, 从而 $(x, y) \notin D$), 故当 $z \geq \frac{1}{2}$ 时, 必有 $D \subset \{(x, y) | x \leq z \text{ 或 } y \leq z\}$.

因此, 当 $z \geq \frac{1}{2}$ 时, $F_Z(z) = P\{X \leq z \text{ 或 } Y \leq z\} = 1$.

$$\text{于是 } F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 3z - 4z^3, & 0 \leq z < \frac{1}{2}, \\ 1, & z \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 从而 } f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 3 - 12z^2, & 0 < z < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

三、条件分布与条件概率密度

例 8. 设随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 边缘分布为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则概率 $P\{X > x, Y > y\}$ 等于

- (A) $1 - F(x, y)$.
 (B) $1 - F_X(x) - F_Y(y)$.
 (C) $F(x, y) - F_X(x) - F_Y(y) + 1$.
 (D) $F_X(x) + F_Y(y) + F(x, y) - 1$.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P179 第 512 题】

解:

【分析】 记事件 $A = \{X \leq x\}, B = \{Y \leq y\}$, 则

$$\begin{aligned} P\{X > x, Y > y\} &= P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &= 1 - P\{X \leq x\} - P\{Y \leq y\} + P\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y). \end{aligned}$$

例 9. 设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy), & |x| < 1, |y| < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

- (I) 求 X 和 Y 的边缘概率密度, 并判别 X 与 Y 是否相互独立;
 (II) 记 $Z_1 = X^2, Z_2 = Y^2$, 求 Z_1, Z_2 的分布函数及 (Z_1, Z_2) 的联合分布函数.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P86 第 5 题】

解:

(5) 解 (I) 当 $|x| < 1$ 时, X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(1 + xy) dy = \frac{1}{2};$$

当 $|x| \geq 1$ 时, $f_X(x) = 0$, 故

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

同理, 可得 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |y| < 1, \\ 0, & |y| \geq 1. \end{cases}$$

显然, $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 故 X 与 Y 不相互独立.

(II) 设 $Z_1 = X^2$ 与 $Z_2 = Y^2$ 的分布函数分别为 $F_1(x)$ 与 $F_2(y)$, (Z_1, Z_2) 的分布函数为 $F(x, y)$.

当 $x < 0$ 时, $F_1(x) = P\{X^2 \leq x\} = 0$; 当 $0 \leq x < 1$ 时,

$$F_1(x) = P\{X^2 \leq x\} = P\{-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\} = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{2} dx = \sqrt{x};$$

当 $x \geq 1$ 时, $F_1(x) = 1$, 所以

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

同理, 可得 $F_2(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \sqrt{y}, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$

下求 $F(x, y)$.

当 $x < 0$ 或 $y < 0$ 时, $F(x, y) = 0$;

当 $0 \leq x < 1, y \geq 1$ 时,

$$F(x, y) = P\{X^2 \leq x, Y^2 \leq y\} = P\{X^2 \leq x\} = \sqrt{x};$$

当 $0 \leq y < 1, x \geq 1$ 时,

$$F(x, y) = P\{X^2 \leq x, Y^2 \leq y\} = P\{Y^2 \leq y\} = \sqrt{y};$$

当 $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$ 时,

$$F(x, y) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{4}(1+xy)dy = \sqrt{xy};$$

当 $x \geq 1, y \geq 1$ 时, $F(x, y) = 1$, 故

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, y \geq 1, \\ \sqrt{y}, & x \geq 1, 0 \leq y < 1, \\ \sqrt{xy}, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1. \end{cases}$$

例 10. 设随机变量 $X \sim U(0, 1)$, 在 $X = x (0 < x < 1)$ 下, $Y \sim U(0, x)$.

(1) 求 X, Y 的联合密度函数;

(2) 求 Y 的边缘密度函数.

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P162 第 7 题】

解:

7. 解 (1) 因为 $X \sim U(0, 1)$, 所以 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

又在 $X = x (0 < x < 1)$ 下, $Y \sim U(0, x)$, 所以 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 故

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$, 当 $y \leq 0$ 或 $y \geq 1$ 时, $f_Y(y) = 0$;

当 $0 < y < 1$ 时, $f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x}dx = \ln \frac{1}{y}$, 故 $f_Y(y) = \begin{cases} \ln \frac{1}{y}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

例 11. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = ke^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}(1 + \sin x \sin y), \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

(I) 求常数 k ; [公众号: 小松学长]

(II) 求 X, Y 的边缘概率密度, 并判别 X 与 Y 是否相互独立.

【李林 108 题 · 数学一 · P115 第 4 题】

解:

(4) 解 (I) 由概率密度的性质, 知

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} (1 + \sin x \sin y) dx dy \\
 &= k \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy + k \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \sin x \sin y dx dy.
 \end{aligned}$$

由对称区域上奇函数的积分性质, 知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \sin x \sin y dx dy = 0.$$

又 $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ 是二维标准正态分布 $N(0, 0, 1, 1; 0)$ 的概率密度, 故 $k = \frac{1}{2\pi}$.(II) X 的边缘概率密度为

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} (1 + \sin x \sin y) dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{\sin x}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \sin y dy.
 \end{aligned}$$

而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \sin y dy = 0 \text{ (奇函数)},$$

故 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, 即 $X \sim N(0, 1)$.同理, 可求得 $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$, 即 $Y \sim N(0, 1)$.对任意 x 与 y , 当 $\sin x \sin y \neq 0$ 时, 有

$$f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

所以 X 与 Y 不相互独立.

小松学长

微信公众号【小松学长】

第四章 随机变量的数字特征

一、数学期望与方差

例 1. 设随机变量 X 的 $EX = \mu, DX = \sigma^2 (\sigma > 0 \text{ 为常数})$, 则对任意常数 c 必有

- (A) $E(X - c)^2 = EX^2 - c^2$.
 (B) $E(X - c)^2 = E(X - \mu)^2$.
 (C) $E(X - c)^2 < E(X - \mu)^2$.
 (D) $E(X - c)^2 \geq E(X - \mu)^2$.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P190 第 544 题】

解:

$$\begin{aligned} \text{【分析】} \quad E(X - c)^2 &= E[(X - \mu) + (\mu - c)]^2 \\ &= E[(X - \mu)^2 + 2(X - \mu)(\mu - c) + (\mu - c)^2] \\ &= E(X - \mu)^2 + 2(\mu - c)E(X - \mu) + E(\mu - c)^2 \\ &= E(X - \mu)^2 + 2(\mu - c) \cdot 0 + E(\mu - c)^2 \\ &\geq E(X - \mu)^2 \end{aligned}$$

答案应选(D).

