关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

真学

2023

李林考研数学系列

精讲精练880题

（数学一·解析分册）

蕴含6套卷和4套卷的解题思想

编著 李林

不靠押题靠实力
考研数学 就选李林！

“880题是一套凝结我大量**心血和功力**的习题集，不偏不怪，会让你有一种考研题就会这么考的感觉。”



扫码领取视频课程

李林老师新浪微博

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104

中国原子能出版社

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

高频考点108题

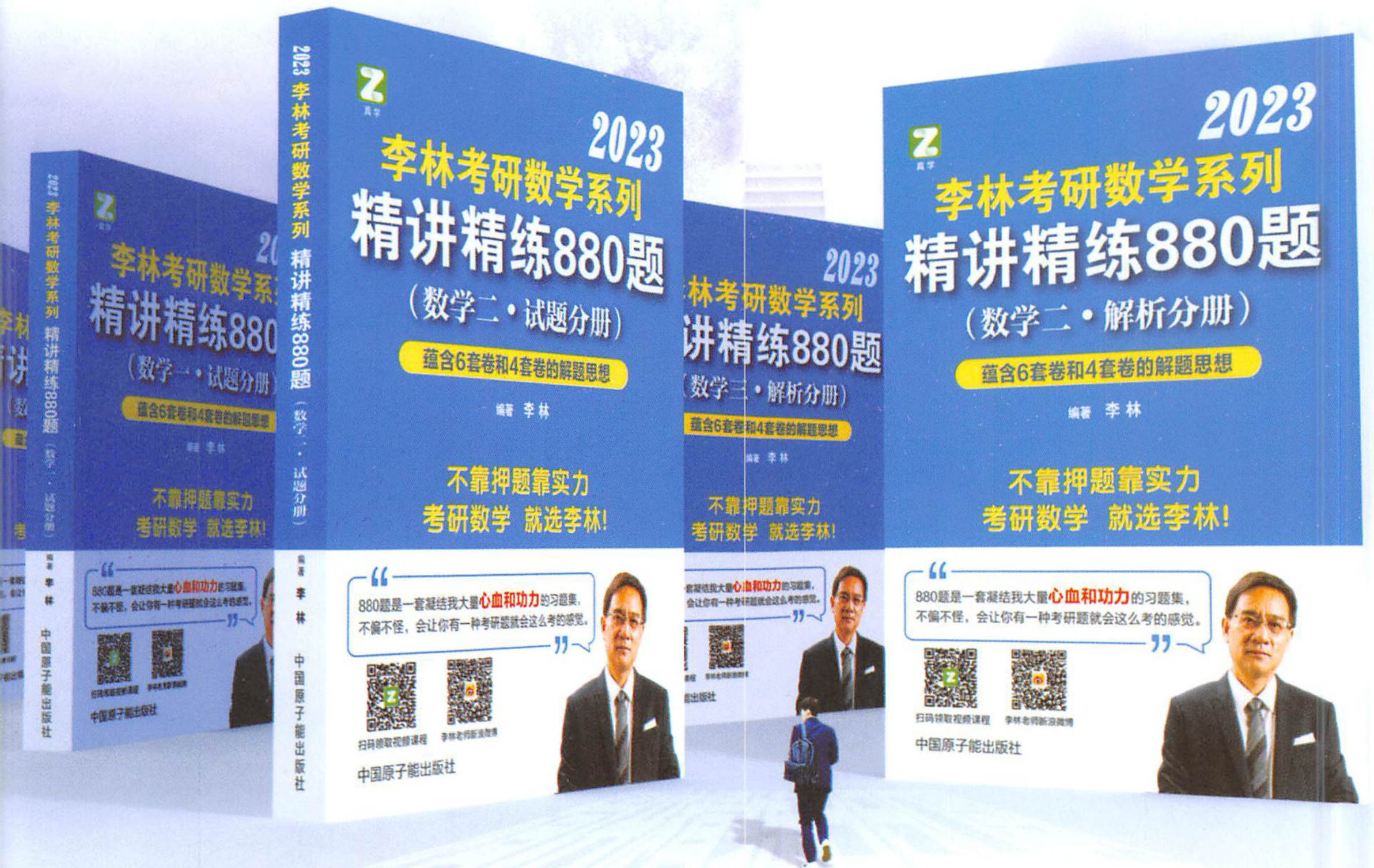
带 你 穿 越 数 学 时 空

45个考点深度透析 考情揭秘 有的放矢

45份考点知识清单 重点要点 靶向击破

200余道仿真题集训 涵盖 高数 线代 概率





精讲精练880题

带 你 逃 离 数 学 迷 宫

李林年度大作·高数/线代/概率一网打尽

基础题 与真题难度持平

综合题 略难于真题

拓展题 用来冲刺高分

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYT104 QQ群：1005405451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

真学

李林考研数学系列
精讲精练880题
（数学一·解析分册）

蕴含6套卷和4套卷的解题思想

编著 李林

不靠押题靠实力
考研数学 就选李林！

“880题是一套凝结我大量**心血和功力**的习题集，不偏不怪，会让你有一种考研题就会这么考的感觉。”



微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

扫码领取视频课程　李林老师新浪微博

微信公众号：李林教育　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

中国原子能出版社

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

目　　录

解析分册

高等数学

第一章　函数、极限、连续 …… 1
基础题 …… 1
综合题 …… 6
拓展题 …… 16
第二章　一元函数微分学及其应用 …… 17
基础题 …… 17
综合题 …… 31
拓展题 …… 40
第三章　一元函数积分学及其应用 …… 42
基础题 …… 42
综合题 …… 55
拓展题 …… 70
第四章　空间解析几何 …… 72
基础题 …… 72
拓展题 …… 77
第五章　多元函数微分学及其应用 …… 78
基础题 …… 78
综合题 …… 85
拓展题 …… 94
第六章　重积分及其应用 …… 95
基础题 …… 95
综合题 …… 106
拓展题 …… 116
第七章　微分方程及其应用 …… 118
基础题 …… 118
综合题 …… 123

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】 获取更多考研资源!

拓展题 …… 129
第八章 无穷级数 …… 130
基础题 …… 130
综合题 …… 140
拓展题 …… 148
第九章 曲线积分与曲面积分 …… 150
基础题 …… 150
综合题 …… 159

线性代数

第十章 行列式 …… 172
基础题 …… 172
综合题 …… 176
拓展题 …… 179
第十一章 矩 阵 …… 180
基础题 …… 180
综合题 …… 185
拓展题 …… 189
第十二章 向 量 …… 190
基础题 …… 190
综合题 …… 194
拓展题 …… 198
第十三章 线性方程组 …… 199
基础题 …… 199
综合题 …… 202
拓展题 …… 206
第十四章 相似矩阵 …… 207
基础题 …… 207
综合题 …… 213
拓展题 …… 219
第十五章 二次型 …… 221
基础题 …… 221
综合题 …… 223
拓展题 …… 227

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

概率统计

第十六章 随机事件及其概率 …… 229

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

基础题 …… 229
综合题 …… 231
拓展题 …… 233
第十七章 随机变量及其分布 …… 234
基础题 …… 234
综合题 …… 236
拓展题 …… 239
第十八章 多维随机变量及其分布 …… 240
基础题 …… 240
综合题 …… 246
拓展题 …… 250
第十九章 随机变量的数字特征 …… 252
基础题 …… 252
综合题 …… 256
拓展题 …… 263
第二十章 大数定律与中心极限定理 …… 265
基础题 …… 265
第二十一章 数理统计的基本概念 …… 268
基础题 …… 268
综合题 …… 270
第二十二章 参数估计 …… 272
基础题 …… 272
拓展题 …… 278
第二十三章 假设检验 …… 281
基础题 …… 281

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

高等数学

李林考研数学系列

第一章　函数、极限、连续

基础题

一、选择题

(1)C.

解　对函数 $f(x)$ 取绝对值得 $|f(x)|=|x||\sin x|e^{\cos x}$，其中 $|\sin x|$ 不恒等于 0，$e^{\cos x}>0$，故根据 $|x|$ 可断定 $f(x)$ 不是有界函数，也不是周期函数. 再由 $f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，$f(\pi)=0$，可知 $f(x)$ 不是单调函数. 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(-x)=|(-x)\sin(-x)|e^{\cos(-x)}=|x\sin x|e^{\cos x}=f(x),$$

故 $f(x)$ 是偶函数，C 正确.

(2)D.

解　在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，$\sin x$ 单调增加，$\cos x$ 单调减少，任取 $x_1,x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1<x_2$，则 $\sin x_1<\sin x_2$，故 $\cos(\sin x_1)>\cos(\sin x_2)$，所以函数 $f(x)$ 单调减少. 又 $\cos x_1>\cos x_2$，则 $\sin(\cos x_1)>\sin(\cos x_2)$，故函数 $g(x)$ 单调减少，D 正确.

【注】 ① 复合函数的单调性：
设函数 $f(x)$ 单调增加，$g(x)$ 单调减少，则
$f[f(x)]$，$g[g(x)]$ 都单调增加(假设复合有意义)；
$f[g(x)]$，$g[f(x)]$ 都单调减少.
② 复合函数的奇偶性：
设 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，则
$f[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$ 都是偶函数；
$g[g(x)]$ 是奇函数(假设复合有意义，可利用奇偶性定义证明).

(3)B.

解　由 $f(-x)=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}=-f(x)$，知 $f(x)$ 是奇函数.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}}=1.\end{aligned}$$

同理可得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$，故 D 错误. 根据极限的有界性，可知 C 错误.

(4)D.

解　由题可得　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0.$

(5)D.

解　当 $x\to0$ 时，$\frac{1}{x^2}\to+\infty$，$\sin\frac{1}{x}$ 在 -1 和 1 之间振荡，且重复函数值为零，故可排除 A，B.

取 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}(n=1,2,\cdots)$，则当 $x_n\to0$ 时，$f(x_n)=\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\pi^2\to\infty$，故 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}(x\to0)$ 不是无穷小，也不是有界量.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

令 $y_n=\frac{1}{n\pi}(n=1,2,\cdots)$，当 $y_n\to 0$ 时，$f(y_n)=0$，故当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 不是无穷大.

(6)C.

解　由已知，可得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$，

有 $1-a=0$，$a+b=0$，故 $a=1$，$b=-1$，C 正确.

【注】　由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{x+1}-(ax+b)\right]=0$ 及渐近线的定义，知 $y=ax+b$ 是 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线.

(7)B.

解　当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^n)\sim x^n$，由 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$，知

$$(x-\sin x)\tan x\sim\frac{x^4}{6}.$$

由已知，$4>n$ 且 $n>2$，故 $n=3$.

(8)A.

解　由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0<1,$$

故当 x 充分大时，$g(x)=x>0$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}<1$，即 $f(x)<g(x)$. 又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}=+\infty>1,$$

故当 x 充分大时，$g(x)=x>0$，$\dfrac{h(x)}{g(x)}>1$，即 $h(x)>g(x)$. A 正确.

【注】　此题本质是无穷大量阶的比较：从低阶到高阶有

$$\ln^{\lambda}n,\ n^{\alpha},\ a^n,\ n!,\ n^n\ (n\to\infty),$$

其中 $\lambda\geqslant 1$，$\alpha>0$，$a>1$.

(9)C.

解　对C选项：用反证法，若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}[(a_n-b_n)+(a_n+b_n)]=\lim\limits_{n\to\infty}2a_n$，极限存在，与已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在相矛盾，故 C 正确.

(10)A.

解　$f(x)$ 在 $x=0$ 处间断，考虑间断点处的左、右极限.

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，A 正确.

二、填空题

(1)1.

解　$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1.\end{cases}$$

由 $|f(x)|\leqslant 1$，知 $f[f(x)]=1$，故 $f\{f[f(x)]\}=1$.

(2)$-\dfrac{3}{2}$.

解　当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}ax^2$，$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，故 $a=-\dfrac{3}{2}$.

(3)-2.

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{2ax}-1}{x}=2+\lim_{x\to 0}\frac{2ax}{x}=2+2a.$$

又由函数连续的定义，可得 $2+2a=a$，解得 $a=-2$.

(4)$P\leqslant 2$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

解 若

$$\lim_{x\to+\infty}x^P(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\lim_{x\to+\infty}x^P\cdot a^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)=\lim_{x\to+\infty}x^P\cdot a^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{\ln a}{x(x+1)}$$

存在，则有 $P\leqslant 2$. 当 $P<2$ 时，极限为 0；当 $P=2$ 时，极限为 $\ln a$.

(5)0.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{e^x+x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{e^x+3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+2}{e^x+6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x+6}=0,$$

且 $|\sin x+\cos x|\leqslant 2$，即有界，故原式 $=0$.

【注】 当 $x\to+\infty$ 时，e^x 是比 x^3 高阶的无穷大，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{e^x+x^3}=0$.

(6) $\dfrac{1}{12}$.

解 当 $x\to 0$ 时，有 $e^{x^4}-1\sim x^4$，故

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim e^{2-2\cos x}\cdot\frac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{12}.$$

【注】 解答中 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim e^{2-2\cos x}\cdot\dfrac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}$，这一步采取的方法是分子提取公因式 $e^{2-2\cos x}$，提取公因式是考研试题中常用的技巧.

一般以下三种情形常可考虑提取公因式：①$\infty-\infty$；② 指数函数；③ 幂函数.

(7) $\dfrac{4}{3}$.

解 当 $x\to0$ 时，$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{a+bx+cx^2+dx^3-\left[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a+(b-1)x+cx^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=0,$$

由上式，可得 $a=0,b=1,c=0,d=\dfrac{1}{3}$，故 $a+b+c+d=\dfrac{4}{3}$.

三、解答题

(1) **证** 令 $f_1(x)=f(x)+f(-x),f_2(x)=f(x)-f(-x)$，则

$$f_1(-x)=f(-x)+f(x)=f_1(x),$$

故 $f_1(x)$ 是偶函数. 又 $f_2(-x)=f(-x)-f(x)=-f_2(x)$，故 $f_2(x)$ 是奇函数，所以

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

(2) **解** 由已知，

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x},\qquad①$$

在 ① 式中用 $\dfrac{1}{x}$ 代替 x，得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx.\qquad②$$

再由 ① $\times a-$ ② $\times b$，得 $(a^2-b^2)f(x)=\dfrac{ac}{x}-bcx$. 由于 $|a|\neq|b|$，故

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right).$$

而

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(3) 证　任取 $x_1,x_2\in(-a,a)$，且 $x_2>x_1$，由已知，

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant|x_2-x_1|=x_2-x_1.$$

而　　$$f(x_1)-f(x_2)\leqslant|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant x_2-x_1,$$

故 $f(x_1)+x_1\leqslant f(x_2)+x_2$，即 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$，故 $F(x)$ 在 $(-a,a)$ 内单调增加.

(4) 证　利用极限定义证明，关键是找足够大的 N，使得 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

由 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N_1，使得当 $2k>N_1$ 时，有

$$|x_{2k}-a|<\varepsilon;\tag{①}$$

$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$，对上述 $\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N_2，使得当 $2k+1>N_2$ 时，有

$$|x_{2k+1}-a|<\varepsilon.\tag{②}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，① 与 ② 同时成立，即 $|x_n-a|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(5) 解　(Ⅰ)　$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x\sin x}{x^2+x\sin\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}}=1.$$

(Ⅱ) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac1x}+b^{\frac1x}+c^{\frac1x}}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3+a^{\frac1x}+b^{\frac1x}+c^{\frac1x}-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^{\frac1x}+b^{\frac1x}+c^{\frac1x}-3}\cdot\frac{a^{\frac1x}+b^{\frac1x}+c^{\frac1x}-3}{3\cdot\frac1x}}$，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac1x}+b^{\frac1x}+c^{\frac1x}-3}{3\cdot\frac1x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^{\frac1x}-1)+(b^{\frac1x}-1)+(c^{\frac1x}-1)}{3\cdot\frac1x}$$

$$=\frac13(\ln a+\ln b+\ln c)=\ln(abc)^{\frac13},$$

故原式 $=\mathrm{e}^{\ln(abc)^{\frac13}}=(abc)^{\frac13}$.

(Ⅲ)　$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+\mathrm{e}^x)-x}{\ln(\mathrm{e}^{2x}-x^2)-2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+\mathrm{e}^x)-\ln\mathrm{e}^x}{\ln(\mathrm{e}^{2x}-x^2)-\ln\mathrm{e}^{2x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin^2x}{\mathrm{e}^x}\right)}{\ln\left(1-\frac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2x}{\mathrm{e}^x}}{-\frac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}}=\lim_{x\to0}(-\mathrm{e}^x)\frac{\sin^2x}{x^2}=-1.$$

(Ⅳ)　$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac3x}-\mathrm{e}^3}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{3\ln(1+x)}{x}}-\mathrm{e}^3}{x}=\mathrm{e}^3\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{3\ln(1+x)}{x}-3}-1}{x}$$

$$=\mathrm{e}^3\lim_{x\to0}\frac{\frac{3\ln(1+x)}{x}-3}{x}=3\mathrm{e}^3\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=3\mathrm{e}^3\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac32\mathrm{e}^3.$$

(Ⅴ)　$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\tan x-x}-1)}{x^3}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^x\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac13x^3}{x^3}=\frac13.$$

(Ⅵ)　$$\lim_{x\to0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac1x\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\tan x\cdot\sin x\cdot x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac12x^2}{3x^2}=\frac16.$$

(Ⅶ) 由于 $\lim\limits_{x\to0}(1-x^2)^{\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}}=\lim\limits_{x\to0}[(1-x^2)^{-\frac{1}{x^2}}]^{\frac{-x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}}$，且

$$\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}=-2,$$

故原式 $=\mathrm{e}^{-2}$.

(Ⅷ)　$$\lim_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\sin x\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac1x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac1x}{-\frac{1}{x^2}}}=\mathrm{e}^0=1.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(6) 解 （Ⅰ）依题意，得

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$

故根据夹逼准则，原式 $=\frac{1}{2}$.

（Ⅱ） $$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

（Ⅲ）由 $\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

故原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

（Ⅳ）由于 $1\leqslant\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{n}$，且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，故由夹逼准则，知原式 $=1$.

（Ⅴ） $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{1+\sqrt[n]{3}}{2}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{1+\sqrt[n]{3}}{2}-1}\cdot n\left(\frac{1+\sqrt[n]{3}}{2}-1\right)}.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1+\sqrt[n]{3}}{2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{\sqrt[n]{3}-1}{2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{3}-1)=\frac{1}{2}\ln 3,$$

故原式 $=e^{\frac{1}{2}\ln 3}=\sqrt{3}$.

【注】 常用结论：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$.

(7) 解 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内的间断点为 $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.

由 $\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}f(x)=+\infty$，$\lim_{x\to(\frac{5\pi}{4})^+}f(x)=+\infty$，可知 $x=\frac{\pi}{4}$，$x=\frac{5\pi}{4}$ 为第二类间断点.

由 $\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$，$\lim_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$，可知 $x=\frac{3\pi}{4}$，$x=\frac{7\pi}{4}$ 为第一类（可去）间断点.

(8) 解 先求极限得到 $f(x)$ 的表达式，再讨论 $f(x)$ 的连续性.

当 $x\neq 0$ 时，有 $$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}-1, & 0<|x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ x^2, & |x|>1,\end{cases}$$

故在 $(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$ 内 $f(x)$ 连续.

又因为 $$\lim_{x\to-1^-}f(x)=1,\ \lim_{x\to-1^+}f(x)=-1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=-1,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=1,$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-1,\ \lim_{x\to1^+}f(x)=1,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处间断，是第一类间断点，其中 $x=0$ 是可去间断点.

(9) 证 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，知 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上取得最小值 k 和最大值 K.

由于 $$(m+n)k\leqslant mf(c)+nf(d)\leqslant(m+n)K,$$

故 $k\leqslant\frac{mf(c)+nf(d)}{m+n}\leqslant K$.

由介值定理，存在一点 $\xi\in[c,d]\subset(a,b)$，使得 $f(\xi)=\frac{mf(c)+nf(d)}{m+n}$，即

$$mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi).$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(10) 解　依题意，有 $x_1=\sqrt{a}, x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}, \cdots, x_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{个根号}}, \cdots,$

可知$\{x_n\}$严格单调增加.

由 $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，得 $x_{n+1}^2=a+x_n$，故 $x_{n+1}=\dfrac{a}{x_{n+1}}+\dfrac{x_n}{x_{n+1}}<\dfrac{a}{x_{n+1}}+1$.

而 $x_{n+1}>\sqrt{a}$，因此 $x_{n+1}<\dfrac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1$，即$\{x_n\}$有上界，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，等式 $x_{n+1}^2=a+x_n$ 两边同时取极限$(n\to\infty)$，得 $A^2=a+A$，解得

$$A_1=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},\ A_2=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}(\text{舍去}),$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

(11) 证　由已知，有 $x_{n+1}\geqslant 0, y_{n+1}\geqslant 0, x_n\leqslant y_n(n=1,2,\cdots)$.

由此可推得

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geqslant\sqrt{x_n^2}=x_n,$$

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\leqslant\frac{y_n+y_n}{2}=y_n,$$

故$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少. 又 $x_1\leqslant x_n\leqslant y_{n+1}\leqslant y_1(n=1,2,\cdots)$，所以$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都有界.

由单调有界准则，知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$都存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$.

又由 $x_n\leqslant y_n$，可推得 $A\leqslant B$，当 $n\to\infty$ 时，将 $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$ 和 $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ 两端分别取极限，得 $A=\sqrt{AB}, B=\dfrac{A+B}{2}$，由此可得 $A=B$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

综合题

一、选择题

(1)A.

解　令$\dfrac{1}{x}=t$，则原式$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{\sin t}-1}{(1+t)^k-(1+t)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{(1+t)[(1+t)^{k-1}-1]}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{(k-1)t(1+t)}=\frac{1}{k-1}=a\neq0,$$

故 $k\neq1$，A 正确.

(2)A.

解　由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^p}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1-x}}{px^{p-1}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-4x^2}{1-x^4}}{px^{p-1}}=-\frac{4}{p}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{p-3}(1-x^4)}=c,$$

可得 $p=3, c=-\dfrac{4}{3}$，A 正确.

(3)D.

解　当 $x\to0$ 时，

$$\beta(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\sim x^2,$$

$$\alpha(x)=\tan x-\sin x=(1-\cos x)\tan x\sim\frac{x^3}{2},$$

$$\gamma(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t\,dt=-\cos t\Big|_0^{1-\cos x}$$

$$=1-\cos(1-\cos x)\sim\frac{(1-\cos x)^2}{2}\sim\frac{x^4}{8},$$

故 D 正确.

(4)D.

解　依题设，有

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\lim_{x\to 0} y(x) = y(0) = 0, \lim_{x\to 0} y'(0) = y'(0) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} y''(x) = \lim_{x\to 0}[e^{3x} - 2y'(x) - y(x)] = 1,$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{1+x^2}}{y(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{y(x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)} = \frac{1}{2}\times 2 = 1.$$

(5) B.

解
$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) \neq 0 = F(0),$$
故 $x = 0$ 是 $F(x)$ 的第一类间断点.

(6) D.

解 当 $x \to -1$ 时，$\arctan\frac{1}{x^2-1}$ 有界，$x+1 \to 0$，故
$$\lim_{x\to -1} f(x) = 0 = f(-1),$$
即 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续. 又因为
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\pi, \lim_{x\to 1^+} f(x) = \pi,$$
所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处间断.

(7) D.

解 对于 A：取 $M = \frac{a+1}{2}$，则 $M > 1$，令 $x_n = a_n - \frac{a+1}{2}$，则
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{a+1}{2}\right) = a - \frac{a+1}{2} = \frac{a-1}{2} > 0.$$
由极限的保号性，可知当 n 充分大时，有 $x_n = a_n - \frac{a+1}{2} > 0$，即
$$a_n > \frac{a+1}{2} = M > 1.$$

对于 B：令 $x_n = b_n - a_n$，则
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = b - a > 0,$$
由极限的保号性，可知当 n 充分大时，$x_n > 0$，即 $a_n < b_n$.

对于 C：令 $x_n = N - a_n$，则 $x_n \geqslant 0 (n = 1,2,\cdots)$，由极限的保号性，得 $N - a = \lim_{n\to\infty} x_n \geqslant 0$，即 $a \leqslant N$，同理可得 $M \leqslant a$.

对于 D：取 $a_n = 2 - \frac{2}{n}$，则 $\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{2}{n}\right) = 2 \neq 0$. 显然，$a_n = 2 - \frac{2}{n} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$，故选 D.

(8) D.

解 若取 $x_n = n, y_n = -n$，则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均无界，但 $\{x_n + y_n\}$ 有界，故排除 A.

若取 $x_n = n[1 + (-1)^n], y_n = n[1 - (-1)^n]$，则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均无界，但 $x_n y_n = 0$，即 $\{x_n y_n\}$ 有界，故排除 B.

若取 $x_n = n, y_n = 0$，则 $\{x_n\}$ 无界，$\{y_n\}$ 有界，但 $\{x_n y_n\}$ 有界，故排除 C.

D 正确.

(9) D.

解 对于 D：由于
$$\frac{1}{n^2}\cdot n < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1^2}\cdot n,$$
$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n},$$
且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$，故由夹逼准则，可知原极限等于 1.

对于 A：当 $x \to 1^-$ 时，有 $\frac{1}{1-x} \to +\infty$，$2^{\frac{1}{1-x}} \to +\infty$，故 $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}} = 0$；当 $x \to 1^+$ 时，有 $\frac{1}{1-x} \to -\infty$，$2^{\frac{1}{1-x}} \to 0$，故 $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}} = 1$，由此可知原极限不存在.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

对于B:令 $f(x)=\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)^{x}$，若取 $x_n=n\pi, y_n=\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi(n=1,2,\cdots)$，则当 $n\to\infty$ 时，有 $x_n\to+\infty$，$y_n\to+\infty$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0}{n\pi}\right)^{n\pi}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right]^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}=\mathrm{e},$$

故由海涅定理，可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)^{x}$ 不存在.

对于C:由于数列 $\{n+(-1)^n(n+1)\}$ 无界，故 $\lim[n+(-1)^n(n+1)]$ 不存在.

(10)D.

解　由已知，$tf(t)$ 是偶函数，故 $\int_0^u tf(t)\mathrm{d}t$ 是关于 u 的奇函数，则 $\int_a^x\left[\int_0^u tf(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$ 是关于 x 的偶函数.

【注】　结论:设 $f(x)$ 连续，$a\neq0$ 为常数，则当 $f(x)$ 是奇函数时，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数；当 $f(x)$ 是偶函数时，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 不一定为奇函数.

(11)C.

解　当 $x>0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+2^{tx}}{1+2^{tx}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x2^{-tx}+1}{2^{-tx}+1}=1$；

当 $x=0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+2^{tx}}{1+2^{tx}}=\dfrac{1}{2}$；

当 $x<0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+2^{tx}}{1+2^{tx}}=x$，故

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ x, & x<0,\end{cases}$$

$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导，C正确.

【注】　这里利用了结论:设 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，若 $f(x)$ 可积，则 $F(x)$ 连续；若 $f(x)$ 连续，则 $F(x)$ 可导.

题中 $f(x)$ 只有一个第一类间断点 $x=0$，故 $f(x)$ 可积.

(12)A.

解　由 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(x^3-1)\sin x}{|x|(1+x^2)}=1$ 和极限的有界性，可知存在 $\delta_1>0$，当 $-\delta_1<x<0$ 时，$f(x)$ 有界.

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x^3-1)\sin x}{|x|(1+x^2)}=-1$，可知存在 $\delta_2>0$，当 $0<x<\delta_2$ 时，$f(x)$ 有界.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|x|<\delta$ 时，$f(x)$ 有界. 又由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{|x|(1+x^2)}=1,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{|x|(1+x^2)}=-1,$$

且 $|\sin x|\leqslant1$，可知存在充分大的 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，$f(x)$ 有界.

又 $f(x)$ 在 $[\delta,X]$，$[-X,-\delta]$ 上连续，故有界，从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

【注】　判别 $f(x)$ 在区间上有界的常用方法:

① 利用定理:若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

② 若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界，(a,b) 为无穷区间也成立.

③ 结论:若 $f'(x)$ 在有限区间 (a,b) 内有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证　任取 $x\in(a,b)$，取定点 $x_0\in(a,b)(x\neq x_0)$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$，则

$$|f(x)|=|f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)|\leqslant|f(x_0)|+|f'(\xi)||x-x_0|.$$

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

由 $f'(\xi)$ 有界及 $|x-x_0|<|b-a|$，可知存在 $M\geqslant 0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$.
此结论对 $(-\infty,+\infty)$ 区间不成立.

二、填空题

(1) 5.

解 $f(x)=3x-4\sin x+\sin x\cos x=3x-4\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$$=3x-4\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right]+\frac{1}{2}\left[2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^6)\right]$$

$$=\frac{1}{10}x^5+o(x^6),$$

故 $f(x)$ 是关于 x 的 5 阶无穷小$(x\to 0)$.

(2) -12.

解 利用泰勒公式，分母中有 $\dfrac{x^2}{2}$ 项，将 $\sqrt{1+x^2}$ 展开到比 x^2 高次幂的项，有

$$\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)x^4+o(x^4),$$

故
$$\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}=\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$

又 $\sin x^2\sim x^2$，将 $\cos x,\mathrm{e}^{x^2}$ 分别展开到 x^2 项，得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2),\ \mathrm{e}^{x^2}=1+x^2+o(x^2),$$

故
$$(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})\sin x^2=\frac{-3x^4}{2}+o(x^4),$$

所以原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}=-12.$

(3) 6.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$，可知当 $x\to 0$ 时，有 $f(x)\sim-(1-\cos x)\sim-\dfrac{x^2}{2}$.

又
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}f(t)\mathrm{d}t}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{nx^{n-1}}=\frac{2}{n}\lim_{x\to 0}\frac{xf(x^2)}{x^{n-1}}$$

$$=\frac{2}{n}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{-(x^2)^2}{2}}{x^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{-x^5}{x^{n-1}},$$

故 $n-1=5$，即 $n=6$.

(4) $(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$.

解
$$a_n=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\frac{n}{n+1}}(1+x^n)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+x^n)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{3}(1+x^n)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{n}\left\{\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，故

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\}=(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1.$$

(5) $\dfrac{1}{1-2k}$.

解
$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2nk+1}{n(1-2k)}\right]^n=\ln\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-2nk+1}{n(1-2k)}\right]^n$$

$$=\ln\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{n(1-2k)}\right]^{n(1-2k)}\right\}^{\frac{1}{1-2k}}=\ln\mathrm{e}^{\frac{1}{1-2k}}=\frac{1}{1-2k}.$$

(6) a_1^{-1}.

解 由 $0<a_1<a_2$，有

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^{-n}+a_2^{-n})^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}a_1^{-1}\left[1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=a_1^{-1}\left(\text{这里}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n=0\right).$$

【注】 ① 这类问题也可利用结论：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{a_i\}(a_i>0,i=1,2,\cdots,k).$$

由 $0<a_1<a_2$，可知 $\frac{1}{a_1}>\frac{1}{a_2}$，故

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^{-n}+a_2^{-n})^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_1}\right)^n+\left(\frac{1}{a_2}\right)^n}=\frac{1}{a_1};$$

② 本题也可利用夹逼准则求解，由 $0<a_1<a_2$，可知 $\frac{1}{a_1}>\frac{1}{a_2}$，故

$$\frac{1}{a_1}=\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_1}\right)^n}<\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_1}\right)^n+\left(\frac{1}{a_2}\right)^n}<\sqrt[n]{2\left(\frac{1}{a_1}\right)^n}=\frac{\sqrt[n]{2}}{a_1},$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，故 $\lim_{n\to\infty}(a_1^{-n}+a_2^{-n})^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{a_1}$.

(7) $-1,0$.

解 $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^{-6}-1}-a-bx^{-2}}{\frac{1}{x^2}}.$$

而 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$，由已知，有 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^{-6}-1}-a-bx^{-2})=0$，易知 $a=-1$，代回原式，得 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}+x^2-b)=0$，所以

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}+x^2)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}-x^2\sqrt[3]{1-x^6}+x^4}=0,$$

故 $a=-1,b=0$.

(8) $-2,2$.

解 由 $\lim_{x\to0^+}[x]=0,\lim_{x\to0^-}[x]=-1$，有

$$\lim_{x\to0^+}\left\{a[x]+\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right\}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln[e^{\frac{2}{x}}(1+e^{-\frac{2}{x}})]}{\ln[e^{\frac{1}{x}}(1+e^{-\frac{1}{x}})]}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2+x\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{1+x\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}=2=b,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left\{a[x]+\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right\}=-a+\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}=-a+\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=-a+0=2,$$

故 $a=-2,b=2$.

(9) 0.

解 由 $y=f(x)$ 关于点 $(a,0)(a\neq0)$ 对称，知 $f(a+x)=-f(a-x)$，即 $f(a+x)$ 和 $f(a-x)$ 关于 x 是奇函数，故对称区间上积分为 0，即 $I=0$.

【注】 结论：

① $y=f(x)$ 关于直线 $x=a(a\neq0)$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)\Rightarrow f(a-x),f(a+x)$ 关于 x 是偶函数；

② $y=f(x)$ 关于点 $(a,0)(a\neq0)$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=-f(a-x)\Rightarrow f(a-x),f(a+x)$ 关于 x 是奇函数.

三、解答题

(1) 证 考虑数列 $\{|a_n|\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=|q|<1,$$

由极限的保号性，存在充分大的正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1$，即 $|a_{n+1}|<|a_n|$，于是 $\{|a_n|\}$ 单调减少，又因 $|a_n|\geqslant0$，由单调有界准则，$\lim_{n\to\infty}|a_n|$ 存在，记 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=a$，下证 $a=0$，用反证法.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

若 $a \neq 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}|}{\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|}=\frac{a}{a}=1,$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=|q|<1$ 矛盾，故 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(2) 解　由于 $u_n=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdots 2^{\frac{1}{2^n}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=2^1=2$.

【注】　此题相乘的因子不是有限项，不能用极限的四则运算法则.

(3) 证　分 $a=0$，$a>0$，$a<0$ 三种情况进行讨论.

当 $a=0$ 时，$x_n=2$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$；

当 $a>0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+a)^{n+1}+(1-a)^{n+1}}{(1+a)^n+(1-a)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n(1-a)}{1+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n},$$

由 $\left|\dfrac{1-a}{1+a}\right|<1$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^n=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1+a$；

当 $a<0$ 时，同理可证，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1-a$. 即证.

(4) 证　令 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}=a$，则

$$a=\sqrt[n]{a^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{ka^n}.$$

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{ka^n}=\lim\limits_{n\to\infty}a\sqrt[n]{k}=a$，故由夹逼准则，可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}.$$

(5) 解　（Ⅰ）由 $x_{n+2}=\dfrac{1}{2}(3x_{n+1}-x_n)$，有 $\dfrac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}=\dfrac{1}{2}$.

令 $y_n=x_{n+1}-x_n(n=1,2,\cdots)$，则 $\{y_n\}$ 是以 $\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$x_n=x_1+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}=1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

（Ⅱ）由 $x_{n+2}=\dfrac{1}{2}(x_n+x_{n+1})$，得 $x_{n+2}-x_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)\ (n=1,2,\cdots)$.

当 $n>3$ 时，$x_n-x_{n-1}=-\dfrac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2(x_{n-2}-x_{n-3})$

$$=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2-x_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2},$$

故

$$\begin{aligned}x_n&=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})\\&=1+\sum_{k=0}^{n-2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=1+\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right],\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{5}{3}$.

(6) 证　（Ⅰ）$f_n(x)=1-(1-\cos x)^n$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，$f_n(0)=1$，$f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，而 $0<\dfrac{1}{2}<1$，由介值定理，至少存在一点 $x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

又由 $f_n'(x)=-n(1-\cos x)^{n-1}\cdot\sin x<0\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$,

可知当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f_n(x)$ 严格单调减少，故 x_n 是唯一的.

(Ⅱ)由

$$f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)=1-\left[1-\cos\left(\arccos\frac{1}{n}\right)\right]^n=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n,$$

得 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}>\frac{1}{2}$，故存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{2}$.

又 $f_n(x)$ 单调减少，故 $\arccos\frac{1}{n}<x_n<\frac{\pi}{2}$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\arccos\frac{1}{n}=\frac{\pi}{2}$，由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$.

(7) 证 (Ⅰ)令 $f(x)=x-1-2\ln x$，则 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}-3<0$，且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1-2\ln x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right)=+\infty.$$

由零点定理，$f(x)=0$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内至少有一个实根. 又由于

$$f'(x)=1-\frac{2}{x}>0,x\in(\mathrm{e},+\infty),$$

故 $f(x)=0$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内有唯一实根，记为 ξ.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，当 $x\in(\mathrm{e},\xi)$ 时，$f(x)<0$，即 $1+2\ln x>x$，故当 $\mathrm{e}<x_0<\xi$ 时，

$$x_1=1+2\ln x_0>x_0,$$

$$x_1=1+2\ln x_0<1+2\ln\xi=\xi.$$

假设 $x_n>x_{n-1}$，且 $x_n<\xi$，则有

$$x_{n+1}=1+2\ln x_n>x_n,$$

$$x_{n+1}=1+2\ln x_n<1+2\ln\xi=\xi.$$

由数学归纳法，知 $\{x_n\}$ 单调增加有上界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

$x_n=1+2\ln x_{n-1}$ 左右两端同时取极限，有 $A=1+2\ln A$，即 A 为方程 $x=1+2\ln x$ 的实根.

由(Ⅰ)，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=\xi$.

(8) 证 (Ⅰ)令 $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right),x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，则

$$g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right),g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1).$$

若 $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$，取 $\xi=\frac{1}{2}$ 即可；若 $g\left(\frac{1}{2}\right)\neq0$，则由 $f(0)=f(1)$，知 $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

由零点定理，知至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\subset(0,1)$，使得

$$g(\xi)=f(\xi)-f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)=0,$$

即 $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$.

(Ⅱ)令 $F(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x),x\in\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$，则

$$F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(1)-f(0)=0.$$

若 $F(0)=F\left(\frac{1}{n}\right)=\cdots=F\left(\frac{n-1}{n}\right)=0$，即

$$f\left(0+\frac{1}{n}\right)-f(0)=f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)=\cdots=f(1)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)=0,$$

所证结论显然成立；

若 $F(0),F\left(\frac{1}{n}\right),\cdots,F\left(\frac{n-1}{n}\right)$ 不全为零，则其中必有正值和负值，由零点定理，知至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

【注】 本例可以推广为：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)=f(b)$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{b-a}{n}\right)$.

(9) 证
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \lim_{n\to\infty}\sin\left[n\pi+\pi(\sqrt{n^2+1}-n)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin[\pi(\sqrt{n^2+1}-n)]\\ &= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right).\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$，所以
$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)=0,$$
从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=0$. 而 $|\sin(\pi\sqrt{n^2+n})|\leqslant 1$ 有界，故
$$\lim_{n\to\infty}\left[\sin(\pi\sqrt{n^2+1})\cdot\sin(\pi\sqrt{n^2+n})\right]=0.$$

【注】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin[n\pi+\pi(\sqrt{n^2+n}-n)]$
$$\begin{aligned}&= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)]\\ &= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right).\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\dfrac{\pi}{2}$，所以
$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=1,$$
从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(\pi\cdot\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)$ 不存在，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+n})$ 不存在，所以此题不能用极限的运算法则.

(10) 解　$e^{3x^3}-1\sim 3x^3(x\to 0)$，所求极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型.

由洛必达法则，有
$$\begin{aligned}\text{原式}&= \lim_{x\to 0}\frac{(3+2\tan x)^x-3^x}{9x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\left[\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)^x-1\right]}{9x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)}-1}{9x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)}{9x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}\tan x}{9x}=\frac{2}{27}.\end{aligned}$$

(11) 解　(Ⅰ) 显然，$x_n>0$ 有下界. 又 $\sin x<x(x>0)$，故 $x_{n+1}=\sin x_n<x_n$，所以 $\{x_n\}$ 单调减少，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记为 A. $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边同时求极限，得 $A=\sin A$，故 $A=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(Ⅱ)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}\ (1^\infty\text{ 型})\\ &= \lim_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin t-t}{t}\right)^{\frac{t}{\sin t-t}}\right]^{\frac{\sin t-t}{t^3}}.\end{aligned}$$

而
$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{3t^2}=-\frac{1}{6},$$
所以原式 $=e^{-\frac{1}{6}}$.

(12) 证　令 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$，则由
$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

可得$\{x_n\}$单调减少.又由$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$,知

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=(x_{n+1}-x_n)+(x_n-x_{n-1})+\cdots+(x_2-x_1)+x_1\\&>\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}-1\right)+1\\&=\frac{1}{n+1}>0,\end{aligned}$$

故$\{x_n\}$有下界,从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(13)解 由$x_{n+1}=\ln(e^{x_n}-1)-\ln x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$,知$e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$.

由$x_1>0$,知$e^{x_2}=\frac{e^{x_1}-1}{x_1}>1$(利用当$x>0$时,$e^x-1>x$),故$x_2>0$,由归纳法,知$x_n>0$,即$\{x_n\}$有下界.

又由拉格朗日中值定理,可得$e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=\frac{e^{x_n}-e^0}{x_n-0}=e^{\xi_n}<e^{x_n}$,其中$0<\xi_n<x_n$.而$e^x$是单调增加函数,故$x_{n+1}<x_n$,即$\{x_n\}$单调减少,由单调有界准则,知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,由$e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$变形为$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$,两边取极限$(n\to\infty)$,得

$$ae^a=e^a-1,$$

解得$a=0$.

(14)解 (Ⅰ)
$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}=\cdots\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.\end{aligned}$$

当$|x|<1$时,$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$,故原极限$=\frac{1}{1-x}$.

(Ⅱ)
$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\left(2\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}\right)}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\\&=\lim\frac{2^{n-2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\left(2\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\\&=\cdots\cdots\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.\end{aligned}$$

(Ⅲ)原极限$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{\sin x}}{1-\sin x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{\sin x}}{1-\sin x}\cdot\cdots\cdot\frac{1-\sqrt[n]{\sin x}}{1-\sin x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x}\cdot\cdots\cdot\frac{1-\sqrt[n]{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

(15) 解 （Ⅰ）由已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=\dfrac{1}{2}$，结合极限和无穷小的关系，有

$$\frac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=\frac{1}{2}+\alpha,$$

其中$\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$. 又当$x\to 0$时，$a^x-1\sim x\ln a$，所以

$$\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]\sim\frac{1}{2}x\ln a+\alpha x\ln a,$$

从而$\dfrac{f(x)}{\sin x}\sim\dfrac{1}{2}x\ln a$（这里$\alpha x\ln a$是比$x$高阶的无穷小），即有$\dfrac{f(x)}{x}\sim\dfrac{1}{2}\sin x\ln a$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}\sin x\ln a}{x}=\frac{1}{2}\ln a.$$

（Ⅱ）由

$$\lim_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a}=1(a\neq 0),$$

可知$f(2a)=f(4a)=0$（否则极限为∞）.

因而$x-2a,x-4a$均为$f(x)$的因式，又$f(x)$是三次多项式，故可令

$$f(x)=A(x-2a)(x-4a)(x-B),$$

其中A,B为待定常数. 由

$$\lim_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to 2a}\frac{A(x-2a)(x-4a)(x-B)}{x-2a}=-2Aa(2a-B),$$

知

$$-2Aa(2a-B)=1. \qquad ①$$

由

$$\lim_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a}=\lim_{x\to 4a}\frac{A(x-2a)(x-4a)(x-B)}{x-4a}=2Aa(4a-B),$$

知

$$2Aa(4a-B)=1. \qquad ②$$

联立①②式，解得$A=\dfrac{1}{2a^2}$，$B=3a$，从而$f(x)=\dfrac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)(x-3a)$，故

$$\lim_{x\to 3a}\frac{f(x)}{x-3a}=\lim_{x\to 3a}\frac{\dfrac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)(x-3a)}{x-3a}=-\frac{1}{2}.$$

(16) 证 依题意，$f(x)$在(a,b)内有最大值，从几何上易理解，证明的关键是找到一点$\xi\in(a,b)$，利用最大值的定义证明$f(\xi)$为最大值.

由$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$及极限的定义，知对于$M=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，存在这样的$c$和$d$，$a<c<\dfrac{a+b}{2}<d<b$，当$a<x\leqslant c$或$d\leqslant x<b$时，都有$f(x)<M$.

又$f(x)$在(a,b)内连续，所以$f(x)$在$[c,d]\subset(a,b)$上连续，由最大值定义知，存在$\xi\in[c,d]$，使$f(\xi)\geqslant f(x)$，$x\in[c,d]$，特别有$f(\xi)\geqslant f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

下证$f(\xi)$为(a,b)内的最大值：

① 当$x\in(a,c)$或$x\in(d,b)$时，有$f(x)<f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant f(\xi)$；

② 当$x\in[c,d]$时，有$f(x)\leqslant f(\xi)$.

综上所述，$f(\xi)$为$f(x)$在(a,b)内的最大值.

【注】 若将本题的条件改为“设$f(x)$在(a,b)内连续，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$”，则$f(x)$在$(a,b)$内有最小值.

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园 更多考研资源!

拓展题

解答题

(1)证 （Ⅰ）令 $G(x)=F(x)-x=\frac{1}{2}[f(x)-x]$，则 $G(a)>0, G(b)<0$，由零点定理，存在 $x^*\in(a,b)$，使得 $G(x^*)=0$，即 $F(x^*)=x^*$.

（Ⅱ）由已知条件，$x_0\in[a,b]$，$x_n=F(x_{n-1})\in[a,b]$，故$\{x_n\}$有界. 又

$$F'(x)=\frac{1}{2}[1+f'(x)]>0\ (\text{因}\ |f'(x)|<1).$$

由拉格朗日中值定理，得

$$x_n-x_{n-1}=F(x_{n-1})-F(x_{n-2})=F'(\xi)(x_{n-1}-x_{n-2})(\xi\text{介于}x_{n-1}\text{与}x_{n-2}\text{之间}),$$

由上式可知，当 $x_1>x_0$ 时，数列$\{x_n\}$单调增加；当 $x_1<x_0$ 时，数列$\{x_n\}$单调减少，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，由（Ⅰ）知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$.

(2)解 （Ⅰ）由 $f(x)$ 单调减少且非负连续，可知当 $x\in[k,k+1]$ 时，有

$$f(k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(k),$$

故

$$\int_k^{k+1}f(k+1)\mathrm{d}x\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_k^{k+1}f(k)\mathrm{d}x,$$

即 $f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)$.

（Ⅱ）若取 $f(x)=\frac{1}{x}(x>0)$，显然 $f(x)$ 单调减少且非负，则由（Ⅰ）知

$$\frac{1}{n+1}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n},$$

故

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\leqslant1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

$$1+\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x\geqslant1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

又因为

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{n+1}=\ln(1+n),$$

$$\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^n=\ln n,$$

所以

$$\ln(1+n)\leqslant1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant1+\ln n. \tag{①}$$

由①式，可知

$$\frac{\ln(1+n)}{\ln n}\leqslant\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}\leqslant\frac{1+\ln n}{\ln n},$$

又由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}+1=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{\ln n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}}=1,$$

故由夹逼准则，可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1.$$

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

李林考研数学系列　第二章　一元函数微分学及其应用

基础题

一、选择题

(1)A.

解　$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=0,$$
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x^2\cdot\varphi(x)=0,$$

而 $f(0)=0$,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0,$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2\varphi(x)}{x}=0,$$

故 $f'_+(0)=f'_-(0)=0$,所以 $f'(0)=0$,A 正确.

(2)A.

解　$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+a\Delta x)-f(x-b\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}a\cdot\frac{f(x+a\Delta x)-f(x)}{a\Delta x}+\lim_{\Delta x\to0}b\cdot\frac{f(x-b\Delta x)-f(x)}{-b\Delta x}$$
$$=af'(x)+bf'(x)=(a+b)f'(x).$$

(3)B.

解　由　$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}=0=f(0),$$

知函数 $f(x)$ 右连续.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}-0}{x-0}=\infty,$$

故 $f'_+(0)$ 不存在.

(4)B.

解　$$f(x)=(x+2)(x+1)\mid x+1\mid\mid x\mid\mid x-1\mid,$$

由结论(参见《李林考研数学系列高等数学辅导讲义》),$f(x)$ 有 $x=0,x=1$ 两个不可导点.

(5)D.

解　$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{\mid x\mid}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}\mid x\mid}{x}=-\frac{1}{2},$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos\sqrt{\mid x\mid}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}\mid x\mid}{x}=\frac{1}{2},$$

故 $f(x)=\cos\sqrt{\mid x\mid}$ 在 $x=0$ 处不可导.

(6)B.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

解　由微分的定义,知 $dy=f'(x_0)\Delta x$,故 $\lim_{\Delta x\to0}\frac{dy}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}=\frac{1}{2}$,B 正确.

(7)C.

解　由已知,$f(x)$ 是奇函数,故 $f'(x)$ 是偶函数,$f''(x)$ 是奇函数,从而由 $f'(x)>0$,$x\in(0,+\infty)$,可知当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f'(x)>0$;由 $f''(x)>0,x\in(0,+\infty)$,可知当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f''(x)<0$,C 正确.

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

(8)C.

解 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0,$$

故可排除A,B选项.