例 2. 某人对某一目标进行独立重复射击, 直到命中与未命中两个结果都出现为止. 设每次射击命中目标的概率均为 p , X 表示射击次数. 若 $EX = 3$, 则 $p =$.

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

【2023 张 1000 · 数学一 · P141 第 7 题】

解:

7. (C) 【解析】由题意, X 的概率分布为

$$P\{X = n\} = pq^{n-1} + qp^{n-1} \quad (n = 2, 3, \cdots; q = 1 - p).$$

于是

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{n=2}^{\infty} nP\{X = n\} = \sum_{n=2}^{\infty} n(pq^{n-1} + qp^{n-1}) \\ &= p \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} + q \sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} - (p + q) \\ &= p \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} + q \sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

构造幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 设其和函数为 $S(x)$, 则

$$S(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1).$$

$$\text{于是, } EX = pS(q) + qS(p) - 1 = \frac{p}{(1-q)^2} + \frac{q}{(1-p)^2} - 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} - 1.$$

$$\text{由 } EX = 3, \text{ 得 } \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = 4, \text{ 故 } p = \frac{1}{2}.$$

例 3. 设对任意两个随机变量 X 与 Y , 有 $E(XY) = EX \cdot EY$, 则

- (A) X 与 Y 相互独立
 (B) X 与 Y 不相互独立
 (C) $D(X+Y) = DX + DY$
 (D) $D(XY) = DX \cdot DY$

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P88 第 1 题】

解:

(1) C.

解 $E(XY) = EX \cdot EY \Leftrightarrow X, Y$ 不相关, 不一定能得 X, Y 相互独立, 故排除 A, B.
 而 $D(X+Y) = DX + DY \Leftrightarrow X, Y$ 不相关 $\Leftrightarrow E(XY) = EX \cdot EY$, 故 C 正确.

$$D(XY) = E[(XY)^2] - [E(XY)]^2 = E[(XY)^2] - (EX \cdot EY)^2,$$

$$DX \cdot DY = [E(X^2) - (EX)^2][E(Y^2) - (EY)^2]$$

$$= E(X^2) \cdot E(Y^2) - E(X^2)(EY)^2 - (EX)^2 E(Y^2) + (EX)^2 (EY)^2,$$

故 D 不一定成立.

例 4. 相互独立的随机变量 X_1 和 X_2 均服从正态分布 $N(0, \frac{1}{2})$, 则 $D(|X_1 - X_2|) =$ _____

【2023 李 660 题 · 数学一 · P163 第 463 题】

解:

【分析】 X_1 与 X_2 独立均服从 $N(0, \frac{1}{2})$, 记 $Z = X_1 - X_2$, 则 $Z \sim N(0, 1)$, 有概率密度函

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

$$D(|X_1 - X_2|) = D(|Z|) = E(|Z|^2) - (E|Z|)^2 = E(Z^2) - (E|Z|)^2 \\ = D(Z) + [E(Z)]^2 - (E|Z|)^2$$

显然, $D(Z) = 1, E(Z) = 0$,

$$E|Z| = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \varphi(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} d\left(\frac{z^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

$$\text{因此, } D(|X_1 - X_2|) = 1 + 0 - \frac{2}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

例 5. 设随机变量 $X \sim U[-1, 3], Y = \begin{cases} -1, & X \leq 0, \\ 1, & X > 0, \end{cases}$ 则 $DY =$ _____

【2023 张 1000 · 数学一 · P142 第 16 题】

解:

16. $\frac{3}{4}$ 【解析】因为 $X \sim U[-1, 3]$, 所以

$$P\{Y = -1\} = P\{X \leq 0\} = \frac{1}{4}, P\{Y = 1\} = P\{X > 0\} = \frac{3}{4}.$$

从而 Y 的概率分布为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

于是,

$$EY = -1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}, E(Y^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{3}{4} = 1.$$

故

$$DY = E(Y^2) - (EY)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

例 6. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 则 $P\{|X - E(X)| < 2D(X)\} =$ _____

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P162 第 2 题】

解:

解 $E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 6x^2(1-x)dx = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 6x^3(1-x)dx = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{3}{10},$$

则 $D(X) = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$, 于是

$$\begin{aligned} P\{|X - E(X)| < 2D(X)\} &= P\left\{\left|X - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10}\right\} = P\left(\frac{2}{5} < X < \frac{3}{5}\right) \\ &= \int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}} 6x(1-x)dx = \frac{37}{125}. \end{aligned}$$

例 7. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立同分布, 其相同的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta, \end{cases} \text{ 为常数,}$$

求 $Z = \min_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$ 的数学期望.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P90 第 5 题】

解:

(5) 解 n 个随机变量的函数的期望计算, 先求 Z 的分布函数, 从而得 Z 的概率密度, 再用期望定义计算.

由已知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 共同的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta. \end{cases}$$

Z 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{\min_{1 \leq i \leq n} \{X_i\} \leq z\} \\ &= 1 - P\{\min_{1 \leq i \leq n} \{X_i\} > z\} \\ &= 1 - P\{X_1 > z, X_2 > z, \dots, X_n > z\} \\ &= 1 - P\{X_1 > z\} P\{X_2 > z\} \cdots P\{X_n > z\} \\ &= 1 - [1 - F(z)]^n \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-2n(z-\theta)}, & z > \theta, \\ 0, & z \leq \theta, \end{cases} \end{aligned}$$

于是 Z 的概率密度为 $f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 2ne^{-2n(z-\theta)}, & z > \theta, \\ 0, & z \leq \theta, \end{cases}$

故
$$EZ = \int_{-\infty}^{+\infty} zf_Z(z) dz = \int_{\theta}^{+\infty} 2nz e^{-2n(z-\theta)} dz = \theta + \frac{1}{2n}.$$

例 8. 设随机变量 (X, Y) 服从 $N(1, 0, 9, 16; -\frac{1}{2})$, $Z = \frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y$.