再由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$,由保号性及$1-\cos x>0$,知在$x=0$的某邻域内有$f(x)>0=f(0)$,故$f(0)$为极小值.

(9)C.

解 $y'=[(x-1)^2(x-3)^2]'=4(x-1)(x-2)(x-3)$,

则y''是二次函数,故y''最多只有两个零点,由罗尔定理,知y''在(1,2)和(2,3).内各有一个零点,且y''在其零点两侧变号,故有2个拐点,C正确.

(10)D.

解 由$f''(x_0)=0$及已知条件,有

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0,$$

由极限的保号性,可知当$x>x_0$时,$f''(x)>0$;当$x<x_0$时,$f''(x)<0$,即在x_0两侧$f''(x)$变号,故$(x_0,f(x_0))$是$y=f(x)$的拐点.

【注】 A不正确,例如$f(x)=x^3$,有$f'(0)=f''(0)=0$,$f'''(0)=6\neq 0$,但$x=0$不是$f(x)=x^3$的极值点.

(11)C.

解 利用导数的定义,有

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=f'_+(0)+f(0).$$

同理,可得$F'_-(0)=f'_-(0)-f(0)$,故

$$F(x)\text{在}x=0\text{处可导}\Leftrightarrow F'_+(0)=F'_-(0)\Leftrightarrow f(0)=0,$$

所以C正确.

(12)A.

解 由题意,$f(x)$有任意阶导数且$f'(x)=f^2(x)$,则

$$f''(x)=[f^2(x)]'=2f(x)f'(x)=2f(x)f^2(x)=2f^3(x),$$

$$f'''(x)=[2f^3(x)]'=3\cdot 2f^2(x)f'(x)=3!f^4(x),$$

由此归纳,可知$f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$,故A正确.

(13)C.

解

$$y'=(1-2x)^{-1}\cdot(-2),$$

$$y''=(-1)\cdot(1-2x)^{-2}\cdot(-2)^2,$$

$$y'''=(-1)\cdot(-2)\cdot(1-2x)^{-3}\cdot(-2)^3,$$

由此归纳,可知

$$y^{(10)}=(-1)\cdot(-2)\cdot\cdots\cdot(-9)\cdot(1-2x)^{-10}(-2)^{10}=\frac{-9!\cdot 2^{10}}{(1-2x)^{10}}.$$

(14)C.

解 由已知,$|f(0)|\leqslant 0$,知$f(0)=0$.又

$$0\leqslant\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{x^2}{|x|}=|x|,$$

由夹逼准则,有

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=0,$$

即$|f'(0)|=0$,故$f'(0)=0$,C正确.

(15)B.

解 依题设,有 $$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$$

故由极限的保号性,对$x\in(x_0,x_0+\delta)$,有$f(x)>f(x_0)$,即B正确.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

同理，

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,\ x\in(x_0-\delta,x_0),$$

有 $f(x)<f(x_0)$，故 A 错误.

对于 C,D，由 $f'(x_0)>0$，不能推出 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 与 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的单调性.

(16) A.

解 由已知，$y'(-2)=0,y'(1)=-3,y(1)=0$，即

$$\begin{cases}(x^3+ax^2+bx+c)'\Big|_{x=-2}=0,\\(x^3+ax^2+bx+c)'\Big|_{x=1}=-3,\\(x^3+ax^2+bx+c)\Big|_{x=1}=0,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}12-4a+b=0,\\3+2a+b=-3,\\1+a+b+c=0,\end{cases}$ 解得 $a=1,b=-8,c=6.$

(17) B.

解 利用在 $x=-1,x=1,x=-3$ 两侧导数符号的变化判别. $f'(x)$ 有 $x=-1,x=1,x=-3$ 三个零点，当从 $x=-3$ 左侧到右侧，$f'(x)$ 由负号变为正号，故 $x=-3$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

同理可得，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，故 B 正确.

(18) C.

解 由 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=1,\ \lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=+\infty,$

可知有水平渐近线 $y=1$ 与铅直渐近线 $x=0$.

(19) B.

解 由 $\lim\limits_{x\to0}y=-\infty$，知 $x=0$ 是铅直渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\dfrac{\pi}{4}$，知 $y=\dfrac{\pi}{4}$ 是水平渐近线，没有斜渐近线，故 B 正确.

(20) C.

解 显然曲线只存在斜渐近线. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-a^2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0,$$

故 $y=x$ 是曲线的斜渐近线. 又由于

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y+x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-a^2}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}-x}=0,$$

故 $y=-x$ 也是曲线的斜渐近线，C 正确.

二、填空题

(1) $-1,\dfrac{\pi}{2}$.

解 由已知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(ax+b)=b,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

故 $b=\dfrac{\pi}{2}$，即有 $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$. 又 $f'_-(0)=a$，且

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}}{x}$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{1+x^2}=-1,$$

故由 $f'_-(0)=f'_+(0)$，得 $a=-1$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

关注公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

(2)1.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\ln(1+x^2)}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}$.

由于当 $x\to 0$ 时,$\ln(1+x^2)\sim x^2$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,故

$$\text{原式}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot f'(0)=\frac{1}{2}\times 2=1.$$

(3)3.

解 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\dfrac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 两边同时对 x 求导,得

$$1=(y'-1)\cdot\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right],$$

解得

$$y'=\csc^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]+1.$$

又由已知,当 $x=0$ 时,$y=1$, 即 $f(0)=1$,故 $y'\Big|_{x=0}=3$,于是

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{1}{n}}=f'(0)=3.$$

(4)$f(x)=-1+2x+o(x)$.

解 由

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^2}=2,$$

知 $\sin x+xf(x)$ 与 $2x^2$ 是等价无穷小.

又由

$$\begin{aligned}\sin x+xf(x)&=[x+o(x^2)]+x[f(0)+f'(0)x+o(x)]\\&=[1+f(0)]x+f'(0)x^2+o(x^2),\end{aligned}$$

故 $f(0)=-1$, $f'(0)=2$,所以

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)=-1+2x+o(x).$$

(5)2.

解 由 $f''(x)$ 的图形可知,$f''(x_1)=f''(x_2)=0$, $f''(0)$ 不存在,在 $x=x_1$ 的两侧二阶导数不变号,故不是拐点.在 $x=0$, $x=x_2$ 两侧二阶导数变号,所以 $y=f(x)$ 有两个拐点.

(6)$\pm\sqrt{2}$.

解 依题设,有

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{1-\cos f(x)}{\sin x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\frac{1-\cos f(x)}{\sin x}\right]^{\frac{\sin x}{1-\cos f(x)}}\right\}^{\frac{1-\cos f(x)}{x\sin x}}=\mathrm{e},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos f(x)}{x\sin x}=1$.

又当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$, $1-\cos f(x)\sim\dfrac{1}{2}f^2(x)$,且 $f'(0)$ 存在,故

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos f(x)}{x\sin x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}f'(0)\cdot f'(0),$$

解得 $f'(0)=\pm\sqrt{2}$.

(7)$\dfrac{2}{3}$,3.

解 利用麦克劳林公式,有

$$\begin{aligned}x-\sin x\cos x&=x-\frac{1}{2}\sin 2x=x-\frac{1}{2}\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o(x^3)\right]\\&=\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\sim\frac{2}{3}x^3,\end{aligned}$$

故 $a=\dfrac{2}{3}$, $b=3$.

(8)3.

解

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号: 神灯考研 客服微信: KYFT104 QQ群: 118105451

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

故 $e^x+\ln(1-x)-1=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-1+o(x^3)=-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，所以 $n=3$.

(9) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

解　由 $y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}=0$，得 $2x^2-1=0$，解得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$y''<0$，可知上凸区间为 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(10) $y=2x+1$.

解

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}=2,$$

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[(2xe^{\frac{1}{x}}-2x)-e^{\frac{1}{x}}\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left(2\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}\right)=2-1=1,\end{aligned}$$

故斜渐近线方程为 $y=2x+1$.

(11) e.

解　对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=ne^{\frac{x}{n}}-(1+n)$. 依题意，有

$$f'(x_n)=ne^{\frac{x}{n}}-(1+n)=0,$$

解得 $x_n=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，故 $\lim_{n\to\infty}e^{x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}=e$.

(12) 1.

解

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2n+1}{n}\right)-3\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(2+\frac{1}{n}\right)-3}{\frac{1}{n}}.$$

由已知，当 $x=2$ 时，$t=1$，$y=3$，故

$$\text{原极限}=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(2+\frac{1}{n}\right)-f(2)}{\frac{1}{n}}=f'(2).$$

而 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}=\left.\frac{4-2t}{2t}\right|_{t=1}=1$，故原式 $=f'(2)=1$.

(13) $\frac{1}{2}$.

解　由 $\Delta y=\Delta x+o(\Delta x)$，有 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$，等式两边同时取极限

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\left[1+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]=1,$$

即 $f'(1)=1$. 又由已知，有

$$f(1)=0,\ x^2+\ln(1+x^3)\sim x^2(x\to0),$$

故

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\int_1^{e^x}f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^xf(e^x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2}\cdot\frac{f(e^x)-f(1)}{e^x-1}\cdot\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

(14) $-99!$.

解　记　$u(x)=x$，$v(x)=(2x-1)(3x-2)\cdots(100x-99)$，

则 $f(x)=u(x)v(x)$. 又 $u'(0)=1$，$u(0)=0$，$v(0)=-99!$，故

$$f'(0)=u'(0)v(0)+u(0)v'(0)=-99!.$$

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

【注】 此题也可用导数定义计算.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(2x-1)(3x-2)\cdots(100x-99)=-99!.$$

(15) $\frac{1}{3x}$.

解 由 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x^3)]=3x^2\cdot f'(x^3)=\frac{1}{x},$$

得 $f'(x^3)=\frac{1}{3x^3}$,所以 $f'(x)=\frac{1}{3x}$.

(16) $\frac{10!}{(1-x)^{11}}$.

解 由 $$f(x)=\frac{(x^{10}-1)+1}{1-x}=\frac{(1-x)(-x^9-x^8-x^7-\cdots-1)+1}{1-x}$$

$$=(-x^9-x^8-\cdots-1)+\frac{1}{1-x},$$

故 $f^{(10)}(x)=\frac{10!}{(1-x)^{11}}$.

(17) -2.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}\xlongequal{-x=\Delta t}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{f(1+\Delta t)-f(1)}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=-1,$$

故 $f'(1)=-2$.

(18) 2.

解 在 $x=0$ 的邻域内,$\cos|x|=\cos x$,$x^2|x|$ 在 $x=0$ 处二阶可导,三阶不可导,故阶数为 2.

(19) $\frac{2}{3a}$.

解 $$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=-\tan t,$$

$$y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\tan t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\tan t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=\frac{1}{3a}\sec^4 t\cdot\csc t,$$

故曲率 $$K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\left|\frac{2}{3a\sin 2t}\right|\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{3a}.$$

三、解答题

(1) 解 (Ⅰ)$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x}}}=x^{-\frac{4}{9}}$,故 $y'=-\frac{4}{9}x^{-\frac{13}{9}}$.

(Ⅱ) $$y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}(\ln a)\cdot(x^a)'+a^{a^x}\cdot(\ln a)\cdot(a^x)'$$

$$=a^a x^{a^a-1}+a(\ln a)x^{a-1}\cdot a^{x^a}+(\ln a)^2\cdot a^x\cdot a^{a^x}.$$

【注】 x^{a^a} 视为幂函数.

(Ⅲ)由 $|\sin x|=\sqrt{\sin^2 x}$,有 $y=2^{|\sin x|}=2^{\sqrt{\sin^2 x}}$,则

$$y'=2^{\sqrt{\sin^2 x}}\cdot(\ln 2)\cdot(\sqrt{\sin^2 x})'=2^{\sqrt{\sin^2 x}}\cdot(\ln 2)\cdot\frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{\sin^2 x}}$$

$$=2^{|\sin x|}\cdot(\ln 2)\cdot\sin 2x\cdot\frac{1}{2|\sin x|}(\sin x\neq 0).$$

【注】 当 $\sin x=0$ 时,$y=2^{|\sin x|}$ 的左、右导数值分别存在,且异号.

(Ⅳ) $$y'=\frac{1}{\tan x+\sec x}\cdot(\tan x+\sec x)'$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= \frac{1}{\tan x + \sec x} \cdot (\sec^2 x + \sec x \tan x) = \sec x.$$

【注】 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}(x \neq 0)$.

(2) 解　（Ⅰ）取对数，有　$\ln|y| = \ln(1+x^2)\sin x$.

两边同时对 x 求导，得 $\frac{1}{y} \cdot y' = \ln(1+x^2)\cos x + \frac{2x\sin x}{1+x^2}$，故

$$y' = (1+x^2)^{\sin x}\left[\ln(1+x^2)\cos x + \frac{2x\sin x}{1+x^2}\right].$$

（Ⅱ）利用对数的性质，化简后再求导.

$$y = \ln\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} = -\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$y' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot (x+\sqrt{x^2+1})'$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

(3) 解　（Ⅰ）

$$dy = \varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right) \cdot d\left(\arctan\frac{1}{x}\right)$$

$$= \varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= -\varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{1+x^2}dx.$$

（Ⅱ）$d(e^{x+y} - y\sin x) = 0$，即

$$e^{x+y}d(x+y) - [\sin x dy + y d(\sin x)] = 0,$$

$$e^{x+y}(dx+dy) - (\sin x dy + y\cos x dx) = 0,$$

故

$$dy = \frac{y\cos x - e^{x+y}}{e^{x+y} - \sin x}dx = \frac{y(\cos x - \sin x)}{(y-1)\sin x}dx.$$

（Ⅲ）由题，得 $t = \frac{x}{2}$，则 $y = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5x^2}{4} + 1$，故

$$dy = d\left(\frac{5x^2}{4}+1\right) = \frac{5}{2}x dx.$$

(4) 解　已知方程两边同时取对数，再对 x 求导，得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \arctan\frac{y}{x},$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2y \cdot y'}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y'x - y \cdot 1}{x^2},$$

解得

$$y' = \frac{x+y}{x-y},$$

$$y'' = \frac{(1+y')(x-y) - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \frac{2xy' - 2y}{(x-y)^2}.$$

将 $y' = \frac{x+y}{x-y}$ 代入上式，得 $y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

(5) 解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$

(6) 解　为求 $\frac{dy}{dx}$，将极坐标化为参数方程.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】 获取更多考研资源!

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta = (1-\cos\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta = (1-\cos\theta)\sin\theta, \end{cases}$$

θ 为参数,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \left.\dfrac{\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta}{-\sin\theta(1-\cos\theta)+\cos\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$,

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

故切线方程为 $y-1=(-1)(x-0)$,即 $x+y=1$.

(7) 解 (Ⅰ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^k\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to0}x^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}$,

当 $k\leqslant1$ 时,$f'(0)$ 不存在;当 $k>1$ 时,$f'(0)$ 存在,且 $f'(0)=0$.

(Ⅱ) 当 $k>1$ 时,$f(x)$ 的导函数为

$$f'(x)=\begin{cases} kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

若 $k\leqslant2$,则 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在,故 $1<k\leqslant2$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,但导函数不连续.

(Ⅲ) 当 $k>2$ 时,$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0=f'(0)$,此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导函数连续.

【注】 下列解法是错误的:

$$f'(x)=\left(x^k\sin\frac{1}{x}\right)'=kx^{k-1}\sin\frac{1}{x}-x^{k-2}\cos\frac{1}{x},$$

当 $x=0$ 时,没有意义,故 $f'(0)$ 不存在;当 $x\neq0$ 时,$f'(x)=kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x}$. 错在当 $x=0$ 时,需用导数定义求解.

(8) 解 令 $x=y=1$,由 $f(xy)=f(x)+f(y)$,知 $f(1)=0$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)+f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{f'(1)}{x}=\frac{1}{x},$$

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导.

由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$,积分得 $f(x)=\ln x+C$. 又 $f(1)=0$,得 $C=0$,所以 $f(x)=\ln x$.

(9) 解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$.

当 $x\neq0$ 时,$f'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$,故

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

同理可得 $f^{(k)}(0)=0$ $(k=3,4,\cdots)$,所以 $f^{(n)}(0)=0$.

【注】 利用洛必达法则,对任意正整数 k,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}=0$.

(10) 解 设开始充气以来的时间为 t,t 时刻气球体积为 $V=V(t)$,半径为 $r=r(t)$.

由已知,气球体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$,两边同时对 t 求导,有

$$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}.$$

由已知,$\dfrac{dV}{dt}=100$,$r=10$,代入上式得 $100=4\pi\cdot10^2\cdot\dfrac{dr}{dt}$,解得 $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{1}{4\pi}$(cm/s).

(11) 解 由已知,设点 P 的坐标为 (x,y),则 $\dfrac{dx}{dt}=30$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

在 $9y=4x^2$ 两边同时对 t 求导，有 $9\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=8x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{8}{9}x\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{80x}{3}$.

又 $S=\sqrt{x^2+y^2}$，两边同时对 t 求导，有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(30x+\frac{80}{3}xy\right),$$

将 $x=3,y=4$ 代入上式，有 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=82(\mathrm{cm/s})$.

(12) 解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\dfrac{1}{2}f''(0)=1.$

【注】 ① 下列解法是错误的.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)=1,$$

题中条件是 $f(x)$ 二阶可导，不能保证 $f''(x)$ 连续，故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{1}{2}f''(0)$ 错误.

② 此题也可以用泰勒公式求解.

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)\\&=x+x^2+o(x^2),\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2+o(x^2)-x}{x^2}=1.$$

(13) 解　由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1=f(0)$，知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续. 又

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(1+x^2)-1}{x}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{(1-x^2)-1}{x}=0,$$

知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可导，故 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上满足拉格朗日中值定理. 由

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2-0}{2}=1,$$

而

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant1,\\-2x, & -1\leqslant x<0,\end{cases}$$

由 $f'(x)=1$，得 $\begin{cases}2x=1,\\-2x=1,\end{cases}$ 故 $\xi_1=\dfrac{1}{2}$，$\xi_2=-\dfrac{1}{2}$.

(14) 证　（Ⅰ）令 $F(x)=x^2f(x)$，则 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理，存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)=0$，故

$$2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

（Ⅱ）令 $G(x)=\mathrm{e}^{-x^2}f(x)$，则 $G(a)=G(b)=0$，由罗尔定理，存在一点 $\eta\in(a,b)$，使得 $G'(\eta)=0$，即 $-2\eta\mathrm{e}^{-\eta^2}f(\eta)+\mathrm{e}^{-\eta^2}f'(\eta)=0$，故

$$2\eta f(\eta)-f'(\eta)=0.$$

(15) 证　令 $F(x)=(b-x)^af(x)$，由已知，有 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理，存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $(b-\xi)^{a-1}[(b-\xi)f'(\xi)-af(\xi)]=0$，故

$$(b-\xi)f'(\xi)-af(\xi)=0,$$

即 $af(\xi)+(\xi-b)f'(\xi)=0$.

(16) 证　只要证 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内取得极值即可.

若 $f(x)=0$，则在 $(0,+\infty)$ 内处处有 $f'(x)=0$，因此不妨设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内不恒为 0，于是存在 $x_1>0$，使得 $f(x_1)\neq0$，故不妨设 $f(x_1)>0$.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，存在正实数 $M>x_1$，使得当 $x>M$ 时，有 $|f(x)|<f(x_1)$.

又 $f(x)$ 在 $[0,M]$ 上连续，所以存在 $\xi\in[0,M]$，使得

$$f(\xi)=\max_{0\leqslant x\leqslant M}\{f(x)\},$$

于是 $f(\xi)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值，也是 $f(x)$ 的极值，故 $f'(\xi)=0$.

【注】 此题可视为罗尔定理的推广.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(17) 证　令 $F(x)=f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}$，则 $F(0)=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{x}{1+x^2}\right]=0$$

(由 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，及夹逼准则，知 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$).

由上一题结论知，存在一点 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

(18) 证　对 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{x_0}{2}\right]$，$\left[\dfrac{x_0}{2},x_0\right]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，得

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right)-f(0)=f'(\xi_1)\cdot\frac{x_0}{2}\left(0<\xi_1<\frac{x_0}{2}\right),\qquad①$$

$$f(x_0)-f\left(\frac{x_0}{2}\right)=f'(\xi_2)\cdot\frac{x_0}{2}\left(\frac{x_0}{2}<\xi_2<x_0\leqslant1\right),\qquad②$$

②－①，得　$f(x_0)-2f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)+f(0)=[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]\cdot\dfrac{x_0}{2}$.

又 $f(0)=0$，$f''(x)\leqslant0$，知 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调减少. 由 $0<\xi_1<\xi_2<1$，知

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)\leqslant0,$$

故 $f(x_0)\leqslant2f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)$.

(19) 证　由于 $f(x)$ 不恒等于 x，可知存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)\neq x_0$.

若 $f(x_0)>x_0$，根据拉格朗日中值定理，存在一点 $\xi_1\in(0,x_0)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}>\frac{x_0}{x_0}=1;$$

若 $f(x_0)<x_0$，根据拉格朗日中值定理，存在一点 $\xi_2\in(x_0,1)$，使得

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}>\frac{1-x_0}{1-x_0}=1.$$

综上可知，存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)>1$.

(20) 证　$f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上分别利用拉格朗日中值定理，得

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}-0}=2\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\right],0<\xi<\frac{1}{2},$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2\left[f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right],\frac{1}{2}<\eta<1,$$

两式相加，得 $f'(\xi)+f'(\eta)=2[f(1)-f(0)]=1$.

(21) 证　由 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最小值，知存在一点 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的最小值，于是 $f'(x_0)=0$.

由拉格朗日中值定理，有

$$f'(x_0)-f'(0)=f''(\xi_1)(x_0-0),0<\xi_1<x_0,$$

$$f'(1)-f'(x_0)=f''(\xi_2)(1-x_0),x_0<\xi_2<1,$$

于是

$$|f'(0)|=|f''(\xi_1)|(x_0-0)\leqslant x_0,$$
$$|f'(1)|=|f''(\xi_2)|(1-x_0)\leqslant1-x_0,$$

两式相加，得　$|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant1$.

(22) 证　由 $f(x)$ 不恒为常数且 $f(a)=f(b)$，知存在一点 $c\in(a,b)$，使得

$$f(c)\neq f(a)=f(b),$$

不妨设 $f(c)>f(a)=f(b)$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,c)$，$\eta\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\ f'(\eta)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0,$$

故 $f'(\xi)\cdot f'(\eta)<0$.

(23) 证　(Ⅰ) 由推广的积分中值定理，知存在一点 $c\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2f(c)\left(1-\frac{1}{2}\right) = f(c),$$

于是 $f(0)=f(c)=f(1)$，在$[0,c]$与$[c,1]$上分别应用罗尔定理，有

$$f'(\xi_1)=0(0<\xi_1<c),\ f'(\xi_2)=0(c<\xi_2<1),$$

在$[\xi_1,\xi_2]$上再应用罗尔定理，有 $f''(\xi)=0$，$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$.

（Ⅱ）令 $F(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}f'(x)$，则 $F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$，

由罗尔定理，知至少存在一点 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，使得 $F'(\eta)=0$，即

$$\mathrm{e}^{-\lambda\eta}[f''(\eta)-\lambda f'(\eta)]=0,$$

故 $f''(\eta)-\lambda f'(\eta)=0$.

(24) 证　只需证 $f'(\xi)=\dfrac{(b+a)f'(\eta)}{2\eta}$.

对 $f(x)$ 及 x^2 在$[a,b]$上应用柯西中值定理，得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},\ a<\eta<b,$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b+a)f'(\eta)}{2\eta}.$$

再由拉格朗日中值定理，存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，

故原等式成立.

(25) 证　$\dfrac{a\mathrm{e}^b-b\mathrm{e}^a}{a-b}=\mathrm{e}^{\xi}(1-\xi)$ 等式左边分子、分母同时除以 ab，有

$$\frac{\frac{\mathrm{e}^b}{b}-\frac{\mathrm{e}^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\mathrm{e}^{\xi}(1-\xi).$$

对 $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，$G(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$[a,b]$上应用柯西中值定理，有

$$\frac{\frac{\mathrm{e}^b}{b}-\frac{\mathrm{e}^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{\xi\mathrm{e}^{\xi}-\mathrm{e}^{\xi}}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=\mathrm{e}^{\xi}(1-\xi),\ a<\xi<b,$$

故原等式成立.

(26) 证　（Ⅰ）只需证　$\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}>\dfrac{1}{\pi},\ 0<x<\pi.$

令 $f(x)=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}-\dfrac{1}{\pi}$，则 $f'(x)=\dfrac{\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{\left(\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}}{x^2}.$

当 $0<x<\pi$ 时，$\cos\dfrac{x}{2}>0$，$\tan\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{2}$，故 $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 单调减少，于是 $f(x)>f(\pi)=0$，即

$$f(x)=\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}-\frac{1}{\pi}>0.$$

（Ⅱ）要证 $a^b>b^a$，只需证 $\mathrm{e}^{b\ln a}>\mathrm{e}^{a\ln b}$，即证 $b\ln a>a\ln b$.

令 $f(x)=x\ln a-a\ln x$，且 $x\geqslant a$，则 $f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}$，由 $\mathrm{e}<a<b$，得

$$\ln b>\ln a>\ln \mathrm{e}=1,$$

故 $f'(x)>1-\dfrac{a}{x}\geqslant 0$，从而当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)$ 严格单调增加，于是 $f(b)>f(a)$，即 $b\ln a>a\ln b$，所以原不等式成立.

（Ⅲ）令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，则

$$f'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x},\ f'(1)=0,$$

$$f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2},\ f''(1)>0,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}.$$

当 $0<x<1$ 时，$f'''(x)<0$；当 $1<x<+\infty$ 时，$f'''(x)>0$，故 $f''(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调减少，在 $(1,+\infty)$ 内单调增加，因而 $f''(x)$ 在 $x=1$ 处取到最小值. 又 $f''(1)>0$，所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$，从而 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加. 又 $f'(1)=0$，可知当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $1<x<+\infty$ 时，$f'(x)>0$. 同理可知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取到最小值，又 $f(1)=0$，所以 $f(x)>0$，故原不等式成立.

(Ⅳ) 由已知，有

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{f(x)}{x}=0,$$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1.$$

由泰勒公式，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2(\xi\text{介于}x\text{与}0\text{之间}),$$

由 $f''(x)>0$，知 $f(x)\geqslant x$，故原不等式成立.

(27) 解 $y'=\dfrac{x^2+x}{1+x^2}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$，令 $y'=0$，得 $x=0,x=-1$.

列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$-2e^{\frac{\pi}{4}}$	↘	$-e^{\frac{\pi}{2}}$	↗

可知，单调减少区间为 $(-1,0)$，单调增加区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$. 极小值为 $f(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$，极大值为 $f(-1)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$.

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{x}=e^{\pi},$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-e^{\pi}}{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\pi}(e^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}-1)}{\frac{1}{x}}-e^{\pi}=\lim_{x\to+\infty}e^{\pi}\cdot\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}-e^{\pi}$$

$$=e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}-e^{\pi}=-e^{\pi}-e^{\pi}=-2e^{\pi}.$$

同理，当 $x\to-\infty$ 时，$k_2=1,b_2=-2$，故有两条斜渐近线为

$$y=e^{\pi}(x-2),\ y=x-2,$$

且函数 y 没有水平渐近线和铅直渐近线.

(28) 解

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x^{2x}=\lim_{x\to0^+}e^{2x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}2x\ln x}=e^0=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+2)=2,$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，所以不可导，于是有 $f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1), & x>0,\\ 1, & x<0.\end{cases}$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=\dfrac{1}{e}$，故 $x=0$ 与 $x=\dfrac{1}{e}$ 是可能的极值点.

当 $x<0$ 时，$f'(x)=1>0$；当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(0)=2$ 是 $f(x)$ 的极大值.

当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$，故 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$ 是 $f(x)$ 的极小值.

综上可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 与 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 内单调增加，在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 内单调减少.

(29) 解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)},$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)}\right]\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{2(\ln^2 t-2)}{t^3(1+\ln t)^3},$$

令$\frac{dy}{dx}=0$，得$t=e$，令$\frac{d^2y}{dx^2}=0$，得$t=e^{\sqrt{2}}$.

列表如下：

t	1	$(1,e)$	e	$(e,e^{\sqrt{2}})$	$e^{\sqrt{2}}$	$(e^{\sqrt{2}},+\infty)$
x	0	$(0,e)$	e	$(e,\sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$	$\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$	$(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},+\infty)$
$\frac{dy}{dx}$	1	+	0	−	−	−
$\frac{d^2y}{dx^2}$	−4	−	−	−	0	+
y	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$	↘

故$y=y(x)$在$(0,e)$内单调增加，在$(e,+\infty)$内单调减少.

$y(e)=\frac{1}{e}$为极大值，向上凹区间为$(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},+\infty)$，向上凸区间为$(0,\sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$，拐点为$(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}})$.

(30) 解　函数$y=\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$在$\left[-\frac{1}{2},0\right]$上没有定义. 由$\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^-}y=-\infty$，

$$\lim_{x\to0^+}y=\lim_{x\to0^+}\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{4x^2+x}\ln(2x+1)-\lim_{x\to0^+}(\sqrt{4x+1}\cdot\sqrt{x}\ln x)=0,$$

故$x=-\frac{1}{2}$是铅直渐近线.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}\sqrt{4+\frac{1}{x}}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=2\ln 2,$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}[y-(2\ln 2)x]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to+\infty}2x\left[\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-\ln 2\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to+\infty}2x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)=\frac{1}{4}\ln 2+1.$$

同理，可求得$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-2\ln 2$，$\lim\limits_{x\to-\infty}[y+(2\ln 2)x]=-\frac{1}{4}\ln 2-1$，所以曲线有两条斜渐近线为　$y=(2\ln 2)x+\frac{1}{4}\ln 2+1$，$y=-(2\ln 2)x-\frac{1}{4}\ln 2-1$.

(31) 解　由$y=\ln x$，$y'=\frac{1}{x}$，$y''=-\frac{1}{x^2}$，故曲率半径为

$$R=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}.$$

令
$$R'=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2}\cdot(2x^2-1)=0,$$

得$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$$R''=\frac{2x^4+x^2+2}{x^3\sqrt{1+x^2}}>0,$$

故当$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，曲率半径最小，故$y=\ln x$在点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\ln 2\right)$处的曲率半径最小，最小曲率半径为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(32) 证　令$f(x)=2^x-x^2-1$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，显然$x_1=0$，$x_2=1$是方程的两个实根. 又　$f(2)=-1<0$，$f(5)=2^5-25-1=6>0$，

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

由零点定理，$f(x)=0$ 在(2,5)内至少有一个实根，故 $f(x)=0$ 至少有三个实根.

又由 $f'''(x)=2^x(\ln 2)^3\neq 0$，知 $f(x)$ 至多有三个实根，故方程有且仅有三个不同实根.

【注】 证明上题至多只有三个实根，用罗尔定理及反证法.

假设有四个不同实根 $x_1<x_2<x_3<x_4$，即有

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=0$$

$$f'(\xi_1)=0 \qquad f'(\xi_2)=0 \qquad f'(\xi_3)=0$$

$$f''(\xi_4)=0 \qquad f''(\xi_5)=0$$

$$f'''(\xi_6)=0$$

与 $f'''(x)=2^x(\ln 2)^3\neq 0$ 矛盾，故至多只有三个实根.

一般情况：若 $f^{(n)}(x)\neq 0$，则 $f(x)=0$ 至多有 n 个不同实根.

(33) 证 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\,dx=2\sqrt{2}$，

令 $f(x)=\dfrac{x}{e}-\ln x-2\sqrt{2}$，由 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=e$.

当 $0<x<e$ 时，由 $f'(x)<0$，知 $f(x)$ 单调减少；

当 $e<x<+\infty$ 时，由 $f'(x)>0$，知 $f(x)$ 单调增加，故 $f(e)=-2\sqrt{2}<0$ 是 $f(x)$ 的极小值. 又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，

所以方程仅有两个不同实根.

(34) 解 问题等价于讨论 $\ln^4 x-4\ln x+4x-k=0$ 不同实根的个数.

令 $f(x)=\ln^4 x-4\ln x+4x-k$，定义域为$(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\dfrac{4(\ln^3 x-1+x)}{x}=0$，

得唯一驻点 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加，故 $f(1)=4-k$ 为 $f(x)$ 的最小值. 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(Ⅰ) 当 $4-k>0$ 时，$f(x)=0$ 没有实根，无交点；

(Ⅱ) 当 $4-k=0$ 时，$f(x)=0$ 有唯一实根，交点个数为 1；

(Ⅲ) 当 $4-k<0$ 时，$f(x)=0$ 仅有两个不同实根，交点个数为 2.

【注】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且

$$\lim_{x\to a^+}f(x)>0(<0),\quad \lim_{x\to b^-}f(x)>0(<0),$$

若仅存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值 m 或极大值 M，则

① 当 $m>0$(或 $M<0$)时，则在$[a,b]$上 $f(x)$ 与 x 轴没有交点，故 $f(x)=0$ 在$[a,b]$上没有实根，如图 2-1(a) 所示；

② 当 $m=0$(或 $M=0$)时，则在$[a,b]$上 $f(x)$ 与 x 轴只有一个交点，故 $f(x)=0$ 在$[a,b]$上只有一个实根，如图 2-1(b) 所示；

③ 当 $m<0$(或 $M>0$)时，则在$[a,b]$上 $f(x)$ 与 x 仅有两个交点，故 $f(x)=0$ 在$[a,b]$上仅有两个不同实根，如图 2-1(c) 所示.

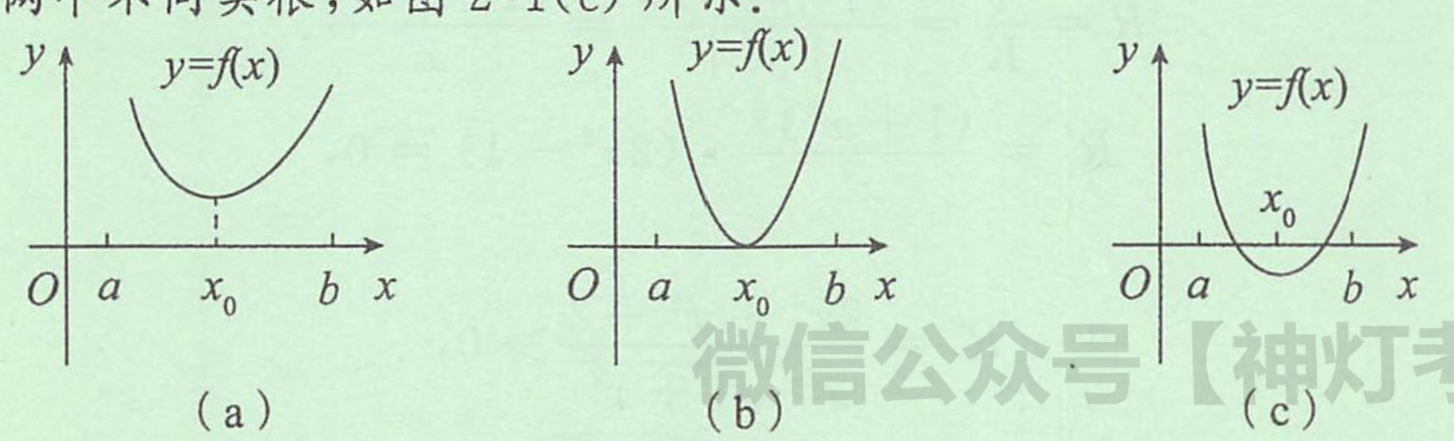


图 2-1

上述结论对$(-\infty,+\infty)$仍成立.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

综合题

一、选择题

(1)A.

解 比较 $f(x)$ 与 x 的大小，考虑作差构造新函数，利用单调性求解.

令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F'(x)=f'(x)-1$，$F(1)=f(1)-1=0$.

因 $f'(x)$ 严格单调减少，所以当 $x\in(1-\delta,1)$ 时，$f'(x)>f'(1)=1$，从而 $F'(x)=f'(x)-1>0$，即 $F(x)$ 在 $(1-\delta,1)$ 内单调增加，所以 $F(x)<F(1)=0$，故 $f(x)<x$.

同理，当 $x\in(1,1+\delta)$ 时，$f'(1)>f'(x)$，$F'(x)=f'(x)-1<0$，于是 $F(x)$ 在 $x\in(1,1+\delta)$ 内单调减少，故 $F(1)>F(x)$，即 $f(x)<x$，故 A 正确.

(2)B.

解 讨论 $\dfrac{f(x)}{x}$ 的单调性. 令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-[f(x)-f(0)]}{x^2}$$

$$=\frac{xf'(x)-f'(\xi)x}{x^2}\quad(0<\xi<x<b).$$

由 $f''(x)<0$，则 $f'(x)<f'(\xi)$，故 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 单调减少，故 $\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{f(b)}{b}$，即 B 正确.

(3)C.

解 用反证法，假设 $f'_+(a)<0$，则 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$，由极限的保号性，知 $f(x)<f(a)$，与 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得最小值矛盾. 同理，若 $f'_-(b)<0$，可知 $f(x)$ 在 $x=b$ 处不可能取得最大值，故 C 正确.

(4)C.

解 由 $f''(x)\neq 0$，知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不恒为常数，又 $f(0)=f(1)$，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最大值 M 和最小值 m 至少有一个在 (a,b) 内部取得，不妨设最大值 $M=f(\xi)$，$\xi\in(a,b)$，则 $f(\xi)$ 是 $f(x)$ 的极大值，从而 $f'(\xi)=0$.

用反证法证明 ξ 的唯一性. 假设有两个点 ξ 和 $\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f'(\eta)=0$，则由罗尔定理，存在介于 ξ 和 η 之间的点 x_0，使得 $f''(x_0)=0$，这与 $f''(x)\neq 0$ 矛盾，故 ξ 是唯一的.

(5)D.

解 利用导数定义，有

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-f(x)\sin x}{x}=-\lim_{x\to 0^-}f(x),$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}f(x),$$

$$F(x)\text{ 在 }x=0\text{ 处可导}\Leftrightarrow F'_-(0)=F'_+(0)\Leftrightarrow-\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x),$$

故 D 正确.

(6)B.

解 由已知 $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$，及泰勒公式，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+$$

$$\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4(\xi\text{介于}x_0\text{与}x\text{之间})$$

$$=f(x_0)+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4,\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),$$

故
$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4\leq 0,$$

于是 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

(7)C.

解 利用极值的定义判别.

由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=1>0$，知在 x_0 的去心邻域内有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}>0$，即 $f(x)-f(x_0)$ 的正负由 $(x-x_0)^n$ 确定.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

（Ⅰ）当 n 为奇数时，若 $x>x_0$，则 $f(x)-f(x_0)>0$；若 $x<x_0$，则 $f(x)-f(x_0)<0$，故 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

（Ⅱ）当 n 为偶数时，当 $x>x_0$ 或 $x<x_0$ 时，都有 $f(x)-f(x_0)>0$，故 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，C 正确.

(8) D.

解　涉及 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的极限，考虑用拉格朗日中值定理.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，知存在充分大的 x_0 和 M，当 $x>x_0$ 时，有 $f'(x)>M>1$，故当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+(x-x_0)\to+\infty(\xi\text{介于}x_0\text{与}x\text{之间}),$$

故 D 正确.

(9) C.

解　令 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\dfrac{\mathrm{e}-x}{\mathrm{e}x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$，可知 $x=\mathrm{e}$ 是 $f(x)$ 的最大值点，最大值为 $f(\mathrm{e})=k$.

由 $k>0$，知当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f(x)$ 单调增加；当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调减少，故函数 $f(x)$ 的图形与 x 轴有两个不同交点，即方程有两个不同实根，C 正确.

(10) A.

解　依题意，$k\neq0$，否则方程有两个实根. 当 $x\neq0$ 时，原方程与 $kx^3-x^2+1=0$ 同解.

令 $f(x)=kx^3-x^2+1$，则 $f'(x)=3kx^2-2x=x(3kx-2)=0$，得驻点 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{2}{3k}$.

又 $f''(x)=2(3kx-1)$，有 $f''(0)<0$，$f''\left(\dfrac{2}{3k}\right)=2>0$. 由 $f''(0)<0$，可知 $f(0)=1>0$ 是极大值点.

要使方程有唯一实根，必须有 $f\left(\dfrac{2}{3k}\right)>0$，故 $\dfrac{8k}{27k^3}-\dfrac{4}{9k^2}+1>0$，解得 $|k|>\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$，所以 A 正确.

(11) C.

解　由 $f'(0)<0$，及保号性，可知存在 $x_1>0$，使得 $f(x_1)<0$. 根据拉格朗日中值定理，有 $f(x)=f(0)+f'(\xi)(x-0)=f'(\xi)x$（$\xi$ 介于 0 与 x 之间）.

又根据拉格朗日中值定理，有

$$f'(x)=f'(0)+f''(\eta)(x-0)=f'(0)+f''(\eta)x(\eta\text{介于}0\text{与}x\text{之间}),$$

而 $f''(x)\geqslant M>0$，知当 $x\to+\infty$ 时，有 $f'(x)\geqslant1$，所以 $f(x)=f'(\xi)x\to+\infty(x\to+\infty)$，故存在充分大的 $x_2>x_1>0$，使得 $f(x_2)>0$. 由零点定理，$f(x)=0$ 至少有一个实根.

又由 $f''(x)\geqslant M>0$，知 $f(x)=0$ 在 $[0,+\infty)$ 上至多有两个实根，又 $f(0)=0$，故 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个实根.

(12) D.

解　由拉格朗日中值定理，有

$$f\left(\frac{3}{4}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'(\xi)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}f'(\xi)\geqslant\frac{1}{4}M,\ \xi\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),$$

即 $f\left(\dfrac{3}{4}\right)\geqslant\dfrac{1}{4}M+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

又 $f'(x)\geqslant M>0$，知 $f(x)$ 单调增加，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqslant0$，故 $f\left(\dfrac{3}{4}\right)\geqslant\dfrac{1}{4}M>0$，所以在 $\left[\dfrac{3}{4},1\right]$ 上，有 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{4}M$，D 正确.

(13) C.

解　由已知条件，知 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 是凹函数，且 $y=f_1(x)$ 在该点处曲率大于 $y=f_2(x)$ 的曲率. 如图 2-2 所示，在点 x_0 的某邻域内有

$$f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant g(x),$$

C 正确.

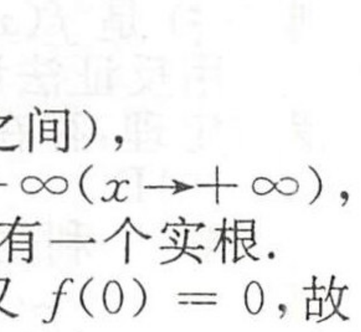


图 2-2

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

二、填空题

(1) $-\dfrac{99!}{2}\pi$.

解　因为 $\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)-1\right]\Big|_{x=1}=0$，令 $f(x)=\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)-1\right]\cdot g(x)$，则

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$f'(1)=\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1\right]'\Big|_{x=1}\cdot g(1)+0\cdot g'(1)$$
$$=\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1\right]'\Big|_{x=1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)-2\right]\cdots\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x^{100}\right)-100\right]\Big|_{x=1}$$
$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}\cdot(-99!)=-\frac{99!}{2}\pi.$$

(2) 64.

解　由 $f(x)=3x^2+kx^{-3}$，有 $f'(x)=6x-3kx^{-4}=0$，得唯一驻点 $x=\sqrt[5]{\frac{k}{2}}$. 又

$$f''(x)=6+12kx^{-5},\ f''\left(\sqrt[5]{\frac{k}{2}}\right)>0,$$

故 $f\left(\sqrt[5]{\frac{k}{2}}\right)=5\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最小值.

由 $5\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{5}}\geqslant 20$，解得 $k\geqslant 64$，即 k 至少为 64.

(3) 1.

解　由

$$y'=\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]e^{-x}-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}=0,$$

得 $x=0$.

由于 n 为奇数，当 $x<0$ 时，$y'>0$；当 $x>0$ 时，$y'<0$，故 $f(0)=1$ 是极大值.

(4) $\frac{1}{2}$.

解　易知 $k\neq 0$，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+k}{x-k}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2k}{x-k}\right)^{\frac{x-k}{2k}}\right]^{\frac{2kx}{x-k}}=e^{2k}.$$

由拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\cdot 1(\xi\text{介于}x-1\text{与}x\text{之间}),$$

因而

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=e,$$

于是 $e^{2k}=e$，所以 $k=\frac{1}{2}$.

(5) 4，3.

解　由图 2-3，可知

$$f'(x_1)=f'(x_3)=f'(x_4)=f'(x_6)=0,$$

故 x_1,x_3,x_4,x_6 是驻点. $f'(0)$ 与 $f'(x_5)$ 不存在，所以可能的极值点为

$$x=x_1,\ x=x_3,\ x=x_4,\ x=x_6,\ x=0,\ x=x_5,$$

在 $x=x_1,\ x=x_3,\ x=0,\ x=x_4$ 两侧的 $f'(x)$ 均异号，故有 4 个极值点.

$f''(x_2)=0,f''(x_6)=0,f''(0)$ 与 $f''(x_5)$ 不存在. 在 $x=x_2,\ x=x_6$ 两侧，$f''(x)$ 变号，在 $x=x_5$ 两侧，$f''(x)$ 变号，故拐点有 3 个.

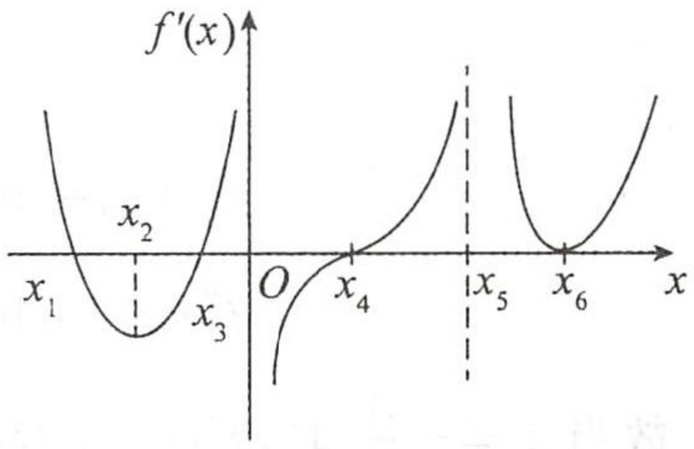


图 2-3

(6) $e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}$.

解　极限为 1^∞ 型，利用重要极限结论.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(x_0+\frac{1}{x}\right)}{f(x_0)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{f\left(x_0+\frac{1}{x}\right)-f(x_0)}{f(x_0)}\right]^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{f\left(x_0+\frac{1}{x}\right)-f(x_0)}{f(x_0)}\right]^{\frac{f(x_0)}{f\left(x_0+\frac{1}{x}\right)-f(x_0)}\cdot\frac{f\left(x_0+\frac{1}{x}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{f(x_0)}},$$

而

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x_0+\frac{1}{x}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{x}}=f'(x_0),$$

故原极限 $=\mathrm{e}^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}$.

(7) 9.

解　由反函数求导法则，可知 $g'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

由复合函数求导法则，可知

$$\begin{aligned}g''(y)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\\&=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3},\\g'''(y)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[g''(y)]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left\{\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right\}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right\}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\\&=-\frac{f'''(x)[f'(x)]^3-3[f'(x)]^2\cdot[f''(x)]^2}{[f'(x)]^6}\cdot\frac{1}{f'(x)}\\&=-\frac{f'''(x)[f'(x)]^3-3[f'(x)]^2[f''(x)]^2}{[f'(x)]^7},\end{aligned}$$

故

$$g'''(y_0)=-\frac{f'''(x_0)[f'(x_0)]^3-3[f'(x_0)]^2[f''(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^7}=9.$$

三、解答题

(1) 解　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=c$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，$f(0)=c$，

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $c=0$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-0}{x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^2+b\sin x-0}{x}=b,$$

由 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，知 $b=1$，故当 $b=1$，$c=0$ 时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+\cos x, & x<0,\\1, & x=0,\\\dfrac{1}{1+x}, & x>0,\end{cases}$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=-1,$$

$$f''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{2ax+\cos x-1}{x}=2a,$$

故当 $a\neq-\dfrac{1}{2}$ 时，$f''(0)$ 不存在.

(2) 解　此题是复合函数和隐函数的综合题.

由 $y+\mathrm{e}^y=x$，两边同时对 x 求导，得 $y'+\mathrm{e}^y\cdot y'=1$，解得 $y'=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^y}$，故 $y''=\dfrac{-\mathrm{e}^y}{(1+\mathrm{e}^y)^3}$.

由 $z=f[\varphi(x)+y^2]$，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=f'[\varphi(x)+y^2]\cdot[\varphi'(x)+2y\cdot y']\\&=f'[\varphi(x)+y^2]\cdot\left[\varphi'(x)+\frac{2y}{1+\mathrm{e}^y}\right],\\\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}&=f''[\varphi(x)+y^2][\varphi'(x)+2yy']^2+\\&\quad f'[\varphi(x)+y^2][\varphi''(x)+2y'^2+2yy'']\end{aligned}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$= f''[\varphi(x)+y^2]\left[\varphi'(x)+\frac{2y}{1+e^y}\right]^2 +$$

$$f'[\varphi(x)+y^2]\cdot\left[\varphi''(x)+\frac{2}{(1+e^y)^2}-\frac{2ye^y}{(1+e^y)^3}\right].$$

(3) 解　考虑到 $f(x)$ 的周期性及 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，本题关键是求 $f(1)$ 和 $f'(1)$. 由

$$\lim_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim_{x\to 0}[8x+\alpha(x)],$$

得 $f(1)-3f(1)=0$，即 $f(1)=0$. 又

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{8x}{\sin x}+\frac{\alpha(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right]=8,$$

即

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}+3\,\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x}\right]=8,$$

故 $f'(1)+3f'(1)=8$，即 $f'(1)=2$.