(I) 求 Z 的期望和方差;

(II) 问 X 与 Z 是否相互独立? 说明理由.

【李林 108 题 · 数学一 · P121 第 2 题】

解:

(2) 解 (I) 由于 X 与 Y 分别服从正态分布 $N(1, 9)$ 和 $N(0, 16)$, 且 $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$, 故 $EX = 1, DX = 9, EY = 0, DY = 16$, 从而

$$\begin{aligned} EZ &= E\left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y\right) = \frac{1}{3}EX + \frac{1}{2}EY = \frac{1}{3}, \\ DZ &= D\left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y\right) = \frac{1}{9}DX + \frac{1}{4}DY + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \text{Cov}(X, Y) \\ &= \frac{1}{9} \times 9 + \frac{1}{4} \times 16 + \frac{1}{3} \rho_{XY} \sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY} \\ &= 1 + 4 + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3 \times 4 = 3. \end{aligned}$$

(II) 由于

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Z) &= \text{Cov}\left(X, \frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y\right) \\ &= \frac{1}{3} \text{Cov}(X, X) + \frac{1}{2} \text{Cov}(X, Y) \\ &= \frac{1}{3}DX + \frac{1}{2} \rho_{XY} \sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY} \\ &= \frac{1}{3} \times 9 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3 \times 4 = 0, \end{aligned}$$

故 $\rho_{XZ} = 0$.

由 (X, Y) 服从二维正态分布, 可知 (X, Z) 也服从二维正态分布 (见“注”), 又 $\rho_{XZ} = 0$, 故 X 与 Z 相互独立.

二、协方差

例 9. 设圆的半径 X 服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 其周长与面积分别记为 Y 与 Z , 则

$$\text{Cov}(Y, Z) =$$

(A) $\frac{1}{12}\pi^2$ (B) $\frac{1}{6}\pi^2$ (C) $\frac{1}{3}\pi^2$ (D) $\frac{1}{2}\pi^2$

【2023 张 1000 · 数学一 · P142 第 13 题】

解:

13. (B) 【解析】由于半径 X 服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 故 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

根据题意, $Y = 2\pi X, Z = \pi X^2$. 于是,

$$EY = E(2\pi X) = 2\pi EX = \pi,$$

$$EZ = E(\pi X^2) = \pi E(X^2) = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \pi \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}\pi,$$

$$E(YZ) = E(2\pi^2 X^3) = 2\pi^2 E(X^3) = 2\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx = 2\pi^2 \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2}\pi^2.$$

因此,

$$\text{Cov}(Y, Z) = E(YZ) - EY \cdot EZ = \frac{1}{2}\pi^2 - \pi \cdot \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi^2.$$

应选(B).

例 10. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且方差为 $\sigma^2 > 0$, 记 $Y_1 = \sum_{i=2}^n X_i$ 和 $Y_n = \sum_{j=1}^{n-1} X_j$, 则 Y_1 和 Y_n 的协方差 $\text{Cov}(Y_1, Y_n) =$ _____

【2023 李 660 题 · 数学一 · P164 第 466 题】

解:

$$\begin{aligned} \text{【分析】} \quad \text{Cov}(Y_1, Y_n) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=2}^n X_i, \sum_{j=1}^{n-1} X_j\right) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{n-1} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \text{Cov}(X_n, X_j) + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} \text{Cov}(X_i, X_j) + \sum_{i=2}^n \text{Cov}(X_i, X_1) \\ &= 0 + \sum_{k=2}^{n-1} \text{Cov}(X_k, X_k) + 0 = (n-2)\sigma^2. \end{aligned}$$

例 11. 设 X_1 与 X_2 相互独立, $X_i \sim B(i, p) (i = 1, 2, 0 < p < 1)$. 令

$$Y_1 = \begin{cases} 0, & X_1 + X_2 = 1, \\ 1, & X_1 + X_2 \neq 1, \end{cases} Y_2 = \begin{cases} 0, & X_2 - X_1 = 2, \\ 1, & X_2 - X_1 \neq 2. \end{cases}$$

(I) 求 $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$;

(II) 确定 p 的值, 使 $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$ 取值最小.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P90 第 6 题】

解:

(6) 解 (I) 依题设, Y_1 与 Y_2 均服从 $0-1$ 分布, 故

$$E(Y_1) = P\{Y_1 = 1\} = 1 - P\{Y_1 = 0\}$$

$$= 1 - P\{X_1 + X_2 = 1\} = 1 - 3p(1-p)^2,$$

$$E(Y_2) = P\{Y_2 = 1\} = 1 - P\{Y_2 = 0\}$$

$$= 1 - P\{X_2 - X_1 = 2\} = 1 - P\{X_1 = 0, X_2 = 2\} = 1 - p^2(1-p).$$

Y_1Y_2 也服从 $0-1$ 分布, 故

$$P\{Y_1Y_2 = 0\} = P\{(Y_1 = 0) \cup (Y_2 = 0)\}$$

$$= P\{Y_1 = 0\} + P\{Y_2 = 0\} - P\{Y_1 = 0, Y_2 = 0\}$$

$$= 3p(1-p)^2 + p^2(1-p),$$

这里 $P\{Y_1 = 0, Y_2 = 0\} = P\{X_2 + X_1 = 1, X_2 - X_1 = 2\} = P\{\emptyset\} = 0$, 故

$$P\{Y_1Y_2 = 1\} = 1 - P\{Y_1Y_2 = 0\} = 1 - 3p(1-p)^2 - p^2(1-p),$$

所以 $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2)$

$$= 0 \cdot P\{Y_1Y_2 = 0\} + 1 \cdot P\{Y_1Y_2 = 1\} - [1 - 3p(1-p)^2] \cdot [1 - p^2(1-p)]$$

$$= -3p^3(1-p)^3 \stackrel{\text{记}}{=} f(p).$$

(II) 由 (I), 知 $f(p) = -3p^3(1-p)^3$. 令

$$f'(p) = -9p^2(1-p)^2 \cdot (1-2p) = 0,$$

得 $p = 0$ (舍去), $p = 1$ (舍去), $p = \frac{1}{2}$.

当 $p < \frac{1}{2}$ 时, $f'(p) < 0$; 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, $f'(p) > 0$, 故 $p = \frac{1}{2}$ 是 $f(p)$ 在 $(0, 1)$ 内唯一的极小值点, 也是最小值点, 所以当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$ 取值最小.