又 $f(x+5)=f(x)$，有 $f(6)=f(1)=0$，$f'(6)=f'(1)=2$，故切线方程为 $y-0=2(x-6)$，即 $2x-y-12=0$.

(4) 解　对 $f(x)$ 求导，得

$$f'(x)=n(1-x)^n+n^2x(1-x)^{n-1}\cdot(-1)$$
$$=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x](0<x<1),$$

令 $f'(x_0)=0$，解得 $x_0=\dfrac{1}{n+1}$.

当 $0<x<\dfrac{1}{n+1}$ 时，$f'(x)>0$；当 $\dfrac{1}{n+1}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值.

又因为 $f(0)=0$，$f(1)=0$，所以

$$M(n)=f(x_0)=\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值，且 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}=e^{-1}$.

(5) 解　（Ⅰ）当 $p\leqslant 0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|^p\sin\dfrac{1}{x}$，该极限不存在，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点；

当 $p>0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|^p\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，故当 $p>0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（Ⅱ）当 $p>1$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\lim\limits_{x\to 0^-}|x|^{p-1}\sin\dfrac{1}{x}=0$，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}|x|^{p-1}\sin\frac{1}{x}=0,$$

故当 $p>1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

（Ⅲ）当 $p>2$ 时，由（Ⅱ）知 $f'(0)=0$. 若 $x>0$，则

$$f'(x)=\left(x^p\sin\frac{1}{x}\right)'=px^{p-1}\sin\frac{1}{x}-x^{p-2}\cos\frac{1}{x}\to 0\ (x\to 0^+),$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$；若 $x<0$，则

$$f'(x)=\left[(-x)^p\sin\frac{1}{x}\right]'=-p(-x)^{p-1}\sin\frac{1}{x}-(-x)^{p-2}\cos\frac{1}{x}\to 0\ (x\to 0^-),$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=0$.

由此可知，当 $p>2$ 时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(6) 证　（Ⅰ）由

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0,\\ f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1,\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=1\Rightarrow\begin{cases}f(1)=0,\\ f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=1,\end{cases}$$

即

$$f(0)=f(1)=0,\ f'_+(0)f'_-(1)>0.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

由保号性，$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1>0,$$
知 $\exists x_1\in(0,\delta_1)(\delta_1>0)$，使得 $f(x_1)>0$；
$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=1>0,$$
知 $\exists x_2\in(1-\delta_2,1)(\delta_2>0)$，使得 $f(x_2)<0$，由零点定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$.

（Ⅱ）令 $g(x)=f(x)e^{-x}$，在$[0,\xi]$，$[\xi,1]$上分别应用罗尔定理.

$g(0)=g(\xi)=0$，知 $\exists\ \xi_1\in(0,\xi)$，使得 $g'(\xi_1)=0$，即
$$e^{-\xi_1}[f'(\xi_1)-f(\xi_1)]=0,$$
可得 $f'(\xi_1)-f(\xi_1)=0$.

又 $g(\xi)=g(1)=0$，知 $\exists\xi_2\in(\xi,1)$，使得 $g'(\xi_2)=0$，即
$$e^{-\xi_2}[f'(\xi_2)-f(\xi_2)]=0,$$
可得 $f'(\xi_2)-f(\xi_2)=0$，于是 $f'(x)-f(x)=0$ 有两个根 ξ_1 和 ξ_2.

再令 $F(x)=e^x[f'(x)-f(x)]$，在$[\xi_1,\xi_2]$上应用罗尔定理，$F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$，所以 $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，使得 $F'(\eta)=0$，即
$$e^{\eta}[f''(\eta)-f'(\eta)+f'(\eta)-f(\eta)]=0,$$
故 $f''(\eta)=f(\eta)$.

(7) 证　令　$$F(x)=f(x)\int_x^b g(t)\mathrm{d}t+g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$
则 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理，存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即
$$\begin{aligned}F'(\xi)&=f'(\xi)\int_\xi^b g(t)\mathrm{d}t-f(\xi)g(\xi)+g(\xi)f(\xi)+g'(\xi)\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t\\&=f'(\xi)\int_\xi^b g(t)\mathrm{d}t+g'(\xi)\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

(8) 解　将函数 $f(x)$ 进行恒等变换有 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$，
$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2),$$
故
$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}&=e^{\frac{1}{x}[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)]}=e\cdot e^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}\\&=e\cdot\left[1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2\right)^2+o(x^2)\right]\\&=e-\frac{1}{2}ex+\frac{11}{24}ex^2+o(x^2),\end{aligned}$$
所以 $a=-\frac{1}{2}e,b=\frac{11}{24}e$.

(9) 证　（Ⅰ）由已知，$f'_+(a)f'_-(b)<0$，不妨设 $f'_+(a)<0$，$f'_-(b)>0$.

由　$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0,$$
知存在 $x_1\in(a,a+\delta_1)(\delta_1>0)$，使得 $f(x_1)<f(a)$，故 $f(a)$ 不是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小值.

同理，由 $f'_-(b)>0$ 可推得 $f(b)$ 不是 $f(x)$ 在$[a,b]$上最小值，于是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小值只能在区间(a,b)内取得. 令 $x=\xi\in(a,b)$，$f(x)$ 取得最小值，从而知 $f'(\xi)=0$.

（Ⅱ）令 $g(x)=f(x)-\mu x$，则 $g'(x)=f'(x)-\mu$，于是有
$$g'_+(a)\cdot g'_-(b)<0.$$
由（Ⅰ）知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $g'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\mu$.

【注】　本题（Ⅱ）是导函数的介值定理. 本题（Ⅰ）说明导函数 $f'(x)$ 具有连续函数的零点定理性质，结论（Ⅱ）说明 $f'(x)$ 具有介值定理性质，不需要 $f'(x)$ 连续的条件.

(10) 证　（Ⅰ）用反证法.

假设不存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$，则在(a,b)内，总有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$.

若 $f(x)>0$，由 $f(a)=f(b)=0$，则
$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geqslant 0,$$

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leqslant 0,$$

故有 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)\leqslant 0$，与条件 $f'_+(a)f'_-(b)>0$ 矛盾；

若 $f(x)<0$，则 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{x-a}\leqslant 0$，$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{x-b}\geqslant 0$，

故有 $f'_+(a)f'_-(b)\leqslant 0$，与条件 $f'_+(a)f'_-(b)>0$ 矛盾.

综上可知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

（Ⅱ）由 $f(a)=f(\xi)=f(b)$，在 $[a,\xi]$ 与 $[\xi,b]$ 上对 $f(x)$ 分别应用罗尔定理，$\exists\,\eta_1\in(a,\xi)$，$\eta_2\in(\xi,b)$，使得 $f'(\eta_1)=0$，$f'(\eta_2)=0$，对 $f'(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上再用罗尔定理，$\exists\,\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\eta)=0$.

(11) 证　由 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，可知存在 $x_1\in(0,\delta)$，$\delta>0$，使得 $f(x_1)<0$.

由拉格朗日中值定理，有

$$f'(x)=f'(0)+f''(\xi_1)(x-0)\geqslant f'(0)+Mx\to+\infty(x\to+\infty),$$

其中 ξ_1 介于 0 与 x 之间，故存在充分大的 $x_0\in(0,+\infty)$，使得在 $(x_0,+\infty)$ 内有 $f'(x)>1$.

对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi_2)(x-x_0)\geqslant f(x_0)+(x-x_0)\to+\infty(x\to+\infty),$$

其中 ξ_2 介于 x_0 与 x 之间，于是存在充分大的 $x_2\in(x_0,+\infty)$，使得 $f(x_2)>0$.

在区间 (x_1,x_2) 内由零点定理，可知 $f(x)=0$ 至少有一个实根.

用反证法，证明 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内至多有一个实根.

若 $f(x)=0$ 有两个不同实根 $a_1,a_2(a_1<a_2)$，则由罗尔定理，在 $(0,a_1)$ 和 (a_1,a_2) 内分别有 $f'(x)$ 的零点 b_1 与 b_2. 再由罗尔定理，存在 $c\in(b_1,b_2)$，使 $f''(c)=0$，与已知条件 $f''(x)\geqslant M>0$ 矛盾，所以 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根.

(12) 证　（Ⅰ）将要证等式变形为 $\dfrac{e^{-1}-1}{\int_0^1 f(t)\,dt}=-\dfrac{e^{-\xi}}{f(\xi)}$.

由极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x+1)}{x}$ 存在，可知 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x+1)=0=f(1)$.

对 e^{-x}，$\int_0^x f(t)\,dt$ 在 $[0,1]$ 上应用柯西中值定理，有

$$\frac{e^{-1}-1}{\int_0^1 f(t)\,dt}=-\frac{e^{-\xi}}{f(\xi)}(0<\xi<1).\qquad①$$

（Ⅱ）由 $f(1)-f(\xi)=f'(\eta)(1-\xi)$，$\xi<\eta<1$，得 $f(\xi)=(\xi-1)f'(\eta)$，代入 ① 式，得

$$\frac{e^{-1}-1}{\int_0^1 f(t)\,dt}=-\frac{e^{-\xi}}{(\xi-1)f'(\eta)}.$$

整理得

$$e\int_0^1 f(t)\,dt=(e-1)e^{\xi}(\xi-1)f'(\eta).$$

(13) 解　（Ⅰ）$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$，$\xi$ 介于 x 与 c 之间.

（Ⅱ）在上式中，分别令 $x=0$，$x=1$，则有

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2,0<\xi_1<c<1,$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2,0<c<\xi_2<1.$$

两式相减，得

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2],$$

故

$$|f'(c)|\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2!}|f''(\xi_2)|(1-c)^2+\frac{1}{2!}|f''(\xi_1)|c^2$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

$$\leqslant a+a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2].$$

又因 $c\in(0,1),(1-c)^2+c^2\leqslant 1$,故 $|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.

(14) 证 (Ⅰ) $$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0,$$

故 $f(x)\equiv c(c$ 为常数$)$. 又

$$f(1)=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan t\Big|_0^1=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

故 $f(x)=\frac{\pi}{2}$.

(Ⅱ) 当 $x=1$ 时,

$$\arctan 1-\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{1+1^2}=\frac{\pi}{4};$$

当 $x>1$ 时,令

$$f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{4},$$

则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{x^2-1}\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\equiv 0,$$

故 $f(x)\equiv c(c$ 为常数$)$.

又 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$ 上连续,故 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$,故有 $f(x)=0$,即

$$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

(15) 证 当 x_0 是 $f(x)$ 的极值点时,有 $f'(x_0)=0$,将 x_0 代入已知条件得

$$f''(x_0)=\frac{1-\mathrm{e}^{1-x_0}}{x_0-1}.$$

当 $x_0\neq 1$ 时,若 $x_0>1$,则 $f''(x_0)>0$,若 $x_0<1$,则 $f''(x_0)>0$,故 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 极小值点;

当 $x_0=1$ 时,由 $f'(1)=0$,$f''(1)=\lim\limits_{x\to 1}f''(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\mathrm{e}^{1-x}}{x-1}=1>0$,知 $f(x)$ 在 $x_0=1$ 处取得极小值.

综上可知,$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(16) 解 本题是隐函数求最值问题.

椭圆方程 $x^2-xy+y^2=3$,两边同时对 x 求导,得

$$2x-y-xy'+2yy'=0,$$

解得 $y'=\frac{2x-y}{x-2y}$.

令 $y'=0$,有 $y=2x$. $x=2y$ 是 y' 不存在的点.

将 $y=2x$ 代入原方程,得 $x=1,y=2$ 或 $x=-1,y=-2$;

将 $x=2y$ 代入原方程,得 $x=2,y=1$ 或 $x=-2,y=-1$.

比较可得 $x=1$ 和 $x=-1$ 分别是 $y=y(x)$ 的最大值点和最小值点,且椭圆上纵坐标最大的点为$(1,2)$,最小的点为$(-1,-2)$.

(17) 解 (Ⅰ) 由 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$,有 $y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$,故曲线在点 $P\left(a,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 处的切线方程为

$$y-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2\sqrt{a^3}}(x-a),$$

则切线与 x 轴和 y 轴的交点如题图所示,分别为 $A(3a,0)$, $B\left(0,\frac{3}{2\sqrt{a}}\right)$.

于是三角形 AOB 面积为

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号: 神灯考研 客服微信: KYFT104 QQ群: 118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{3}{2\sqrt{a}}=\frac{9}{4}\sqrt{a}.$$

（Ⅱ）当切点在曲线上且 $a\to+\infty$ 时，有

$$\lim_{a\to+\infty}S=\lim_{a\to+\infty}\frac{9}{4}\sqrt{a}=+\infty;$$

当切点在曲线上且 $a\to 0^+$ 时，有

$$\lim_{a\to 0^+}S=\lim_{a\to 0^+}\frac{9}{4}\sqrt{a}=0.$$

(18) 解　由 $f(x)=\arctan x$，有 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，故

$$(1+x^2)f'(x)=1.$$

上式两边同时对 x 求 $(n-1)$ 阶导数，得

$$[(1+x^2)f'(x)]^{(n-1)}=0,$$

利用莱布尼茨公式，令 $u=f'(x)$，$v=1+x^2$，则

$$f^{(n)}(x)(1+x^2)+(n-1)f^{(n-1)}(x)\cdot 2x+\frac{(n-1)(n-2)}{2}f^{(n-2)}(x)\cdot 2=0,$$

将 $x=0$ 代入上式，得

$$f^{(n)}(0)(1+0)+(n-1)f^{(n-1)}(0)\cdot 0+\frac{(n-1)(n-2)}{2}f^{(n-2)}(0)\cdot 2=0,$$

即

$$f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0). \qquad ①$$

又 $f(0)=0$，由 ① 式，得 $f''(0)=0$，故 $f^{(2k)}(0)=0$.

又 $f'(0)=1$，由 ① 式，得

$$f'''(0)=-2!,f^{(5)}=-4\cdot 3\cdot f'''(0)=4!,$$

故 $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!(k=0,1,2,\cdots)$.

【注】　也可利用泰勒公式.

由 $f(x)=\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^k\cdot\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}+\cdots$，得

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^k(2k)!, & n=2k+1.\end{cases}$$

(19) 解　（Ⅰ）　$f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cdot\cos 2x+\cdots+na_n\cos nx$，

故 $f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n$.

（Ⅱ）　$|f'(0)|=\left|\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|=1,$

故

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

(20) 证　只要证明两曲线在交点处导数相等.

设交点为 (x_0,y_0)，则 $f(x_0)=f(x_0)\sin x_0$，又 $f(x_0)>0$，故 $\sin x_0=1$，得 $x_0=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$（n 为整数）.

曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线斜率为 $f'(x_0)$；

曲线 $y=f(x)\sin x$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线斜率为

$$[f(x)\sin x]'\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\sin x_0+f(x_0)\cos x_0,$$

由于在 $x_0=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ 处，$\cos x_0=0$，$\sin x_0=1$，故 $[f(x)\sin x]'\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)$.

因此它们在交点处相切.

(21) 解　令 $f(x)=x^3+2x^2+x$，$g(x)=k$，当曲线 $y=f(x)$ 与 $g(x)=k$ 有 3 个不同交点时，确定 k 的值.

对函数 $f(x)$ 求导，有

$$f'(x)=3x^2+4x+1=(3x+1)(x+1),$$

令 $f'(x)=0$，解得驻点 $x_1=-1$，$x_2=-\dfrac{1}{3}$. 又

$$f''(x)=6x+4,f''(-1)=-2<0,$$

故 $f(-1)=0$ 为极大值.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

同理 $f''\left(-\frac{1}{3}\right)=2>0$,故 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{27}$ 为极小值.

综上可知,当 $-\frac{4}{27}<k<0$ 时,方程有3个不同实根.

(22)解 由 $y=\sqrt{x}$,有

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}},y''=\frac{-1}{4\sqrt{x^3}},$$

则曲率半径为

$$R=R(x)=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

抛物线上 AM 的弧长为

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4t}}\,\mathrm{d}t,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=6\sqrt{x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}}.$$

因此 $3R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)^2=3\cdot\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{4x+1}}-36x=9.$

(23)解 由已知,点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

令 $Y=0$,可得切线在 x 轴上的截距为

$$F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\ (x>0).$$

由 $f''(x)>0$,知 $f'(x)>f'(0)=0$,

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]=-\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{f'(x)}=0,$$

$$\lim_{x\to0^+}F'(x)=\lim_{x\to0^+}\left[1-\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{f'^2(x)}\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

$$=f''(0)\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{f'^2(x)}=f''(0)\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{2f'(x)f''(x)}=\frac{1}{2},$$

故

$$\lim_{x\to0^+}[F(x)+F'(x)]=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

拓展题

解答题

(1)解 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y=f(x)+f'(x)(X-x).$$

令 $Y=0$,可得切线在 x 轴上的截距为

$$X=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=u(x),$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{u(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x-\frac{f(x)}{f'(x)}}=\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)}{xf'(x)-f(x)}$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)+xf''(x)}{xf''(x)}=1+\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{xf''(x)}$$

$$=1+\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\cdot\frac{1}{f''(x)}$$

$$=1+\frac{f''(0)}{f''(0)}=1+1=2.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的学神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(2) 证　(Ⅰ) 当 $f(x)\equiv 0$ 时，显然原不等式成立. 不妨设 $f(x)\not\equiv 0$，且 $|f(x_0)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，$f'(x_0)=0$，故利用泰勒公式，可知存在 ξ，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

成立，将 $x=a$，$x=b$ 代入上式，得

$$0=f(a)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2, \tag{①}$$

$$0=f(b)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-x_0)^2, \tag{②}$$

其中 $\xi_1\in(a,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,b)$.

若 $x_0\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right]$，则由 ① 式，得

$$|f(x_0)|=\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|(a-x_0)^2\leqslant\frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\cdot\frac{(b-a)^2}{4}=\frac{1}{8}M(b-a)^2.$$

若 $x_0\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$，则由 ② 式，得

$$|f(x_0)|=\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(b-x_0)^2\leqslant\frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\cdot\frac{(b-a)^2}{4}=\frac{1}{8}M(b-a)^2.$$

综上所述，原不等式得证.

(Ⅱ) 不妨设 $|f'(x_1)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$，则由泰勒公式，可知

$$0=f(a)=f(x_1)+f'(x_1)(a-x_1)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)(a-x_1)^2, \tag{③}$$

$$0=f(b)=f(x_1)+f'(x_1)(b-x_1)+\frac{1}{2}f''(\eta_2)(b-x_1)^2, \tag{④}$$

其中 $\eta_1\in(a,x_1)$，$\eta_2\in(x_1,b)$. 由 ③ − ④，得

$$\begin{aligned}|f'(x_1)(b-a)|&=\frac{1}{2}|f''(\eta_2)(b-x_1)^2-f''(\eta_1)(a-x_1)^2|\\&\leqslant\frac{1}{2}|f''(\eta_2)(b-x_1)^2|+\frac{1}{2}|f''(\eta_1)(a-x_1)^2|\\&\leqslant\frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\cdot[(b-x_1)^2+(a-x_1)^2],\end{aligned}$$

又 $(a-x_1)^2+(b-x_1)^2$ 在 $a\leqslant x_1\leqslant b$ 上的最大值为 $(b-a)^2$，故 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}M(b-a)$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

第三章　一元函数积分学及其应用

基础题

一、选择题

(1)C.

解　已知等式$\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$两边同时对$x$求导，得

$$xf(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

故$\frac{1}{f(x)}=x\sqrt{1-x^2}$，所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(2)A.

解　令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，当$f(t)$是连续的奇函数时，$F(x)$是偶函数.

(3)D.

解　由原函数的定义，知$F'(t)=\sin t^2$，$\mathrm{d}[F(t)]=F'(t)\mathrm{d}t=\sin t^2\mathrm{d}t$.

令$t=x^2$，得$\mathrm{d}[F(x^2)]=\sin x^4\mathrm{d}(x^2)=2x\sin x^4\mathrm{d}x$.

(4)C.

解　$x=\pi$是$f(x)$的跳跃间断点，故$f(x)$可积，则$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$在$x=\pi$处连续，但不可导，C正确.

【注】　① 此题利用了结论：设$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$，则

(ⅰ)$f(x)$在$[a,b]$上可积$\Rightarrow F(x)$在$[a,b]$上连续；

(ⅱ)$f(x)$在$[a,b]$上连续$\Rightarrow F(x)$在$[a,b]$上可导.

② 若$f(x)$在$[a,b]$上只有有限个第一类间断点，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

③ 若$f(x)$在$[a,b]$上存在第一类间断点，则$f(x)$没有原函数.

(5)B.

解　由已知条件，画出示意图，如图3-1所示. 由$f'(x)<0$，知当$x\in[0,1)$时，$f(x)>f(1)$，故$N=(1-0)f(1)<M=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

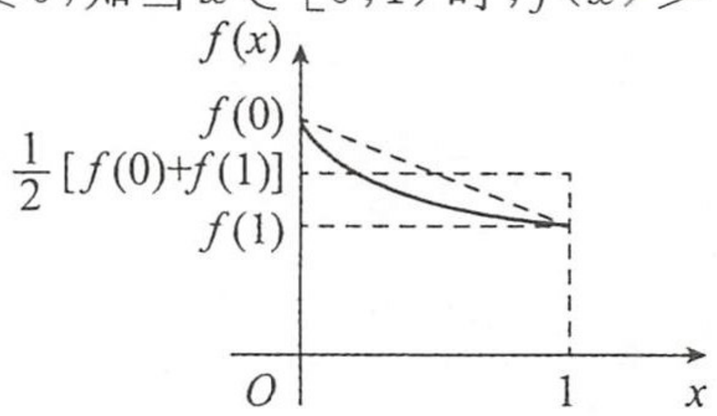


图3-1

由$f''(x)>0$，知

$$P=\frac{1}{2}(1-0)[f(0)+f(1)]>\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=M,$$

故B正确.

(6)A.

解　当$x\to0$时，$\sin x-ax\to0$，故$\int_b^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t\to0$，于是必有$b=0$.

若$a\neq1$，则当$x\to0$时，$\sin x-ax$与x是同阶无穷小，$\int_b^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$是关于$x$的高阶无穷小，故必有$c=0$，与题设矛盾，所以$a=1$. 由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t}{\sin x-x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{-\frac{1}{2}x^2}=-2,$$

故A正确.

(7)A.

解　对于A：利用极限审敛法. 由

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451
微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{2}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1$$

$(\lambda=\frac{5}{2}>1,0<l=1<+\infty)$，知积分收敛.

对于 B：$x=0$ 是 $\frac{1}{\ln(1+x)}$ 的瑕点. 由

$$\lim_{x\to0^+}(x-0)\frac{1}{\ln(1+x)}=1\ (\lambda=1,0<l<1<+\infty),$$

知积分发散.

对于 C：$x=0$ 是 $\frac{1}{\sin x}$ 的瑕点. 由

$$\lim_{x\to0^+}(x-0)\frac{1}{\sin x}=1\ (\lambda=1,0<l=1<+\infty),$$

知积分发散.

对于 D：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

用定义法，有

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_a^1\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\cdot2\lim_{a\to-\infty}\sqrt{1+x^2}\Big|_a^1$$
$$=\lim_{a\to-\infty}(\sqrt{2}-\sqrt{1+a^2})=-\infty,$$

故原积分发散.

【注】 ① 判别反常积分敛散性有两种方法：

（ⅰ）定义法，当积分计算较容易时，选择定义法判别；

（ⅱ）反常积分的审敛法.

(a) 设 $I=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，$f(x)$ 非负连续，则

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\lambda}f(x)=l,\begin{cases}0\leqslant l<+\infty\text{ 且 }\lambda>1\text{，则收敛，}\\0<l\leqslant+\infty\text{ 且 }\lambda\leqslant1\text{，则发散.}\end{cases}$$

(b) 设 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$x=a$ 是 $f(x)$ 的瑕点，$f(x)$ 非负连续，则

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^{\lambda}f(x)=l,\begin{cases}0\leqslant l<+\infty\text{ 且 }0<\lambda<1\text{，则收敛，}\\0<l\leqslant+\infty\text{ 且 }\lambda\geqslant1\text{，则发散.}\end{cases}$$

② 两个常用结果：

（ⅰ）$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p},\begin{cases}p>1\text{，收敛，}\\p\leqslant1\text{，发散.}\end{cases}$

（ⅱ）$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p},\begin{cases}p<1\text{，收敛，}\\p\geqslant1\text{，发散.}\end{cases}$

二、填空题

(1) $\frac{1}{\sin x\cos x}$.