三、相关系数

例 12. 已知随机变量 X_1, X_2, X_3 的方差都是 σ^2 ($\sigma^2 > 0$), 任意两个随机变量之间的相关系数都是 ρ , 则 ρ 的最小值为 _____

【2023 张 1000 · 数学一 · P145 第 8 题】

解:

$$8. -\frac{1}{2} \quad \text{【解析】} D(X_1 + X_2 + X_3) = DX_1 + DX_2 + DX_3 + 2\text{Cov}(X_1, X_2) +$$

$$2\text{Cov}(X_1, X_3) + 2\text{Cov}(X_2, X_3)$$

$$= 3\sigma^2 + 6\rho\sigma^2 = 3\sigma^2(1+2\rho) \geq 0,$$

所以 $\rho \geq -\frac{1}{2}$.

例 13. 设随机变量 X 和 Y 均服从 $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 且 $D(X+Y) = 1$, 则 X 与 Y 的相关系数

$\rho =$ _____

【2023 李 660 题 · 数学一 · P162 第 460 题】

解:

$$\text{【分析】} DX = DY = \frac{1}{4},$$

$$1 = D(X+Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{解得 } \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4}, \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{4}}} = 1.$$

例 14. 已知随机变量 X 与 Y 的相关系数为 ρ_{XY} 且 $\rho_{XY} \neq 0$, 设 $Z = aX + b$, 其中 a, b 为常数, 则 Y 与 Z 的相关系数 $\rho_{YZ} = \rho_{XY}$ 的充要条件是

- (A) $a = 1$. (B) $a > 0$. (C) $a < 0$. (D) $a \neq 0$.

【2023 李 660 题 • 数学一 • P188 第 539 题】

解:

【分析】 直接计算 Y 与 Z 相关系数 ρ_{YZ} 来确定正确选项. 由于

$$\text{Cov}(Y, Z) = \text{Cov}(Y, aX + b) = a\text{Cov}(X, Y), DZ = D(aX + b) = a^2 DX,$$

$$\rho_{YZ} = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\sqrt{DY} \sqrt{DZ}} = \frac{a\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DY} \sqrt{a^2 DX}} = \frac{a}{|a|} \rho_{XY}, \rho_{YZ} = \rho_{XY} \text{ 就有 } \frac{a}{|a|} = 1, \text{ 即 } a > 0. \text{ 选择 (B).}$$

例 15. 设随机变量 $X \sim U[-1, 1]$, 则随机变量 $U = \arcsin X, V = \arccos X$ 的相关系数为

- (A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

【2023 汤 1800 题 • 数学一 • P162 第 2 题】

解:

【解】 当 $P\{Y = aX + b\} = 1 (a > 0)$ 时, $\rho_{XY} = 1$; 当 $P\{Y = aX + b\} = 1 (a < 0)$ 时, $\rho_{XY} = -1$.

因为 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} (-1 \leq x \leq 1)$, 即 $U + V = \frac{\pi}{2}$ 或 $U = -V + \frac{\pi}{2}$, 所以 $\rho_{UV} = -1$.

选 (A).

例 16. 设随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 0, & X \leq Y, \\ 1, & X > Y, \end{cases} \quad V = \begin{cases} 0, & X \leq 2Y \\ 1, & X > 2Y \end{cases}$$

(1) 求 (U, V) 的联合分布; [公众号: 小松学长]

(2) 求 ρ_{UV} .

【2023 汤 1800 题 • 数学一 • P164 第 9 题】

解:

9. 【解】 (1) $P(X \leq Y) = \frac{1}{4}, P(X > 2Y) = \frac{1}{2}, P(Y < X \leq 2Y) = \frac{1}{4},$

(U, V) 的可能取值为 $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$.

$$P(U=0, V=1) = P(X \leq Y, X > 2Y) = 0;$$

$$P(U=1, V=0) = P(X > Y, X \leq 2Y) = P(Y < X \leq 2Y) = \frac{1}{4};$$

$$P(U=0, V=0) = P(X \leq Y, X \leq 2Y) = P(X \leq Y) = \frac{1}{4};$$

$$P(U=1, V=1) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

(U, V) 的联合分布律为

$\begin{matrix} V \\ U \end{matrix}$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

(2) 由(1) 得 $UV \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $U \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, $V \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 则

$$E(U) = \frac{3}{4}, \quad D(U) = \frac{3}{16}, \quad E(V) = \frac{1}{2}, \quad D(V) = \frac{1}{4}, \quad E(UV) = \frac{1}{2},$$

$$\text{Cov}(U, V) = E(UV) - E(U)E(V) = \frac{1}{8}, \quad \rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)D(V)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

例 17. 设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立, 且 $X_1 \sim B(1, p)$, $X_2 \sim B(2, p)$, 其中 $0 < p < 1$, 令 $Y_1 = 2X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 - X_2$.

(I) 求相关系数 $\rho_{Y_1 Y_2}$;

(II) 问 Y_1 与 Y_2 是否相互独立? 并说明理由.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P90 第 1 题】

解:

(1) 解 (I) 由 X_1 与 X_2 相互独立及 $X_1 \sim B(1, p)$, $X_2 \sim B(2, p)$, 可知 $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$, $DX_1 = p(1-p)$, $DX_2 = 2p(1-p)$.

由于

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= \text{Cov}(2X_1 + X_2, X_1 - X_2) = 2DX_1 - DX_2 - \text{Cov}(X_1, X_2) \\ &= 2p(1-p) - 2p(1-p) = 0, \end{aligned}$$

故

$$\rho_{Y_1 Y_2} = \frac{\text{Cov}(Y_1, Y_2)}{\sqrt{DY_1} \sqrt{DY_2}} = 0.$$

(II) 由于

$$\{Y_1 = 0\} = \{2X_1 + X_2 = 0\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0\},$$

$$\{Y_2 = 0\} = \{X_1 - X_2 = 0\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0\} \cup \{X_1 = 1, X_2 = 1\},$$

且 $\{Y_1 = 0\} \subset \{Y_2 = 0\}$, $P\{Y_2 = 0\} < 1$, 故

$$\begin{aligned} P\{Y_1 = 0, Y_2 = 0\} &= P\{Y_1 = 0\}, \\ P\{Y_1 = 0\} \cdot P\{Y_2 = 0\} &< P\{Y_1 = 0\}, \end{aligned}$$

从而

$$P\{Y_1 = 0, Y_2 = 0\} \neq P\{Y_1 = 0\} \cdot P\{Y_2 = 0\},$$

即 Y_1 与 Y_2 不相互独立.

第五章 大数定律和中心极限定理

例 1. 设随机变量 X 服从指数分布 $E(1)$, 用切比雪夫不等式得到估计 $P\{X \geq 3\} \leq a$, 则

$$(A) \frac{1}{2}.$$

$$(B) \frac{1}{4}.$$

$$(C) \frac{1}{8}.$$

$$(D) e^{-3}.$$

【2023 李 660 题 • 数学一 • P192 第 551 题】

解:

【分析】 显然, $EX = 1, DX = 1$.

$$\begin{aligned} P\{X \geq 3\} &= P\{X - 1 \geq 2\} = P\{|X - 1| \geq 2\} - P\{X - 1 \leq -2\} \\ &= P\{|X - 1| \geq 2\} + 0 = P\{|X - EX| \geq 2\} \leq \frac{DX}{2^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

答案应选(B).

例 2. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $E(X_i^2) < +\infty$, 则对任意 ε , 有

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right| < \varepsilon\right\} = 0$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - E(X_i^2)\right| < \varepsilon\right\} = 0$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - E(X_i^2)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

$$(D) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

【2023 李林 880 题 • 数学一 • P91 第 3 题】

解:

解 依题设, 可知 $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$ 独立同分布, 根据辛钦大数定律,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - E(X_i^2)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

即样本的二阶原点矩依概率收敛于随机变量的二阶原点矩.

例 3. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ 相互独立, 且均服从二项分布 $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 若根据中心极限定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{a \sum_{i=1}^n (X_{2i} - X_{2i-1}) \leq \sqrt{nx}\right\} = \Phi(x) (a > 0),$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $a =$ _____

【2023 张 1000 • 数学一 • P150 第 7 题】

解:

7. $\sqrt{2}$ 【解析】由题意, 记 $Y_i = X_{2i} - X_{2i-1}, i = 1, 2, \dots, n$, 显然 Y_i 独立同分布.又 $EX_i = \frac{1}{2}, DX_i = 1 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, 故

$$EY_i = E(X_{2i} - X_{2i-1}) = EX_{2i} - EX_{2i-1} = 0,$$

$$DY_i = D(X_{2i} - X_{2i-1}) = DX_{2i} + DX_{2i-1} = \frac{1}{2}.$$

由中心极限定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - E\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)}} \leq x \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \leq x \right\} = \Phi(x),$$

于是 $a = \sqrt{2}$.

小松学长

微信公众号【小松学长】

第六章 数理统计的基本概念

例 1. 设 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{11}$ 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $Y^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=2}^{11} X_i^2$,

则

(A) $X_1^2 \sim \chi^2(1)$

(B) $Y^2 \sim \chi^2(10)$

(C) $\frac{X_1}{Y} \sim t(10)$.

(D) $\frac{X_1^2}{Y^2} \sim F(10, 1)$.

【2023 李 660 题 • 数学一 • P194 第 557 题】

解:

【分析】 由题设知, $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 且相互独立, $i = 1, 2, \dots, 11$.

由 χ^2 分布, t 分布, F 分布的典型模式知, $\frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$, 所以, (A) 不成立.

$$\frac{10Y^2}{\sigma^2} = \sum_{i=2}^{11} \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(10), \text{ 所以, (B) 不成立.}$$

$$\frac{\frac{X_1}{\sigma}}{\sqrt{\frac{10Y^2}{\sigma^2}/10}} = \frac{X_1}{Y} \sim t(10), \text{ 故 (C) 成立.}$$

$$\text{而 } \frac{\frac{X_1^2}{\sigma^2}/1}{\frac{10Y^2}{\sigma^2}/10} = \frac{X_1^2}{Y^2} \sim F(1, 10), \text{ (D) 不成立. 所以选择 (C).}$$

例 2. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ 是来自标准正态总体的简单随机样本, 已知统计量

$$Y = \frac{\alpha(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}{\sqrt{X_{n+1}^2 + X_{n+2}^2 + \dots + X_{2n}^2}} \quad (\alpha > 0)$$

服从 t 分布, 则常数 $\alpha =$.

(A) 1

(B) $\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) 2

【2023 张 1000 • 数学一 • P153 第 11 题】

解:

11. (A) 【解析】依题意, $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N(0, n)$, $X_{n+1}^2 + \dots + X_{2n}^2 \sim \chi^2(n)$, 且 $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 与 $X_{n+1}^2 + X_{n+2}^2 + \dots + X_{2n}^2$ 相互独立. 所以

$$\frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{X_{n+1}^2 + X_{n+2}^2 + \dots + X_{2n}^2}{n}}} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{X_{n+1}^2 + X_{n+2}^2 + \dots + X_{2n}^2}} \sim t(n),$$

即 $\alpha = 1$.

例 3. 设 $X \sim t(n)$, $Y \sim F(1, n)$, 给定 $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$, 常数 k 满足 $P\{X > k\} = \alpha$, 则 $P\{Y > k^2\} =$ _____

【2023 李林 880 题 • 数学一 • P93 第 4 题】

解:

解 由 $X \sim t(n)$, 则 $X^2 \sim F(1, n)$, 所以

$$P\{Y > k^2\} = P\{X^2 > k^2\} = P\{X > k\} + P\{X < -k\} = 2\alpha.$$

第七章 参数估计

一、参数的矩估计和最大似然估计

例 1. 设总体的概率密度函数为 $f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty$, 其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}$ = [公众号: 小松学长]

(A) $\bar{X}$. (B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$. (C) S . (D) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P198 第 569 题】

解:

【分析】 似然函数 $L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \frac{1}{(2\sigma)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma}},$

$$\ln L = -n \ln 2 - n \ln \sigma - \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma},$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0 - \frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma^2} = 0, \text{ 解得 } \sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|$$

所以 σ 最大似然估计量 $\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$. 答案选 (B).