解　由已知，$F'(x)=f(x)$，故 $2F(x)F'(x)=\frac{2\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}$. 两边同时积分，得

$$\int2F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x,$$

故
$$F^2(x)=\int\frac{2\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x=[\ln(\tan x)]^2+C.$$

将 $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ 代入上式，得 $C=0$，故 $F(x)=\sqrt{[\ln(\tan x)]^2}=\ln(\tan x)$，所以

$$f(x)=F'(x)=[\ln(\tan x)]'=\frac{1}{\sin x\cos x}.$$

(2) $\frac{5}{2}$.

解　由 $f(x+4)=f(x)$，知 $f(9)=f(1)$，而

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$f'(x)=1+|x|=\begin{cases}1-x, & -2<x<0,\\ 1+x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

积分，得
$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+x+C_1, & -2<x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{x^2}{2}+x+C_2, & 0<x<2.\end{cases}$$

因为 $f(x)$ 可导，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，可得 $C_1=C_2=1$，故 $f(9)=f(1)=\dfrac{5}{2}$.

(3)(Ⅰ)$\sin x^2$；(Ⅱ)$xf(x^2)$；(Ⅲ)$\dfrac{1}{4}$；(Ⅳ)$\dfrac{5}{\mathrm{e}}$；(Ⅴ)$-\dfrac{1}{8}$；(Ⅵ)$\dfrac{\pi}{6}$.

解 (Ⅰ)
$$\int_0^x \sin(x-t)^2\,\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} -\int_x^0 \sin u^2\,\mathrm{d}u=\int_0^x \sin u^2\,\mathrm{d}u,$$

故
$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin u^2\,\mathrm{d}u=\sin x^2.$$

(Ⅱ)
$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\,\mathrm{d}(x^2-t^2)$$
$$\xlongequal{x^2-t^2=u} -\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,\mathrm{d}u,$$

故
$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,\mathrm{d}u\right]=xf(x^2).$$

(Ⅲ)利用(Ⅱ)，有
$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x^2)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{4x^2}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}=\frac{1}{4}f'(0)=\frac{1}{4}.$$

【注】 错误做法：
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{4x^2}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{2xf'(x^2)}{8x}=\frac{1}{4},$$
由于没有 $f'(x)$ 连续的条件，故 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 未必存在.

(Ⅳ)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}{\cos x\cdot(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}=\frac{5}{\mathrm{e}}.$$

(Ⅴ)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 t\ln t\,\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\int_1^{\cos x} t\ln t\,\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x\cdot\ln(\cos x)\cdot(-\sin x)}{4x^3}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cdot\cos x}=-\frac{1}{8}.$$

(Ⅵ)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\arctan(1+x^2)}{3x}=\frac{\pi}{6}.$$

(4)$\dfrac{(\sqrt{3}+1)\pi}{12}$.

解
$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{12},$$

故平均值为
$$\frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{(\sqrt{3}+1)\pi}{12}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

(5)1.

解 依题设，$V(\xi)=\pi\int_0^{\xi}y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\xi}\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_0^{\xi}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+\xi^2}\right)$.

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

又　$\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\dfrac{\pi}{2}$，$V(a)=\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{1+a^2}\right)$，

由 $V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$，得 $\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{1+a^2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$，解得 $a=\pm1$，又 $a>0$，故 $a=1$.

(6) $\dfrac{3\pi a}{2}$.

解　$$s=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3}+a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta\xrightarrow{t=\frac{\theta}{3}}3a\int_0^{\pi}\sin^2t\,\mathrm{d}t=\frac{3\pi a}{2}.$$

(7) 4.

解　函数 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，全长

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=4.$$

(8) $\dfrac{3}{2}$.

解　如图 3-2 所示，$S=\int_0^1[(\mathrm{e}+1)-y-\mathrm{e}^y]\mathrm{d}y=\dfrac{3}{2}$，

或　$$S=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}+1}(\mathrm{e}+1-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}.$$

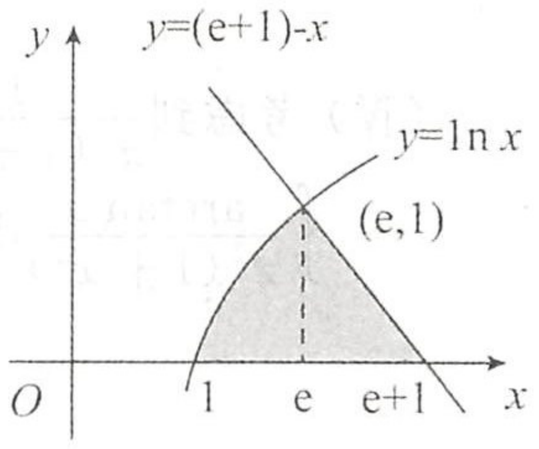


图 3-2

(9) $\dfrac{3}{2}\pi^2+4\pi$.

解　如图 3-3 所示，

$$V=\int_0^{\pi}\pi(\sin x+1)^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\left(1+2\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left(\frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi^2+4\pi.$$

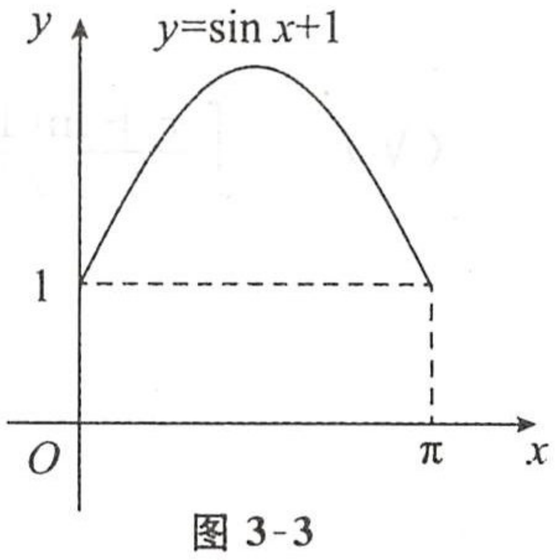


图 3-3

(10) $\dfrac{4}{15}$.

解　$$\lim_{x\to0}\left(\frac{n-x}{n+x}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1-\frac{2x}{n+x}\right)^{\frac{-(n+x)}{2x}}\right]^{\frac{-4}{n+x}}=\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}},$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{-4x}\Big|_{\frac{1}{n}}^{+\infty}+\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4n}\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}}-\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-4x}\Big|_{\frac{1}{n}}^{+\infty}=\frac{1}{4n}\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}}+\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}},$$

故 $\left(\dfrac{1}{4n}+\dfrac{1}{16}\right)\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}}=\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}}$，解得 $n=\dfrac{4}{15}$.

三、解答题

(1) 解　(Ⅰ)　$$\int\frac{2^x\cdot3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x=\int\frac{6^x\mathrm{d}x}{4^x\left[\left(\frac{9}{4}\right)^x-1\right]}=\int\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x\mathrm{d}x}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-1}$$

$$=\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-1}=\frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C.$$

【注】　$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C.$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(Ⅱ) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1-x^4)}=\int\frac{x^2}{x^4(1-x^4)}\mathrm{d}x=\int x^2\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{1-x^4}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{1+x^2-1}{1-x^4}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^4}$$
$$=-\frac{1}{x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$
$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

(Ⅲ) 利用倒代换,令 $x=\frac{1}{t}$,则
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}=-\int\frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^4-1+1}{1+t^2}\mathrm{d}t=-\int(t^2-1)\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
$$=-\frac{1}{3}t^3+t-\arctan t+C=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C.$$

(Ⅳ) 考虑到 $\frac{1}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}$,故
$$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=-\int\arctan x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)-\int\arctan x\mathrm{d}(\arctan x)$$
$$=-\frac{\arctan x}{x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2$$
$$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}(x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2$$
$$=-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C.$$

(Ⅴ) $$\int\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\frac{\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\ln|x|-\int\ln(1-x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=\ln|x|-\frac{\ln(1-x)}{x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)}$$
$$=\ln|x|-\frac{\ln(1-x)}{x}-\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)+C.$$

(2) 解 (Ⅰ) 令 $\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$,故
$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt{x})}=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{t^2(1+t)}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}$$
$$=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=2[\ln t-\ln(1+t)]+C$$
$$=2[\ln\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C=2\ln\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+C.$$

(Ⅱ) $$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=2\int x\mathrm{d}(\sqrt{\mathrm{e}^x-1})=2\left(x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x\right)$$
$$=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-2\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x,$$

令 $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$,则 $x=\ln(1+t^2)$, $\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$,故

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资料

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt$$
$$= 2t - 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2t - 2\arctan t + C,$$

所以原式 $= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C.$

（Ⅲ）令 $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，则 $dx = \sec^2 t\,dt$，故

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{\tan^3 t \cdot \sec^2 t}{\sec t}dt$$
$$= \int \tan^2 t\,d(\sec t) = \int (\sec^2 t - 1)\,d(\sec t)$$
$$= \frac{1}{3}\sec^3 t - \sec t + C.$$

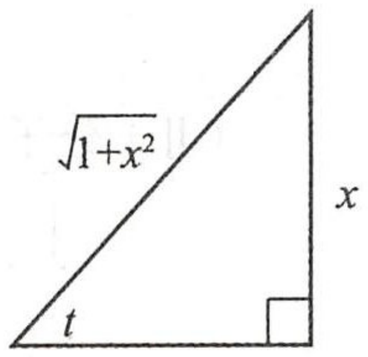


图 3-4

如图 3-4 所示，$\sec t = \sqrt{1+x^2}$，于是原式

$$I = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

【注】　此题也可凑微分.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{x^2 \cdot d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} = \int (x^2+1-1)\,d(\sqrt{1+x^2})$$
$$= \int (\sqrt{x^2+1})^2\,d(\sqrt{1+x^2}) - \int d(\sqrt{1+x^2})$$
$$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

（Ⅳ）令 $\tan t = x$，则 $dx = \sec^2 t\,dt$，故

$$I = \int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dt}{(2\tan^2 t + 1)\cos t}$$
$$= \int \frac{\cos t\,dt}{2\sin^2 t + \cos^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{1+\sin^2 t} = \arctan(\sin t) + C.$$

又 $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，故 $I = \arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

（Ⅴ）
$$\int \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}}dx = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{x}d(\sqrt{x-1})$$
$$= 2\int \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{1+(\sqrt{x-1})^2}d(\sqrt{x-1})$$
$$= 2\int \arctan\sqrt{x-1}\,d(\arctan\sqrt{x-1})$$
$$= (\arctan\sqrt{x-1})^2 + C.$$

（Ⅵ）
$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x\sqrt{x}}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{d(x^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}} = -\frac{2}{3}\int \frac{d(1-x^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}}$$
$$= -\frac{2}{3}\cdot 2\int d(\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}) = -\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}} + C.$$

(3) 解　（Ⅰ）
$$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}dx = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^2 x\cos^4 x}dx$$
$$= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$
$$= \int \tan^2 x\,d(\tan x) + 2\tan x - \cot x$$
$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + 2\tan x - \cot x + C.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

【神灯考研】获取更多考研资源!

【注】 求解三角有理式积分首先考虑利用恒等变形、三角公式,一般的方法是利用万能代换.

此题也可以分子分母同乘以 $\cos^2 x$,得

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\tan^2 x\cos^6 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sec^4 x}{\tan^2 x}\mathrm{d}(\tan x)\\ &= \int \frac{\tan^4 x+2\tan^2 x+1}{\tan^2 x}\mathrm{d}(\tan x)\\ &= \frac{1}{3}\tan^3 x+2\tan x-\cot x+C.\end{aligned}$$

(Ⅱ)分子分母同时乘以$(1-\sin x)$,再凑微分.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x)\\ &= \tan x-\frac{1}{\cos x}+C.\end{aligned}$$

【注】 利用三角公式.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}\\ &= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.\end{aligned}$$

(Ⅲ)
$$\begin{aligned}&\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}\\ &= \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C.\end{aligned}$$

【注】 这里利用了

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

即 $f(x)$ 可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和.

(Ⅳ)考虑拆项凑微分.令

$$3\sin x+\cos x = A(\sin x+2\cos x)+B(\cos x-2\sin x),$$

比较两边系数,可得 $A=1, B=-1$,故

$$\begin{aligned}\int \frac{3\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{(\sin x+2\cos x)-(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x\\ &= \int \mathrm{d}x-\int \frac{\mathrm{d}(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x}\\ &= x-\ln|\sin x+2\cos x|+C.\end{aligned}$$

(Ⅴ)用万能代换,令 $\tan\frac{x}{2}=t$,则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

故

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x\cos x+2\sin x}\\ &= \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\cdot\frac{2t}{1+t^2}}\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1+t^2}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int t\mathrm{d}t\end{aligned}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资料

$$= \frac{1}{4}\ln|t| + \frac{1}{8}t^2 + C$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + C.$$

（Ⅵ）当 $a=0, b\neq 0$ 时，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{b^2\cos^2 x} = \frac{1}{b^2}\tan x + C;$$

当 $a\neq 0, b=0$ 时，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x} = -\frac{1}{a^2}\cot x + C;$$

当 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$ 时，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{b^2\cos^2 x\left(1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2 x\right)}$$
$$= \int \frac{1}{ab}\frac{1}{1+\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}\tan x\right)$$
$$= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C.$$

(4) 解　（Ⅰ）用分部积分法.

$$\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = x\arctan\sqrt{x} - \int x\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$= x\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int\frac{x+1-1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$$
$$= x\arctan\sqrt{x} - \int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}$$
$$= x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C.$$

（Ⅱ）
$$\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x = -\int\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-1}\right) = -\frac{\ln x}{x-1} + \int\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\ln x}{x-1} + \int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\ln x}{x-1} + \ln|x-1| - \ln|x| + C.$$

（Ⅲ）
$$\int\frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x = -\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+2}\right) = -x^2\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{x+2} + \int\frac{1}{x+2}\mathrm{d}(x^2\mathrm{e}^x)$$
$$= -\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2} + \int\frac{x^2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x}{x+2}\mathrm{d}x = -\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2} + \int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2} + x\mathrm{e}^x - \int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2} + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

（Ⅳ）令 $\ln x = t$，则 $x = \mathrm{e}^t$，$\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$.

$$\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x = \int\sin t\cdot\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \int\sin t\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)$$
$$= \mathrm{e}^t\sin t - \int\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\sin t - \int\cos t\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)$$
$$= \mathrm{e}^t\sin t - \left(\mathrm{e}^t\cos t + \int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t\right),$$

设 $I = \int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t$，则 $I = \mathrm{e}^t\sin t - \mathrm{e}^t\cos t - I$，即

$$I = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t\sin t - \mathrm{e}^t\cos t) + C = \frac{1}{2}x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

（Ⅴ）令 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$，则 $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$，故

$$I = \int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x = -\int\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

$$=-2\int\frac{t\mathrm{d}(t^2)}{(1-t^2)^2}=-2\int t\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-t^2}\right)$$
$$=-\frac{2t}{1-t^2}+2\int\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t=-\frac{2t}{1-t^2}+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$
$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right|+C.$$

【注】 此题也可利用倒代换,令 $x=\frac{1}{t}$,则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,故

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=-\int\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\mathrm{d}t,$$

再令 $\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}=u$,去根号继续求解即可.

(Ⅵ) $$I=\int\mathrm{e}^{2x}(1+\tan x)^2\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{2x}(1+2\tan x+\tan^2 x)\mathrm{d}x$$
$$=\int\mathrm{e}^{2x}\sec^2 x\mathrm{d}x+2\int\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(\tan x)+2\int\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x$$
$$=\mathrm{e}^{2x}\tan x-2\int\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x+2\int\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}\tan x+C.$$

【注】 此题通过分部积分法消去 $2\int\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x$,这类问题一般也可凑微分.

$$\int\mathrm{e}^{2x}\sec^2 x\mathrm{d}x+2\int\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^{2x}\sec^2 x+2\mathrm{e}^{2x}\tan x)\mathrm{d}x$$
$$=\int\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}\tan x)=\mathrm{e}^{2x}\tan x+C.$$

(5)解 (Ⅰ)在对称区间上积分,考查被积函数的奇偶性.

$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ 是奇函数,$\cos x$ 是偶函数,故

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\cos x\right)\mathrm{d}x=0-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\mathrm{d}x=-\sqrt{2}.$$

(Ⅱ) $$\int_{-1}^{1}(2+\sin x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+0=4\times\frac{1}{4}\pi=\pi.$$

(Ⅲ) $$\int_{-2}^{2}(x+|x|)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0+2\int_0^2|x|\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$
$$=-2x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^2+2\int_0^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2-6\mathrm{e}^{-2}.$$

(Ⅳ)由题可知,$\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是偶函数,$\frac{x(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是奇函数,故

$$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+0$$
$$=4\int_0^1\mathrm{d}x-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=4-\pi.$$

(6)解 (Ⅰ) $$\int_0^2(x-1)^2\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^2(x-1)^2\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{x-1=t}\int_{-1}^{1}t^2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=2\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{t=\sin u}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\sin^2 u\mathrm{d}u=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 u)\sin^2 u\mathrm{d}u$$
$$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}-2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{\pi}{8}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资料

（Ⅱ） $\displaystyle\int_0^{\pi}(e^{-\cos x}-e^{\cos x})dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(e^{\sin t}-e^{-\sin t})dt=0.$

【注】 $e^{\sin t}-e^{-\sin t}$ 是奇函数.

(7) 解 （Ⅰ） $\min\{2,x^2\}=\begin{cases}2, & -3\leqslant x\leqslant -\sqrt{2},\\ x^2, & -\sqrt{2}<x<\sqrt{2},\\ 2, & \sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$

故

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{2}\min\{2,x^2\}dx&=\int_{-3}^{-\sqrt{2}}\min\{2,x^2\}dx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\min\{2,x^2\}dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}\min\{2,x^2\}dx\\&=\int_{-3}^{-\sqrt{2}}2dx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}x^2dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}2dx=10-\frac{8}{3}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

（Ⅱ）当 $-1\leqslant x<0$ 时，$\displaystyle\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=\int_{-1}^{x}(1+t)dt=\frac{(1+t)^2}{2}\Big|_{-1}^{x}=\frac{(1+x)^2}{2}$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$\displaystyle\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_{0}^{x}(1-t)dt=1-\frac{1}{2}(1-x)^2.$

【注】 注意当 $x\geqslant 0$ 时，$\displaystyle\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt\neq\int_{-1}^{x}(1-t)dt.$

（Ⅲ）分段积分，去绝对值符号.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|x-y|e^x dx&=\int_{-1}^{y}(y-x)e^x dx+\int_{y}^{1}(x-y)e^x dx\\&=(y-x)e^x\Big|_{-1}^{y}+\int_{-1}^{y}e^x dx+(x-y)e^x\Big|_{y}^{1}-\int_{y}^{1}e^x dx\\&=2e^y-(y+2)e^{-1}-ye.\end{aligned}$$

（Ⅳ） $\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)dx=4(\sqrt{2}-1).$$

【注】 因为 $\sqrt{1-\sin x}$ 在 $[0,\pi]$ 上关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，所以

$$I=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=2\left(2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=4(\sqrt{2}-1).$$

(8) 解 （Ⅰ）由题可知，$x\cos^2 x$ 是奇函数，$\sin^2 x\cos^2 x$ 为偶函数，故

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+\sin^2 x)\cos^2 x dx=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x dx\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\sin^2 x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x dx\\&=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

（Ⅱ）令 $x^2=\sin t$，则 $2xdx=\cos t dt$，故

$$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\cos^3 t dt=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{32}.$$

（Ⅲ） $\displaystyle\int_0^{\pi}t\sin t dt=-\int_0^{\pi}t d(\cos t)=(-t\cos t)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos t dt=\pi.$

（Ⅳ） $\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}dx\xlongequal{x-1=t}\int_{-1}^{0}\sqrt{1-t^2}dt=\frac{\pi}{4},$

$$\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}dx\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16},$$

故原积分 $=\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{16}=\frac{7\pi}{16}.$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

【注】 利用结论$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$,有

$$\int_0^{\pi} x\sin^n x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi^2}{2}, & n\text{为正偶数},\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\pi, & n\text{为大于1的正奇数},\end{cases}$$

故(Ⅲ)可利用结论求解,即$\int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=\pi$.

(9) 解 (Ⅰ)令$x-1=t$,则

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^2(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{1-x})}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\arctan\mathrm{e}^t\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4\mathrm{e}^2}.$$

(Ⅱ)积分区间内$x=1$是瑕点,在区间$\left[\frac{1}{2},1\right)$和$\left(1,\frac{3}{2}\right]$上分别计算积分.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}+\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}+\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$$

$$=\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]\Big|_1^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$$

【注】 积分公式:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

(10) 证 利用泰勒公式,将$f(x)$在$x=\frac{a}{2}$处展开为

$$f(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\geqslant f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)(\xi\text{介于}\frac{a}{2}\text{与}x\text{之间}),$$

积分,得

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x>\int_0^a\left[f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[f\left(\frac{a}{2}\right)\cdot x+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right]\Big|_0^a=af\left(\frac{a}{2}\right).$$

(11) 证 利用单调性证明.令

$$F(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,a\leqslant x\leqslant b,$$

则

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}f(x)$$

$$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(\xi)(x-a)(\text{这里利用积分中值定理})$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$= \frac{x-a}{2}[f(x)-f(\xi)] \geqslant 0(\text{因 } f(x) \text{ 单调增加}),$$

其中 $a \leqslant \xi \leqslant x$，所以 $F(x)$ 单调增加，故 $F(b) \geqslant F(a) = 0$，即

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(12) 证　利用积分换元法.

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=a+b-t} \int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)(-\mathrm{d}t)$$

$$= \int_a^b (a+b-t)f(a+b-t)\mathrm{d}t.$$

由题知 $y = f(x)$ 关于 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 对称，则有

$$f(x) = f\left(2 \cdot \frac{a+b}{2} - x\right) = f(a+b-x),$$

故
$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (a+b-t)f(a+b-t)\mathrm{d}t$$

$$= (a+b)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b tf(t)\mathrm{d}t$$

$$= (a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x,$$

移项，得
$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【注】 结论：

若 $y = f(x)$ 关于直线 $x = a(a \neq 0)$ 对称，则 $f(x) = f(2a-x)$；若 $y = f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 对称 $(a \neq 0)$，则 $f(x) = -f(2a-x)$.

(13) 证　利用单调性证明. 令

$$F(x) = \int_a^x tf(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right],$$

则
$$F'(x) = xf(x) - \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$\geqslant \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\int_0^x f(x)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}xf(x) = 0,$$

故 $F(x)$ 单调增加，所以 $F(b) \geqslant F(a) = 0$. 所证不等式成立.

【注】 考虑到 $b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$，也可令辅助函数为 $F(x) = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t (x \geqslant 0)$，则

$$b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x)\right]\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \left[\int_0^x f(x)\mathrm{d}t + xf(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b [f(x)x + xf(x)]\mathrm{d}x = 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x,$$

所以
$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right].$$

(14) 解　对 $f(x)$ 求导有 $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$，令 $f'(x) = 0$，解得 $x = \dfrac{1}{2}$.

当 $-1 < x < \dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x) < 0$；当 $\dfrac{1}{2} < x < 1$ 时，$f'(x) > 0$. 又

$$f(1) = \int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t = \ln(t^2-t+1)\Big|_0^1 = 0,$$

$$f(-1) = \int_0^{-1} \frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t = \ln(t^2-t+1)\Big|_0^{-1} = \ln 3,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t = \ln(t^2-t+1)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{3}{4},$$

故最小值为 $\ln\dfrac{3}{4}$，最大值为 $\ln 3$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

(15) 解 依题设,如图 3-5 所示,由 $y=\frac{1}{2}+x^2$,有 $y(0)=\frac{1}{2}$,$y(a)=a^2+\frac{1}{2}$,故梯形 $OABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}(|OC|+|AB|)\cdot|OA|$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+a^2+\frac{1}{2}\right)\cdot a=\frac{1}{2}a(a^2+1).$$

曲边梯形 $OABC$ 的面积为

$$S_1=\int_0^a\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x\right)\Big|_0^a=\frac{1}{3}a\left(a^2+\frac{3}{2}\right),$$

故
$$\frac{S}{S_1}=\frac{\frac{1}{2}a(a^2+1)}{\frac{1}{3}a\left(a^2+\frac{3}{2}\right)}<\frac{3}{2}.$$

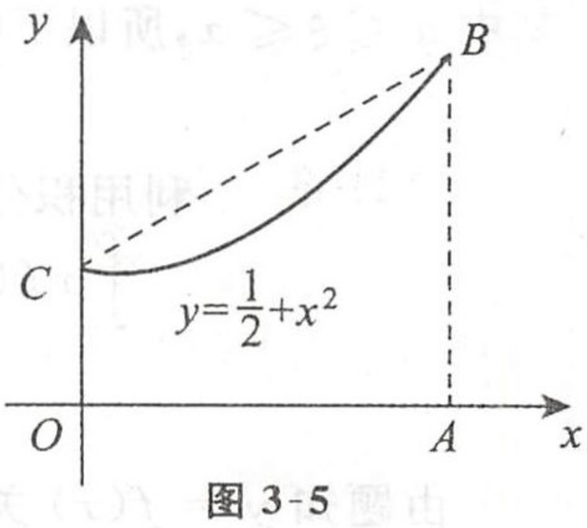


图 3-5

(16) 解 由已知,如图 3-6 所示.