例 2. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自区间 $[-a, a]$ 上均匀分布的总体 X 的简单随机样本, 则参数 a 的矩估计量为 _____

【2023 李 660 题 · 数学一 · P169 第 481 题】

解:

【分析】 由于 $EX = 0$, 总体一阶矩没有包含未知参数 a , 故采用二阶矩.

总体二阶矩 $EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{(2a)^2}{12} = \frac{a^2}{3}$, 样本二阶矩为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$,

$$EX^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \text{ 即 } \frac{a^2}{3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, a = \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}.$$

例 3. 设总体 $X \sim F(x, \theta) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \theta, & 1 \leq x < 2, \\ 2\theta, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3 \end{cases} (0 < \theta < \frac{1}{2})$, 样本值为 1, 1, 3, 2, 1, 2, 3, 3,

求 θ 的矩估计和最大似然估计.

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P168 第 2 题】

解:

解 (1) X 为离散型随机变量, 其分布律为 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta & \theta & 1-2\theta \end{pmatrix}$, $E(X) = 3 - 3\theta$.

$$\bar{x} = \frac{1+1+3+2+1+2+3+3}{8} = 2, \text{ 令 } 3 - 3\theta = 2 \text{ 得 } \theta \text{ 的矩估计值为 } \hat{\theta} = \frac{1}{3}.$$

$$(2) L(1, 1, 3, 2, 1, 2, 3, 3; \theta) = P(X=1)P(X=1)\cdots P(X=3) = \theta^3 \times \theta^2 \times (1-2\theta)^3,$$

$$\ln L(\theta) = 5\ln\theta + 3\ln(1-2\theta), \text{ 令 } \frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = \frac{5}{\theta} - \frac{6}{1-2\theta} = 0,$$

$$\text{得 } \theta \text{ 的最大似然估计值为 } \hat{\theta} = \frac{5}{16}.$$

例 4. 设总体 $X \sim U(\theta_1, \theta_2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 求 θ_1, θ_2 的矩估计和最大似然估计.

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P168 第 5 题】

解:

$$\text{解 (1)} E(X) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad D(X) = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12},$$

$$\text{令 } \begin{cases} E(X) = \bar{X}, \\ D(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 2\bar{X}, \\ \theta_2 - \theta_1 = 2\sqrt{3B_2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta}_1 = \bar{X} - \sqrt{3B_2}, \\ \hat{\theta}_2 = \bar{X} + \sqrt{3B_2}. \end{cases}$$

$$(2) f(x; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_1 < x < \theta_2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}, & \theta_1 < x_i < \theta_2 (i=1, 2, \dots, n), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\ln L(\theta_1, \theta_2) = -n \ln(\theta_2 - \theta_1), \quad \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ln L(\theta_1, \theta_2) = \frac{n}{\theta_2 - \theta_1} > 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta_2} \ln L(\theta_1, \theta_2) = -\frac{n}{\theta_2 - \theta_1} < 0,$$

而 $\theta_1 \leq \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}, \theta_2 \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$. 因为 $\ln L(\theta_1, \theta_2)$ 是 θ_1 的单调增函数, 是 θ_2 的单调减函数, 所以 $\hat{\theta}_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}, \hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$.

例 5. 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 $\theta > 0$ 为未知参

数, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(II) 求 $E(\hat{\theta})$ 和 $D(\hat{\theta})$.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P95 第 5 题】

解:

(5) 解 (I) 由已知, 似然函数为

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

要使 $L(\theta)$ 最大, θ 应尽量小, 但 $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \theta$, 即 θ 应大于等于 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中的每一个, 故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

(II) $\hat{\theta}$ 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 故

$$E(\hat{\theta}) = \int_0^\theta x \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{n+1} \theta,$$

$$E(\hat{\theta}^2) = \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{n+2} \theta^2,$$

所以
$$D(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - [E(\hat{\theta})]^2 = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

例 6. 设 $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ 为总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\sigma > 0$ 为未知参数.

(I) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(II) 若记 $U = \sum_{i=1}^6 X_i, V = \sum_{i=5}^{10} X_i$, 利用最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$, 求相关系数 ρ_{UV} .

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P95 第 7 题】

解:

(7) 解 (I) 由已知, X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

似然函数为
$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{10}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{10} x_i^2}.$$

取对数, 得
$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{10}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{10} x_i^2.$$

令 $\frac{d}{d(\sigma^2)} \ln L(\sigma^2) = 0$, 得 $-\frac{10}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0$, 故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i^2$.

(II) 由(I), 知 $X \sim N(0, \hat{\sigma}^2)$, 则

$$EU = E\left(\sum_{i=1}^6 X_i\right) = 0, \quad EV = E\left(\sum_{i=5}^{10} X_i\right) = 0,$$

$$DU = D\left(\sum_{i=1}^6 X_i\right) = 6\hat{\sigma}^2, \quad DV = D\left(\sum_{i=5}^{10} X_i\right) = 6\hat{\sigma}^2.$$

$$\text{又 } \text{Cov}(U, V) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^6 X_i, \sum_{j=5}^{10} X_j\right) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=5}^{10} \text{Cov}(X_i, X_j) = DX_5 + DX_6 = 2\hat{\sigma}^2,$$

其中, 当 $i \neq j$ 时, $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$; 当 $i = j$ 时, $\text{Cov}(X_i, X_j) = DX_i = \hat{\sigma}^2$, 故

$$\rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{DU} \sqrt{DV}} = \frac{2\hat{\sigma}^2}{6\hat{\sigma}^2} = \frac{1}{3}.$$

例 7. 设总体 X 的简单随机样本为 $X_1, X_2, \dots, X_n$, X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\lambda}{\theta}}, & x \geq \lambda, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0, \lambda, \theta$ 为未知参数, 求 λ 和 θ 的最大似然估计值.

【李林 108 题 · 数学一 · P124 第 4 题】

解:

(4) 解 此题是两个参数 θ, λ 的最大似然估计问题. 似然函数为

$$L(\theta, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i - \lambda}{\theta}}, & x_i \geq \lambda, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $x_i \geq \lambda$ 时, 取对数, 得

$$\ln L(\theta, \lambda) = -n \ln \theta - \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \lambda}{\theta},$$

上式对 θ 和 λ 求偏导, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(\theta, \lambda)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \lambda}{\theta^2}, \\ \frac{\partial \ln L(\theta, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\theta}. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

令 ① 式取值为零, 得 $\theta + \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$, 但 ② 式与 λ 无关, 因此求不出 λ 的最大似然估计, 故根据最大似然估计的定义求.

当 θ 固定时, 要使 $L(\theta, \lambda)$ 最大, 只需 λ 最大. 因 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq \lambda$, 故 λ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda} = \min_{1 \leq j \leq n} \{x_j\}$, θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \bar{x} - \min_{1 \leq j \leq n} \{x_j\}$.

例 8. 设总体 X 的分布列为截尾几何分布

$$P\{X = k\} = \theta^{k-1}(1 - \theta), k = 1, 2, \dots, r,$$

$$P\{X = r + 1\} = \theta^r,$$

从中抽得样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 其中有 m 个取值为 $r + 1$, 求 θ 的最大似然估计.

【2023 张 1000 · 数学一 · P161 第 33 题】

解:

33. 【解析】似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \theta^{mr} \prod_{i=1}^{n-m} \theta^{x_i-1} (1 - \theta) = (1 - \theta)^{n-m} \theta^{\sum_{i=1}^{n-m} x_i - (n-m) + mr},$$

取对数得

$$\ln L = \left[\sum_{i=1}^{n-m} x_i - (n-m) + mr \right] \ln \theta + (n-m) \ln(1 - \theta),$$

令

$$\frac{d \ln L}{d \theta} = \left(\sum_{i=1}^{n-m} x_i - n + m + mr \right) \frac{1}{\theta} - (n-m) \frac{1}{1 - \theta} = 0.$$

解似然方程

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-m} x_i - n + m + mr}{\theta} = \frac{n-m}{1 - \theta},$$

得 θ 的最大似然估计

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n-m} X_i - n + m + mr}{\sum_{i=1}^{n-m} X_i + mr} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sum_{i=1}^n X_i - m}.$$

二、无偏估计量与置信区间

例 9. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知, 记参数 μ 的置信区间长度 L , 则当置信度 $1 - \alpha$ 减少时

- (A) L 减小. (B) L 增大. (C) L 不变. (D) L 增减不一定.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P199 第 572 题】

解:

【分析】 首先要求出 L , 进而推断 L 与 $1 - \alpha$ 的关系. 当总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知时, μ 的置信区间为 $(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}})$, 其中 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 是标准正态分布上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数, 由 $\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + (1 - \alpha)}{2}$ 确定, 其中 $\Phi(x)$ 是关于 x 的单调增函数, 因此置信区间的长度 $L = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}$, 当样本容量 n 固定时, 随 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 的减小而变小, 即随 $1 - \alpha$ 的减小而变小. 所以选择 (A).

例 10. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 对于 X 的一个简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 要使 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间长度不超过 0.56, 则样本容量 n 至少为 _____. ($\Phi(1.96) = 0.975$)

【2023 张 1000 · 数学一 · P159 第 20 题】

解:

20.49 【解析】 由于总体方差 σ^2 已知, 故总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 $(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, 从而置信区间长度为 $L = 2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. 由题设, $1 - \alpha = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$, 故 $\alpha = 0.05$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$. 又 $\sigma = 1$, 故 $L = 2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3.92}{\sqrt{n}}$. 根据题意知 $L \leq 0.56$, 故 $n \geq 49$. 因此, 样本容量 n 至少为 49.

例 11. 设总体 X, Y 相互独立且都服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布, $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 与 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 分别为来自总体 X, Y 的简单随机样本. 证明: $S^2 = \frac{1}{m+n-2} [\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 +$

$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2]$ 为参数 σ^2 的无偏估计量.

【2023 汤 1800 题 · 数学一 · P168 第 7 题】

解:

【证明】 令 $S_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2$, $S_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$, 因为 $E(S_1^2) = E(S_2^2) = \sigma^2$, 所以 $E[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2] = (m-1)\sigma^2$, $E[\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2] = (n-1)\sigma^2$, 于是 $E(S^2) = \frac{1}{m+n-2} \{E[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2] + E[\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2]\} = \sigma^2$, 即 $S^2 = \frac{1}{m+n-2} [\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2]$ 为参数 σ^2 的无偏估计量.

例 12. 设总体 $X \sim U(0, \theta) (\theta > 0)$, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 X 的简单随机样本, $X_{(n)} =$

$$\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

(I) 证明: $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$, $\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$ 是 θ 的无偏估计;

(II) 当 $n \geq 2$ 时, 问 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 哪一个有效.

【2023 李林 880 题 · 数学一 · P96 第 14 题】

解:

(14) 解 (I) 由已知, X 的概率密度为 $f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

$$f_{X_{(n)}}(x) = F'_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} E(2\bar{X}) &= E\left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{\theta}{2} = \theta, \\ E\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right) &= \frac{n+1}{n} \int_0^{\theta} \frac{nx^n}{\theta^n} dx = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \theta = \theta, \end{aligned}$$

故 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是 θ 的无偏估计.

$$(II) \quad D(\hat{\theta}_1) = D(2\bar{X}) = \frac{4}{n} \cdot \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n},$$

$$E(X_{(n)}^2) = \int_0^{\theta} \frac{nx^{n+1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+2} \theta^2,$$

$$\text{故} \quad D(\hat{\theta}_2) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \{E(X_{(n)}^2) - [EX_{(n)}]^2\} = \frac{\theta^2}{n(n+2)},$$

当 $n \geq 2$ 时, $D(\hat{\theta}_2) < D(\hat{\theta}_1)$, 故 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

例 13. 设 $Y = \ln X \sim N(\mu, 1)$, 0.8, 1.25, 2, 0.5 是来自总体 X 的简单随机样本值, 已知

$$\Phi(1.96) = 0.975.$$

(1) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间;

(2) 记 $EX = v$, 求 v 的置信度为 0.95 的置信区间.