设 $\sin x=k\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,依题意知,两个函数图形的交点是唯一的,则 $S_1=\int_0^x(k-\sin t)\mathrm{d}t=kx+\cos x-1$,

$$S_2=\int_x^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-k)\mathrm{d}t=\cos x+kx-\frac{1}{2}\pi k.$$

将 $k=\sin x$ 代入上两式,得

$$S_1=x\sin x+\cos x-1,S_2=\cos x+x\sin x-\frac{1}{2}\pi\sin x,$$

故
$$S=S_1+S_2=2(x\sin x+\cos x)-\left(1+\frac{\pi}{2}\sin x\right),0<x<\frac{\pi}{2},$$

则 $S'=2x\cos x-\frac{\pi}{2}\cos x=0$,得唯一驻点 $x=\frac{\pi}{4}$. 又

$$S(0)=1,\ S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1,\ S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1,$$

所以 S 的最小值为 $S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$.

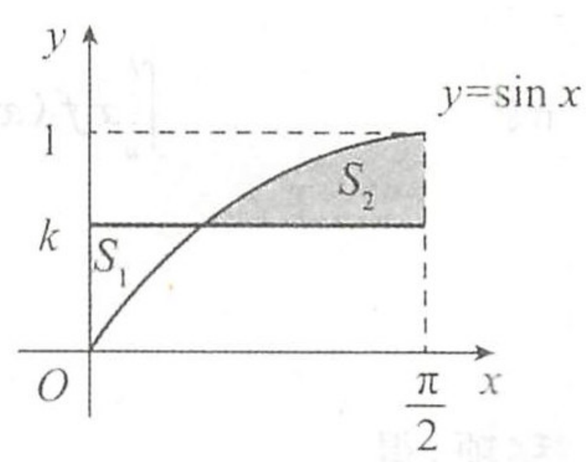


图 3-6

(17) 解 (Ⅰ)如图 3-7 所示,用微元法.

任取 $[y,y+\mathrm{d}y]\subset[0,1]$,则微元

$$\mathrm{d}V_1=\left[\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=[\pi^2\arcsin y-\pi(\arcsin y)^2]\mathrm{d}y,$$

故 $V_1=\int_0^1\mathrm{d}V_1=\pi^2\int_0^1\arcsin y\mathrm{d}y-\pi\int_0^1(\arcsin y)^2\mathrm{d}y$

$$=\pi^2\left(y\arcsin y+\sqrt{1-y^2}\right)\Big|_0^1-\pi\left[y(\arcsin y)^2+2\sqrt{1-y^2}\arcsin y-2y\right]\Big|_0^1$$

$$=\pi^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)=\frac{\pi^3}{4}-\pi^2+2\pi.$$

(Ⅱ)任取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,\pi]$ 则微元 $\mathrm{d}V_2=2\pi x\cdot\sin x\mathrm{d}x$,故

$$V_2=\int_0^\pi 2\pi x\sin x\mathrm{d}x=2\pi^2.$$

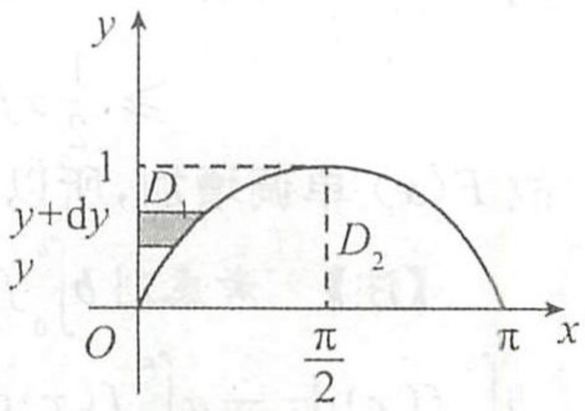


图 3-7

(18) 解 (Ⅰ)星形线如图 3-8 所示.

$$A=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3t\cdot(-3a\cos^2t\cdot\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2(\sin^4t-\sin^6t)\mathrm{d}t=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

(Ⅱ)$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\mathrm{d}t=6a.$

(Ⅲ)$V=2\int_0^a\pi y^2\mathrm{d}x=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7t(1-\sin^2t)\mathrm{d}t=\frac{32}{105}\pi a^3$,

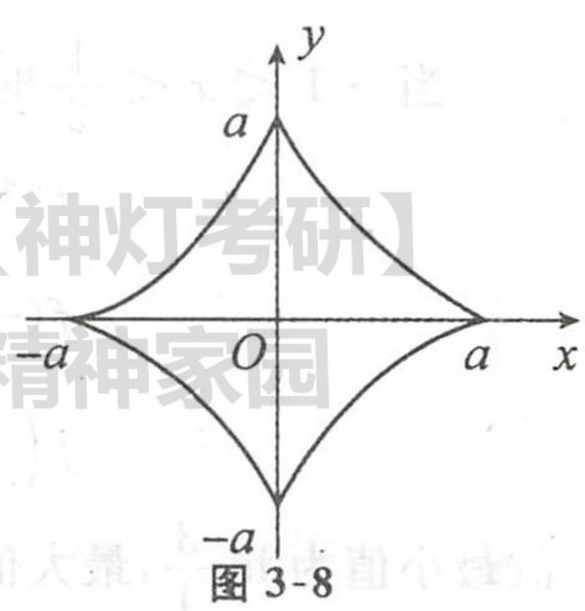


图 3-8

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi y\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos t\mathrm{d}t=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

【注】　参数方程所围区域图形，求其旋转体面积或体积，关键是在直角坐标系中写出面积或体积表达式，再将参数方程代入，相当于定积分的换元.

如参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，设 $x=x(t)$ 的反函数为 $t=t(x)$，则面积为

$$A=\int_a^b y(t(x))\mathrm{d}x\xlongequal{x=x(t)}\int_\alpha^\beta y(t)\mathrm{d}[x(t)],$$

这里 α,β 是 t 的积分限.

(19) 解　依题意，立体如图 3-9 所示，先求垂直于 x 轴截面的面积

$$A(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-1)^2,$$

故所求体积为

$$V=\int_{-1}^1 A(x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^1(x^2-1)^2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1(x^2-1)^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right)\Big|_0^1=\frac{4}{15}\sqrt{3}.$$

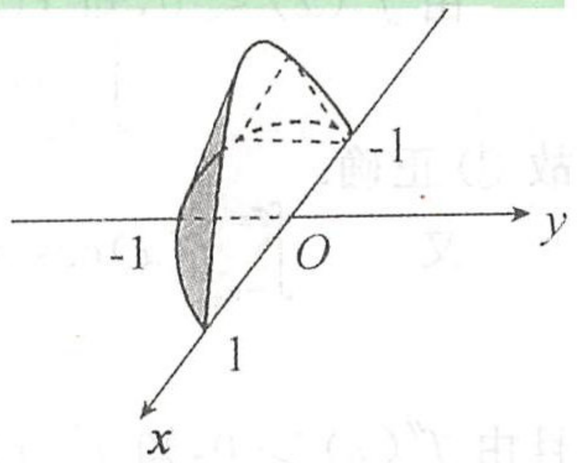


图 3-9

综合题

一、选择题

(1) A.

解　由于 $\mathrm{e}^{\sin t}\sin t$ 是以 2π 为周期的周期函数，所以

$$F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t=-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}(\cos t)$$
$$=-\mathrm{e}^{\sin t}\cos t\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\mathrm{e}^{\sin t}\cdot\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}t,$$

又因为 $\cos^2 t\geqslant 0$，$\mathrm{e}^{\sin t}>0$，所以 $\cos^2 t\mathrm{e}^{\sin t}\geqslant 0$，故 $F(x)>0$，A 正确.

【注】　设 $f(x+T)=f(x)$，且 $f(x)$ 连续，则对任意 $a\in\mathbf{R}$，有

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) B.

解　确定 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内的符号.

由 $|f(x)|\leqslant x^2$，知 $f(0)=0$，且

$$0\leqslant|f'(0)|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|}=0,$$

故 $f'(0)=0$.

由 $f''(x)>0$，知 $f'(x)$ 单调增加，故在区间 $(-\delta,0)$ 和 $(0,\delta)$ 内分别有 $f'(x)<0$ 和 $f'(x)>0$.

因而 $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少，在 $(0,\delta)$ 内单调增加，又 $f(0)=0$，知 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内非负，且仅在 $x=0$ 处 $f(x)=0$，所以 $I=\int_{-\delta}^{\delta}f(x)\mathrm{d}x>0$，故 B 正确.

(3) A.

解　因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以在该区间上 $\sin x$ 单调增加，$\cos x$ 单调减少，而 $\sin x\leqslant x$，故当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\sin(\sin x)<\sin x$，$\cos(\sin x)>\cos x$，故

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1,$$
$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

综上可知，$I_1<1<I_2$，A 正确.

(4) D.

解　依题意，只需判别被积函数的正、负即可，考虑到 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 与 $[-\pi,0]$ 上分别

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】 获取更多考研资源!

非负和非正,有$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin x\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x$. 而

$$\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin x\mathrm{d}x\xlongequal{x=-u}\int_{\pi}^{0}f(-u)\sin(-u)(-\mathrm{d}u)$$
$$=-\int_{0}^{\pi}f(-u)\sin u\mathrm{d}u=-\int_{0}^{\pi}f(-x)\sin x\mathrm{d}x,$$

故
$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}[f(x)-f(-x)]\sin x\mathrm{d}x.$$

由 $f'(x)<0$,知 $f(x)$ 单调减少,故当 $x\in[0,\pi]$ 时,有 $f(x)\leqslant f(-x)$,于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}[f(x)-f(-x)]\sin x\mathrm{d}x<0,$$

故 ① 正确.

又
$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}(\sin x)=f(x)\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin x\mathrm{d}x$$
$$=-\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin x\mathrm{d}x,$$

且由 $f''(x)>0$,知 $f'(x)$ 单调增加,从而 $-f'(x)$ 单调减少. 由 ① 正确,知

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=-\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin x\mathrm{d}x<0,$$

故 ④ 正确,从而 D 正确.

【注】 作为选择题,可用取特殊值法,如对 ①② 取 $f(x)=-x$,对 ①④ 取 $f(x)=\mathrm{e}^{x}$.

(5) D.

解
$$\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}+1}-1).$$

当 $x\to+\infty$ 时,$\mathrm{e}^{-1}(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}+1}-1)$ 与 $\mathrm{e}^{-1}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$ 是等价无穷小,又 $1-\cos\frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{2x^{2}}$ 是等价无穷小,则 $x^{k}(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{-1})$ 与 $\frac{1}{2\mathrm{e}x^{2-k}}$ 是等价无穷小.

当 $k<1$ 时,$2-k>1$,故 $\int_{1}^{+\infty}x^{k}(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{d}x$ 收敛;

当 $k\geqslant1$ 时,$2-k\leqslant1$,$\frac{1}{2\mathrm{e}x^{2-k}}$ 是阶数不高于 $\frac{1}{x}$ 的无穷小,故 $\int_{1}^{+\infty}x^{k}(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{d}x$ 发散.

【注】 结论:$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^{p}}\mathrm{d}x(a>0,p$ 为任意实数),当 $p\leqslant1$ 时,发散;当 $p>1$ 时,收敛于 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$.

(6) C.

解
$$\int_{-b}^{b}f(a-x)\mathrm{d}x=\int_{-b}^{0}f(a-x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{b}f(a-x)\mathrm{d}x.$$

由 $f(x)=f(2a-x)$,得 $f(a+x)=f(a-x)$,则

$$\int_{-b}^{0}f(a-x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=-t}-\int_{b}^{0}f(a+t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{b}f(a-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{b}f(a-x)\mathrm{d}x,$$

故 $\int_{-b}^{b}f(a-x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{b}f(a-x)\mathrm{d}x$. C 正确.

(7) B.

解
$$\lim_{x\to1}\varphi(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^{2}\int_{1}^{x}f(t)\mathrm{d}t}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x\int_{1}^{x}f(t)\mathrm{d}t+x^{2}f(x)}{1}=f(1).$$ B 正确.

(8) A.

解 令 $g(x)=\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$,则

$$g(x^{3})=\int_{0}^{x^{3}}f(t)\mathrm{d}t,g'(x)=f(x),g''(x)=f'(x),$$

故
$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)}{2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2}=\frac{f'(0)}{2}=3,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

即有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{3x^2}=1$，所以$g(x)\sim 3x^2$，$g(x^3)\sim 3(x^3)^2=3x^6$，故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^6}{(3x^2)^3}=\dfrac{1}{9}$.

(9) B.

解　令$t+\dfrac{x}{s}=u$，则$\mathrm{d}u=\dfrac{1}{s}\mathrm{d}x$，故

$$I=\frac{1}{s}\int_0^{s}f\left(t+\frac{x}{s}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{s}\int_t^{2t}f(u)s\mathrm{d}u=\int_t^{2t}f(u)\mathrm{d}u.$$

B正确.

(10) A.

解
$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}.$$

因为$\ln x=\ln[1+(x-1)]\sim x-1(x\to 1)$，所以$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\dfrac{1}{x^p\ln^q x}}{\dfrac{1}{(x-1)^q}}=1$，从而$\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$与$\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x-1)^q}$敛散性相同，故当$q<1$时，$\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$收敛.

当$q<1,p=1$时，$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^q x}=\dfrac{1}{1-q}\ln^{1-q}x\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=\infty$，故发散；

当$q<1,p<1$时，对$\forall\, p<a<1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^p\ln^q x}}{\dfrac{1}{x^a}}=+\infty$，且$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^a}$发散，故$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$发散；

当$q<1,p>1$时，$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}<\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}$，故$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$收敛.

综上所述，当$p>1,q<1$时，积分收敛，A正确.

二、填空题

(1) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{3}, & x<-1,\\ x+1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{5}{3}, & x>1.\end{cases}$

解　$f(x)=\max\{1,x^2\}=\begin{cases}x^2, & x<-1\text{ 或 }x>1,\\ 1, & |x|\leqslant 1,\end{cases}$

积分，得　$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3+C_1, & x<-1,\\ x+C_2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}x^3+C_3, & x>1.\end{cases}$

令$x=0$，则由$F(0)=1$，知$C_2=1$，故当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，$F(x)=x+1$.

又因为原函数$F(x)$处处可导，所以$F(x)$连续，从而有

$$\lim_{x\to(-1)^-}F(x)=\lim_{x\to(-1)^+}F(x)=F(-1),$$
$$\lim_{x\to 1^-}F(x)=\lim_{x\to 1^+}F(x)=F(1),$$

即$\begin{cases}-\dfrac{1}{3}+C_1=-1+1=0,\\ \dfrac{1}{3}+C_3=1+1,\end{cases}$解得$C_1=\dfrac{1}{3},C_3=\dfrac{5}{3}$，故

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{3}, & x\leqslant -1,\\ x+1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{5}{3}, & x>1.\end{cases}$$

(2) $f(x)-f(x_0)$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

解　由于$\int_{x_0}^{x} f(t+\Delta x)\mathrm{d}t \xlongequal{t+\Delta x=u} \int_{x_0+\Delta x}^{x+\Delta x} f(u)\mathrm{d}u$，故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x}[f(t+\Delta x)-f(t)]\mathrm{d}t=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x_0+\Delta x}^{x+\Delta x} f(u)\mathrm{d}u-\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x_0+\Delta x)]=f(x)-f(x_0).$$

【注】 ① $\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 不含 Δx，对 $\Delta x\to 0$ 的极限而言为常数.

② $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x}[f(t+\Delta x)-f(t)]\mathrm{d}t=\lim_{\Delta x\to 0}\int_{x_0}^{x}\frac{f(t+\Delta x)-f(t)}{\Delta x}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{x_0}^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(t+\Delta x)-f(t)}{\Delta x}\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(x_0),$$

以上解法是错误的，一般情况下，积分号与极限号不能任意交换.

(3) $\frac{1}{2}$.

解　曲线与x轴的交点为(0,0),(1,0),(2,0)，在区间[0,1]上，$y<0$；在区间[1,2]上，$y>0$，故所求面积为

$$A=-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

(4) 1.

解　双纽线的极坐标方程为

$$r^2=\cos 2\theta\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{4}\right).$$

如图 3-10 所示，由对称性，知面积 A 为

$$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=1.$$

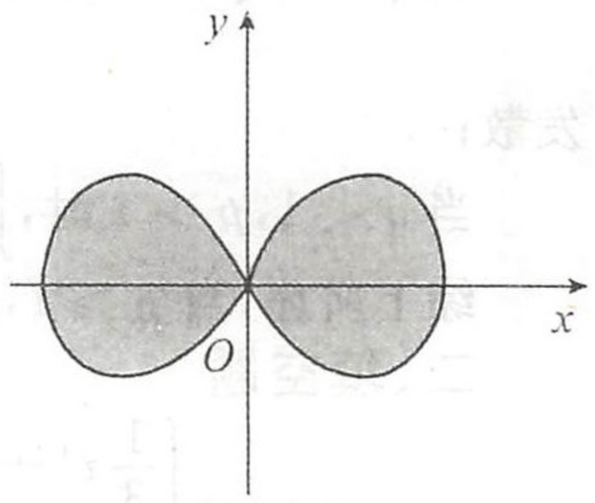


图 3-10

(5) $\frac{(\ln x)^2}{2}$.

解　令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t$，$f'(t)=\frac{\ln t}{t}$，故

$$f(t)=\int f'(t)\mathrm{d}t=\int\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(\ln t)^2+C.$$

由 $f(1)=0$，得 $C=0$，故 $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$.

(6) $$\begin{cases}\sqrt{2}(1-\cos x), & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \sqrt{2}(\cos x-1), & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<0.\end{cases}$$

解　$$f(x)=\int\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int|\sin x|\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}-\sqrt{2}\cos x+C_1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \sqrt{2}\cos x+C_2, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<0.\end{cases}$$

由原函数的可导性，可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处必连续，所以

$$f(0)=0=-\sqrt{2}+C_1=\sqrt{2}+C_2,$$

解得 $C_1=\sqrt{2}$，$C_2=-\sqrt{2}$，故

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}(1-\cos x), & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \sqrt{2}(\cos x-1), & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<0.\end{cases}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

(7) 2.

解　$$g(x)=\int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t=x\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t,$$

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

由 $g(1)=1$，知 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1$. 又 $g'(x)=\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t+2x^2 f(x^2)$，由 $g'(1)=5$，知

$$5=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+2f(1)=1+2f(1),$$

故 $f(1)=2$.

(8) 0.

解
$$I=\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}[f'(2x)]$$
$$=\frac{1}{2}\left[x^2 f'(2x)\Big|_0^1-\int_0^1 2xf'(2x)\mathrm{d}x\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}[f(2x)]=-\frac{1}{2}\left[xf(2x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}f(2)\overset{2x=t}{=\!=}\frac{1}{4}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{4}=0.$$

(9) $\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}$.

解
$$I=\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}(\sin x)=f(x)\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\sin x\mathrm{d}x$$
$$=0-\int_0^\pi \mathrm{e}^{\cos x}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=\mathrm{e}^{\cos x}\Big|_0^\pi=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}.$$

(10) $\frac{\pi}{2}$.

解
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\sin^2 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x\overset{2x=t}{=\!=}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

三、解答题

(1) 解　(Ⅰ)
$$I=\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}x^3 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$$
$$=-\frac{1}{6}(1+x^4)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{6}(1-\sqrt{2}).$$

(Ⅱ)
$$I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x^4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-1}-1),$$

这里 $f(1)=0$.

【注】 积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$，$\int\mathrm{e}^{\pm x^2}\mathrm{d}x$，$\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$\int\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 俗称“积不出来”，即原函数不能用初等函数表达.

(2) 解　令 $\sin^2 x=t$，则 $\sin x=\pm\sqrt{t}$，由 $\sqrt{x}\geqslant 0$，$\sqrt{1-x}\geqslant 0$，可知 $x\geqslant 0$，$1-x\geqslant 0$，故 $0\leqslant x\leqslant 1$，所以 $\sin x\geqslant 0$.

取 $\sin x=\sqrt{t}$，则 $x=\arcsin\sqrt{t}$，$f(t)=\frac{\arcsin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$，故

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$=-\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}(1-x)=-2\int\arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}(\sqrt{1-x})$$
$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{1-x}\mathrm{d}(\arcsin\sqrt{x})$$
$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(3) 解 $I=\int e^{\sin x}\left(x\cos x-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx=\int x\cos x e^{\sin x}dx-\int e^{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$=\int x d(e^{\sin x})+\int e^{\sin x}d\left(-\frac{1}{\cos x}\right)=xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}+\int e^{\sin x}\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}dx$

$=xe^{\sin x}-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}+C.$

(4) 解 $I=\int\frac{e^{-\sin x}\cdot 2\sin x\cos x}{\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]^2}dx=\int\frac{e^{-\sin x}\cdot 2\sin x\cos x}{\left[\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}\right]^2}dx$

$=8\int\frac{e^{-\sin x}(-\sin x)d(-\sin x)}{(1-\sin x)^2}\xlongequal{-\sin x=u}8\int e^u\cdot\frac{u}{(1+u)^2}du$

$=8\int e^u\left[\frac{1}{1+u}-\frac{1}{(1+u)^2}\right]du=8\left[\int\frac{e^u}{1+u}du-\int\frac{e^u}{(1+u)^2}du\right]$

$=8\left(\int\frac{e^u}{1+u}du+\frac{e^u}{1+u}-\int\frac{e^u}{1+u}du\right)+C$

$=\frac{8e^u}{1+u}+C=\frac{8e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C.$

(5) 解 令 $\ln x=t$,则 $x=e^t$,故 $f(t)=f(\ln x)=\frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$,

$I=\int f(x)dx=\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx=-\int\ln(1+e^x)d(e^{-x})$

$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$

$=x-(1+e^{-x})\ln(1+e^x)+C.$

(6) 解 $I=\int_0^1 f(x)dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx$

$=f(1)-\int_0^1 x\arctan(x-1)^2dx$

$=f(1)-\int_0^1(x-1+1)\arctan(x-1)^2d(x-1)$

$=f(1)-\int_0^1(x-1)\arctan(x-1)^2d(x-1)-\int_0^1\arctan(x-1)^2dx$

$=f(1)-\int_0^1(x-1)\arctan(x-1)^2d(x-1)-\int_0^1 f'(x)dx$

$=f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1\arctan(x-1)^2d[(x-1)^2]-[f(1)-f(0)]$

$=-\frac{1}{2}(x-1)^2\arctan(x-1)^2\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x-1)^2\cdot 2(x-1)}{1+(x-1)^4}dx$

$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{1+(x-1)^4}d[(x-1)^4]$

$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln[1+(x-1)^4]\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$

(7) 解 当 $x\to 0$ 时,$\sqrt{1+2x^3}-1\sim\frac{1}{2}\cdot 2x^3=x^3$,又

$\frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{4-x^2u^2}du\xlongequal{xu=t}\frac{1}{2}\int_0^{2x}\sqrt{4-t^2}dt$,

所以 $\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_0^{2x}\sqrt{4-t^2}dt-2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{4-4x^2}\cdot 2-2}{3x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}(-x^2)}{3x^2}=-\frac{1}{3}.$

(8) 解 $\int_0^x tf(t^2-x^2)dt=\frac{1}{2}\int_0^x f(t^2-x^2)d(t^2-x^2)\xlongequal{u=t^2-x^2}\frac{1}{2}\int_{-x^2}^0 f(u)du$,

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

即 $-\frac{1}{2}\int_0^{-x^2} f(u)\mathrm{d}u = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

令 $t=-x^2$，得 $-\frac{1}{2}\int_0^t f(u)\mathrm{d}u = \frac{-t}{1-t} - \frac{1}{2}\ln(1-t)$，两边同时对 t 求导，得

$$f(t) = \frac{2}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t} = \frac{1+t}{(1-t)^2},\ t \leqslant 0,$$

即 $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2},\ x \leqslant 0$.