【2023 张 1000 · 数学一 · P161 第 36 题】

解:

36. 【解析】 (1) 由于 0.8, 1.25, 2, 0.5 是来自总体 X 的简单随机样本值, 因此 $\ln 0.8, \ln 1.25, \ln 2, \ln 0.5$ 是来自总体 $Y = \ln X$ 的简单随机样本值, 从而

$$\bar{y} = \frac{1}{4} (\ln 0.8 + \ln 1.25 + \ln 2 + \ln 0.5) = \frac{1}{4} \ln 1 = 0.$$

又由 $Y = \ln X \sim N(\mu, 1)$, 得 $\bar{Y} \sim N\left(\mu, \frac{1}{4}\right)$, $U = \frac{\bar{Y} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \sim N(0, 1)$. 由题设, 置信度 $1 - \alpha = 0.95$,

故 $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. 又 $n = 4$, $\sigma = \sqrt{DY} = 1$. 因此, μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{y} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{y} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(0 - 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{4}}, 0 + 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{4}}\right) = (-0.98, 0.98).$$

(2) 由于 $Y = \ln X \sim N(\mu, 1)$, 故 Y 的概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}} \quad (-\infty < y < +\infty).$$

于是,

$$\begin{aligned} \nu &= EX = E(e^Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^y f(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^y e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2y-(y-\mu)^2}{2}} dy = e^{\mu+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{[y-(\mu+1)]^2}{2}} dy = e^{\mu+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由(1)知, $P\{-0.98 < \mu < 0.98\} = 0.95$, 故 $P\left\{-0.48 < \mu + \frac{1}{2} < 1.48\right\} = 0.95$, 又由于 e^x 单调增加, 从而 $P\{e^{-0.48} < e^{\mu+\frac{1}{2}} < e^{1.48}\} = 0.95$, 即 $P\{e^{-0.48} < \nu < e^{1.48}\} = 0.95$. 因此, ν 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(e^{-0.48}, e^{1.48})$.

例 14. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_{2n} (n \geq 2)$ 是来自 X 的简单随机样本, 且 $\bar{X} =$

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i, \text{ 统计量 } Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2.$$

(1) 判断统计量 Y 是否为 σ^2 的无偏估计;

(2) 当 $\mu = 0$ 时, 求 $D(\bar{X}^2)$.

解:

【2023 张 1000 · 数学一 · P163 第 13 题】

13.【解析】 由 $X_1, \dots, X_{2n} (n \geq 2)$ 是来自 X 的简单随机样本知, $X_1 + X_{n+1}, X_2 + X_{n+2}, \dots, X_n + X_{2n}$ 独立.

(1) 因为 $X_i + X_{n+i} (i = 1, 2, \dots, n)$ 为 $N(2\mu, 2\sigma^2)$ 的简单随机样本, 则样本均值为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i}) = 2\bar{X}$, 样本方差为 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} Y$.

因为 $E(S^2) = 2\sigma^2$, 所以 $E\left(\frac{1}{n-1} Y\right) = 2\sigma^2$, 即 $EY = 2(n-1)\sigma^2 \neq \sigma^2$, 故 Y 不是 σ^2 的无偏估计.

(2) 当 $\mu = 0$ 时, $X_i + X_{n+i} \sim N(0, 2\sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$2\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i}) \sim N\left(0, \frac{2\sigma^2}{n}\right).$$

所以 $\frac{2\bar{X}}{\sqrt{2\sigma^2}/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$, 即

$$\frac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma} \sim N(0, 1), \left(\frac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1),$$

可得 $D\left[\left(\frac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma}\right)^2\right] = 2$, 故 $D(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^4}{2n^2}$.

第八章 假设检验

例 15. 设 $X_1, X_2, \dots, X_8$ 是来自总体 $N(\mu, 2)$ 的简单随机样本, 考虑假设检验问

题: $H_0: \mu \leq 5, H_1: \mu > 5$. $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 若该检验问题的拒绝域为

$W = \{\bar{X} > 5.5\}$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 X_i$, 则 $\mu = 5.75$ 时, 该检验犯第二类错误的概率为

(A) $1 - \Phi(0.25)$. (B) $1 - \Phi(0.5)$. (C) $1 - \Phi(0.75)$. (D) $1 - \Phi(1)$.

【2023 李 660 题 · 数学一 · P200 第 575 题】

解:

【分析】 检验犯第二类错误: 接受实际不真的假设 H_0 所犯的错误 β .

现在 $X \sim N(5.75, 2), \bar{X} \sim N\left(5.75, \frac{1}{4}\right)$, 原假设 $H_0: \mu \leq 5$. 拒绝域 $W = \{\bar{X} > 5.5\}$.

$$\begin{aligned}\beta &= P\{\bar{X} \leq 5.5\} = P\left\{\frac{\bar{X} - 5.75}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \leq \frac{5.5 - 5.75}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right\} = P\left\{\frac{\bar{X} - 5.75}{\frac{1}{2}} \leq -0.5\right\} \\ &= \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5).\end{aligned}$$

应选 (B).

例 16. 若总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$, 对于总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本

$X_1, X_2, \dots, X_n$, 欲检验 $H_0: \sigma^2 = 4, H_1: \sigma^2 \neq 4$, 则应选用统计量

(A) $\frac{(n-1)S^2}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{2}$ (C) $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n X_i^2$ (D) $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S}$

【2023 张 1000 · 数学一 · P158 第 10 题】

解:

10. (C) 【解析】 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 检验 $H_0: \sigma^2 = 4, H_1: \sigma^2 \neq 4$, 由于 $\mu = 0$ 已知, 应选用统计

量 $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (X_i - 0)^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 它服从自由度为 n 的 χ^2 分布. 应选 (C).

例 17. 设学生完成考试的时间服从正态分布, 其标准差为 6(分钟), 若随机样本为 20 名学生, 其标准差 $S = 4.51$ (分钟), 在 $\alpha = 0.05$ 的显著性水平下, 是否可认为标准差减少? (已知 $\chi_{0.95}^2(19) = 10.117$)

【李林 108 题 · 数学一 · P125 第 10 题】

解:

(10) 解 依题设, 原假设 $H_0: \sigma = 6$; 对立假设 $H_1: \sigma < 6$.

由于 $\alpha = 0.05, n = 20, S = 4.51$, 故拒绝域为

$$R_\alpha = \{\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\} = \{\chi^2 < 10.117\}.$$

又

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(20-1) \times 4.51^2}{6^2} \approx 10.74,$$

故由 $10.74 > 10.117$, 知没有落在拒绝域, 故接受 H_0 .

综上所述, 认为标准差没有减少.

[公众号: 小松学长]