由 $f'(x) = \frac{x+3}{(1-x)^3}$，知 $x=-3$ 为 $(-\infty,0]$ 上的唯一驻点，且可判别当 $x=-3$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(-3) = -\frac{1}{8}$.

(9) 解　在已知等式两端同时对 x 求导，得

$$g[f(x)]f'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x - f(x),$$

故 $xf'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x - f(x)$，即 $f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = (2+x)\mathrm{e}^x$. 解一阶线性微分方程，得

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(2+x)\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] = \frac{1}{x}(x^2\mathrm{e}^x + C).$$

又由 $f(2)=1$，知 $\frac{1}{2}(4\mathrm{e}^2 + C) = 1$，解得 $C = 2-4\mathrm{e}^2$，故 $f(x) = x\mathrm{e}^x + \frac{2-4\mathrm{e}^2}{x}\ (x>0)$.

(10) 证　$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{2x-t=u} \int_{2x}^x (2x-u)f(u)\mathrm{d}(-u)$

$$= \int_x^{2x}(2x-u)f(u)\mathrm{d}u = 2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - \int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u,$$

故 $$2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - \int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\arctan x^2.$$

等式两端同时对 x 求导，得

$$2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u + 2x[f(2x)\cdot 2 - f(x)] - [2xf(2x)\cdot 2 - xf(x)] = \frac{x}{1+x^4},$$

即 $2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - xf(x) = \frac{x}{1+x^4}$. 令 $x=1$，得

$$2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2} + f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

故 $\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}$.

由推广的积分中值定理，有 $\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u = f(\xi_1)(2-1) = \frac{1}{2}$，即 $f(\xi_1) = \frac{1}{2}(1<\xi_1<2)$.

又 $f(1) = \frac{1}{2}$，由罗尔定理，至少存在一点 $\xi \in (1,\xi_1) \subset (1,2)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

(11) 解　$$\int_0^x f(t-x)\mathrm{d}t \xlongequal{t-x=u} \int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u.$$

由已知，有 $\mathrm{e}^{-x} - \frac{x^2}{2} = 1 + \int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u$. 两边同时对 x 求导，得 $-\mathrm{e}^{-x} - x = f(-x)$，于是

$$f(x) = x - \mathrm{e}^x,\ x \in (-\infty,+\infty).$$

由 $f'(x) = 1-\mathrm{e}^x = 0$，解得 $x=0$. 当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(0) = -1$ 为极大值.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$，故在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 的最大值为 $f(0) = -1$，没有最小值.

(12) 解　因为 $f(x)$ 是偶函数，所以只需求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最值即可.

由 $f'(x) = 2x(2-x^2)\mathrm{e}^{-x^2} = 0$，得驻点 $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{2}$.

当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\sqrt{2}$ 时，$f'(x)<0$. 又

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -2\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty} + t\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

比较 $f(0)=0$，$f(\sqrt{2}) = 1+\mathrm{e}^{-2}$，得最小值为 0，最大值为 $1+\mathrm{e}^{-2}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(13) 证法 1　利用夹逼准则，当 $x\in[0,1]$ 时，有 $0\leqslant\dfrac{x^n}{1+x}\leqslant x^n$.

根据定积分的性质，得 $0\leqslant\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n+1}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=0$.

证法 2　利用推广的积分中值定理，有

$$\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{(1+\xi)(1+n)}(0<\xi<1),$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\xi)(1+n)}=0.$$

【注】　推广的积分中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(14) 解　令 $x_n=\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}$，则

$$\frac{n}{n+1}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right).$$

由定积分的定义，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)\dfrac{1}{n}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=\dfrac{1}{\ln 2}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，

由夹逼准则，知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{\ln 2}$.

(15) 解　令 $x_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$，则

$$x_n=\sqrt[n]{\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+(n-1)}{n}},$$

即 $\ln x_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$，故

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=2\ln 2-1=\ln\frac{4}{\mathrm{e}}.$$

综上可知，原极限 $=\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

(16) 解　由于 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，记 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=A$（$A$ 为常数）.

对已知等式两端分别积分，得

$$A=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-A\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x,$$

其中 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2}$. 又

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=1+\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{+\infty}=1-\ln 2,$$

故 $A=\dfrac{\pi}{2}-(1-\ln 2)A$，解得 $A=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2(2-\ln 2)}$.

(17) 证　令 $\tan x=t$，则 $x=\arctan t$，故

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t<\int_0^1\frac{t^n}{2t}\mathrm{d}t=\frac{t^n}{2n}\Big|_0^1=\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-2}(n\geqslant 2).$$

又　$a_n=\int_0^1\dfrac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t>\int_0^1\dfrac{t^n}{1+1^2}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2(n+1)}$，

故 $\dfrac{1}{2(n+1)}<a_n<\dfrac{1}{2n-2}$. 证毕.

(18) 解　利用分部积分法，得

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$I_n=\frac{1}{2}\int_0^1\ln^n x\,\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}x^2\ln^n x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 n\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}\cdot x^2\,\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{n}{2}\int_0^1 x\ln^{n-1}x\,\mathrm{d}x=-\frac{n}{2}I_{n-1}\left(\text{这里利用了}\lim_{x\to0^+}x^2\ln^n x=0\right).$$

由递推公式，有 $I_n=-\frac{n}{2}\left(-\frac{n-1}{2}\right)I_{n-2}=\left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n-1}{2}\right)\left(-\frac{n-2}{2}\right)I_{n-3}$
$$=\cdots=\left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n-1}{2}\right)\left(-\frac{n-2}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)I_0,$$

而 $I_0=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，故 $I_n=\frac{(-1)^n}{2^n}n!\cdot\frac{1}{2}=\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$.

(19) 解　（Ⅰ）当 $n\geqslant1$ 时，

$$I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\int\frac{2nx^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1},$$

故
$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\left[(2n-1)I_n+\frac{x}{(x^2+a^2)^n}\right],$$

其中 $I_1=\int\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$.

$$(\text{Ⅱ})I=\int\frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+2}+\int\frac{1}{[(x+1)^2+1]^2}\mathrm{d}(x+1)$$
$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2+1}+\int\left\{\frac{1}{(x+1)^2+1}-\frac{(x+1)^2}{[(x+1)^2+1]^2}\right\}\mathrm{d}(x+1)$$
$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2+1}+\int\frac{1}{1+(x+1)^2}\mathrm{d}(x+1)+\frac{1}{2}\int(x+1)\mathrm{d}\left[\frac{1}{(x+1)^2+1}\right]$$
$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2+1}+\arctan(x+1)+\frac{x+1}{2[(x+1)^2+1]}-\frac{1}{2}\arctan(x+1)+C$$
$$=\frac{x-2}{2(x^2+2x+2)}+\frac{1}{2}\arctan(x+1)+C.$$

(20) 证　由 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x=0$，得驻点 $x_1=1,x_2=k\pi(k=1,2,\cdots)$.

在 $x=k\pi$ 两侧，$f'(x)<0$，可知 $x=k\pi$ 不是极值点；

在 $x=1$ 两侧，$f'(x)$ 由正变为负，故 $x=1$ 是唯一极大值点，从而有 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调增加，在 $[1,+\infty)$ 上单调减少，即在 $x=1$ 处取最大值，即 $f(1)=\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值.

又
$$f(1)=\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1(t-t^2)t^{2n}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)},$$

即 $f(1)\leqslant\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$，故不等式成立.

(21) 证
$$\int_a^b f''(x)(x-a)^2\mathrm{d}x=\int_a^b(x-a)^2\mathrm{d}[f'(x)]$$
$$=(x-a)^2f'(x)\Big|_a^b-\int_a^b2(x-a)f'(x)\mathrm{d}x=-2\int_a^b(x-a)\mathrm{d}[f(x)]$$
$$=-2\left[(x-a)f(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

所以
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)^2\mathrm{d}x.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

【注】 此题也可以有如下证明:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a) = (x-a)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b (x-a)f'(x)\mathrm{d}x\\ &= -\int_a^b (x-a)f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}[(x-a)^2]\\ &= -\frac{1}{2}\left[(x-a)^2 f'(x)\Big|_a^b - \int_a^b (x-a)^2 f''(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2 f''(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这里将$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$写成$\int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a)$的技巧值得注意.又如下例:

设$f(x)$在$[0,1]$上有连续导数,且$f(0)=f(1)=0$,证明:

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{4}, M = \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|f'(x)|\}.$$

证

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)\\ &= f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\\ &= 0 - \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right||f'(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot M\mathrm{d}x = M\int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x\\ &= M\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right] = \frac{M}{4}.\end{aligned}$$

(22) 证 由已知,$y=f(x)$的图形如图3-11所示.

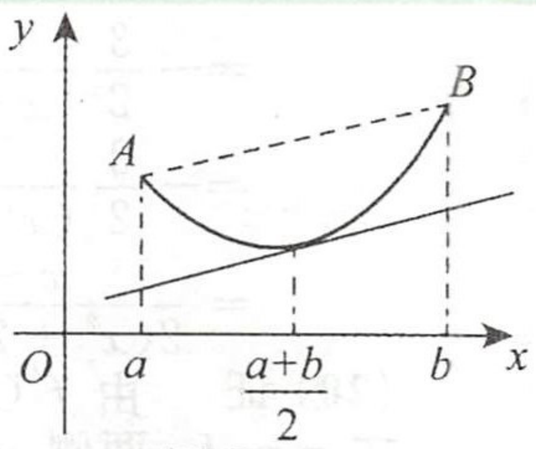


图3-11

在点$\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$处切线方程为

$$y = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right),$$

曲线的切线在曲线的下方,故

$$f(x) \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right),$$

对上式两端分别积分,得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &> f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + 0,\end{aligned}$$

即$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

又AB直线段在曲线$y=f(x)$上方,故$f(x) \leqslant f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$,

对上式两端分别积分,得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &< f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x\\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a),\end{aligned}$$

即$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

综上所述,所证不等式成立.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

(23) 证 令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则$F(a)=0, F(b)=0$.又

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x\mathrm{d}[F(x)] = xF(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b F(x)\mathrm{d}x = 0,$$

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

由推广的积分中值定理，得 $-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x = -F(\xi)(b-a) = 0(a<\xi<b)$，故 $F(\xi)=0$.

$F(x)$ 在 $[a,\xi]$，$[\xi,b]$ 上应用罗尔定理，有

$$F'(\xi_1)=0, F'(\xi_2)=0(a<\xi_1<\xi, \xi<\xi_2<b),$$

即 $f(\xi_1)=0, f(\xi_2)=0$.

【注】 此题也可采用反证法.

由已知条件存在 $\xi_1\in(a,b)$，使得 $f(\xi_1)=0$，否则对 $\forall x\in(a,b)$，$f(x)\neq 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负，与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾.

又存在 $\xi_2\in(a,b)$，$\xi_2\neq\xi_1$，使得 $f(\xi_2)=0$，否则 $(x-\xi_1)f(x)$ 在 $[a,\xi_1]$ 和 $[\xi_1,b]$ 上恒正或恒负，则 $\int_a^b (x-\xi_1)f(x)\mathrm{d}x\neq 0$ 与 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\xi_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾，故存在不同的 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

(24) 证　（Ⅰ）令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在 $[0,x]$ 上可导，应用拉格朗日中值定理，并注意到 $F(0)=0$，存在 $\theta\in(0,1)$，使得 $F(x)-F(0)=F'(0+\theta x)x$，即

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = x[f(\theta x)-f(-\theta x)].$$

（Ⅱ）将（Ⅰ）中式子变形为 $\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}$，

两端分别取极限，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}$，则

$$\text{左边}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f(-x)-f(0)}{-x}\right]=f'(0)=A,$$

$$\text{右边}=\lim_{x\to 0^+}\theta\left[\frac{f(\theta x)-f(0)}{\theta x}+\frac{f(-\theta x)-f(0)}{-\theta x}\right]$$
$$=2\lim_{x\to 0^+}\theta f'(0)=2A\lim_{x\to 0^+}\theta,$$

故 $A=2A\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$，由 $A\neq 0$，可得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$.

(25) 证　（Ⅰ）依题设，需证存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $x_0 f(x_0)=\int_{x_0}^1 f(t)\mathrm{d}t$.

注意到 $$\left[x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\right]'=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t-xf(x),$$

令辅助函数 $F(x)=x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(0)=F(1)=0$.

由罗尔定理，存在一点 $x_0\in(0,1)$，使 $F'(x_0)=0$，即 $x_0 f(x_0)=\int_{x_0}^1 f(t)\mathrm{d}t$.

（Ⅱ）令 $\varphi(x)=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t-xf(x)$，$x\in(0,1)$，则

$$\varphi'(x)=-f(x)-f(x)-xf'(x)=-2f(x)-xf'(x).$$

由已知条件 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，知 $\varphi'(x)<0$，即 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格单调减少，故（Ⅰ）中的 x_0 是 $\varphi(x)$ 唯一零点.

(26) 解　（Ⅰ）由已知 $f'(1)=0$，即

$$(a^2x^2-4ax+3)\Big|_{x=1}=a^2-4a+3=0,$$

解得 $a=3$，$a=1$. 又

$$f''(x)=2a^2x-4a,\ f''(1)=2a^2-4a,$$

当 $a=3$ 时，$f''(1)=6>0$；当 $a=1$ 时，$f''(1)=-2<0$.

由已知 $f(1)=0$ 为极小值，故 $a=3$，所以 $f'(x)=9x^2-12x+3$，于是

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$f(x)=f(1)+\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t=0+\int_1^x(9t^2-12t+3)\mathrm{d}t=3x^3-6x^2+3x.$$

令 $f'(x)=0$，得 $f(x)$ 的另一个驻点为 $x=\frac{1}{3}$，且 $f''\left(\frac{1}{3}\right)=-6<0$，所以 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$.

(Ⅱ) $$\int_0^1\sqrt{f(ut)}\mathrm{d}t\xlongequal[t=\frac{1}{u}x]{ut=x}\int_0^u\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{u}\mathrm{d}x=\frac{1}{u}\int_0^u\sqrt{f(x)}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{u}\int_0^1\sqrt{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{u}\int_0^1\sqrt{\frac{4}{9}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3u},u\in(0,1),$$

又显然有 $\int_0^1\sqrt{f(ut)}\mathrm{d}t\geqslant 0$，故原不等式成立.

(27) 解 (Ⅰ) 利用换元法.

$$\int_0^{nT}xf(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=nT-t}nT\int_0^{nT}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{nT}tf(t)\mathrm{d}t,$$

移项得 $\int_0^{nT}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{nT}{2}\int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x.$

又 $f(x+T)=f(x)$，故 $\int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$，所以 $\int_0^{nT}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{n^2T}{2}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$

(Ⅱ) $|\cos x|$ 是以 π 为周期的偶函数，由(Ⅰ)知

$$I=\int_0^{n\pi}x|\cos x|\mathrm{d}x=\frac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n^2\pi}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\mathrm{d}x\right]=n^2\pi.$$

【注】 结论：设 $f(x+T)=f(x)$，则 $\int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.(证明见《李林考研数学系列高等数学辅导讲义》)

(28) 证 由积分中值定理，有

$$\lim_{a\to0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{a\to0^+}\frac{1}{2a}[f(\xi+a)-f(\xi-a)],-a\leqslant\xi\leqslant a.$$

$f(x)$ 在 $[\xi-a,\xi+a]$ 上使用拉格朗日中值定理，

$$f(\xi+a)-f(\xi-a)=2af'(\eta),\xi-a<\eta<\xi+a.$$

而 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故

$$\text{原式}=\lim_{a\to0^+}f'(\eta)=\lim_{a\to0^+}f'(\xi)=f'(0).$$

【注】 此题也可利用积分换元法及洛必达法则证明，证明如下：

$$\int_{-a}^{a}f(t+a)\mathrm{d}t\xlongequal{t+a=u}\int_0^{2a}f(u)\mathrm{d}u,\int_{-a}^{a}f(t-a)\mathrm{d}t\xlongequal{t-a=u}\int_0^{-2a}f(u)\mathrm{d}u,$$

故

$$\text{原式}=\lim_{a\to0^+}\frac{\int_0^{2a}f(u)\mathrm{d}u+\int_0^{-2a}f(u)\mathrm{d}u}{4a^2}=\lim_{a\to0^+}\frac{2f(2a)-2f(-2a)}{8a}$$

$$=\lim_{a\to0^+}\frac{2f'(2a)+2f'(-2a)}{4}=f'(0).$$

(29) 解 (Ⅰ) $y=a\sqrt{x}$，$y=\ln\sqrt{x}$ 的导数分别为

$$y'=\frac{a}{2\sqrt{x}},y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x}.$$

如图 3-12 所示，由于两曲线在 (x_0,y_0) 处有公切线，则

$$\begin{cases}a\sqrt{x_0}=\ln\sqrt{x_0},\\ \dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2x_0},\end{cases}$$

解得 $x_0=\mathrm{e}^2,a=\mathrm{e}^{-1}$，切点为 $(\mathrm{e}^2,1)$.

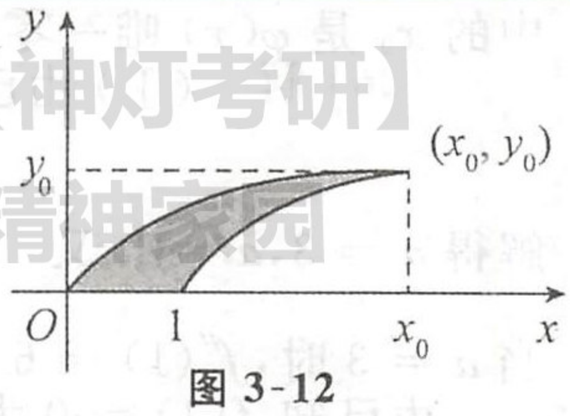


图 3-12

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

（Ⅱ）$V=\int_0^{e^2}\pi\left(\frac{\sqrt{x}}{e}\right)^2\mathrm{d}x-\int_1^{e^2}\pi(\ln\sqrt{x})^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{e^2}\int_0^{e^2}x\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}\int_1^{e^2}(\ln x)^2\mathrm{d}x$

$=\frac{\pi}{2}e^2-\frac{\pi}{4}[x(\ln x)^2-2x\ln x+2x]\Big|_1^{e^2}=\frac{\pi}{2}e^2-\frac{\pi}{2}(e^2-1)=\frac{\pi}{2}.$

(30) 证　如图 3-13 所示，依题设，需证明存在唯一的 ξ，使得

$$S_1(\xi)-kS_2(\xi)=0.$$

设 $F(x)=S_1(x)-kS_2(x)$，即证明存在唯一的 ξ，使 $F(\xi)=0$. 又 $S_1(x)=(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，

$$S_2(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t-(b-x)f(x),$$

则 $S_1(a)=0, S_2(b)=0$. 于是

$$F(a)=-kS_2(a)=-k\left[\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-(b-a)f(a)\right]$$

$$=-k\int_a^b[f(t)-f(a)]\mathrm{d}t,$$

$$F(b)=f(b)(b-a)-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b[f(b)-f(t)]\mathrm{d}t.$$

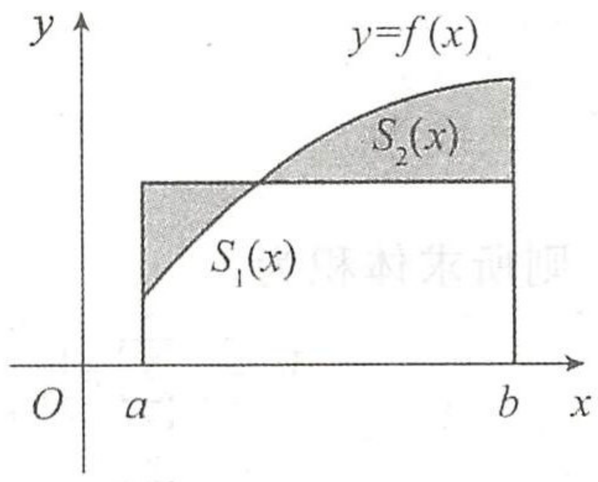


图 3-13

又 $f'(x)>0$，可知 $f(a)<f(x)<f(b)$. 又由 $k>0$，可知 $F(a)<0, F(b)>0$. 由连续函数的零点定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $\frac{S_1(\xi)}{S_2(\xi)}=k$.

再证 ξ 的唯一性，由

$$F'(x)=S_1'(x)-kS_2'(x)$$

$$=f'(x)(x-a)+f(x)-f(x)-k[-f(x)-f'(x)(b-x)+f(x)]$$

$$=f'(x)(x-a)+kf'(x)(b-x)>0,$$

可知 $F(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加，故 ξ 是唯一的.

(31) 解　$\int_0^2 x\sqrt{12-x^2u^2}\mathrm{d}u\overset{xu=t}{=\!=\!=}\int_0^{2x}\sqrt{12-t^2}\mathrm{d}t,$

故 $4y=\int_0^{2x}\sqrt{12-t^2}\mathrm{d}t$. 两边同时对 x 求导，得

$$y'=\frac{1}{4}\sqrt{12-4x^2}\cdot 2=\sqrt{3-x^2}.$$

曲线的全长为

$$s=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$$

$$\overset{x=2\sin t}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\mathrm{d}t$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\mathrm{d}t=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=2\times\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(32) 解　如图 3-14 所示，D 的边界方程分别为

$$x=1-\sqrt{1-y^2}, x=y(0\leqslant y\leqslant 1).$$

任取 $[y,y+\mathrm{d}y]\subset[0,1]$，则

$$\mathrm{d}V=\{\pi[2-(1-\sqrt{1-y^2})]^2-\pi(2-y)^2\}\mathrm{d}y$$

$$=2\pi[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2]\mathrm{d}y,$$

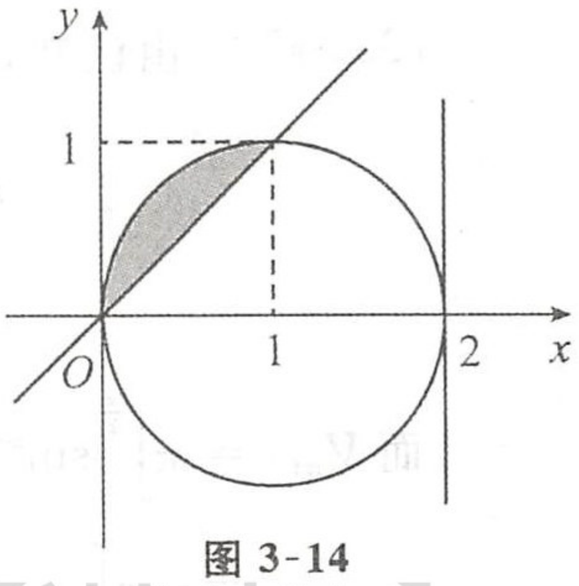


图 3-14

故 $V=\int_0^1 2\pi[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2]\mathrm{d}y$

$$=2\pi\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y+\frac{1}{3}(1-y)^3\right]\Big|_0^1=2\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right).$$

【注】　此题也可以用如下计算：

$$V=2\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y+2\pi\int_0^1(1-y)^2\mathrm{d}(1-y)=2\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right).$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(33) 解　先求 $f(x)=e^{-x}\sqrt{\sin x}(x\geqslant 0)$ 的定义域.

由 $\sin x\geqslant 0$,知 $x\in[2k\pi,(2k+1)\pi](k=0,1,2,\cdots)$,如图 3-15 所示.

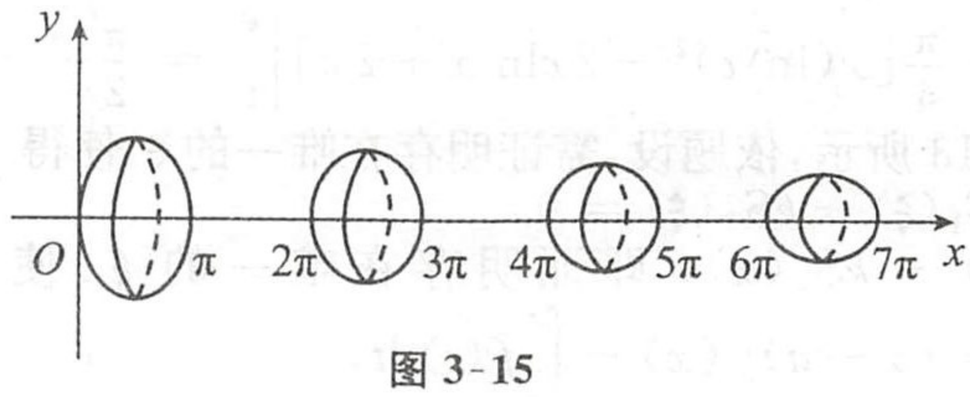


图 3-15

则所求体积为

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}\pi\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-2x}\sin x\,dx\xlongequal{x=t+2k\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\pi\int_{0}^{\pi}e^{-2(2k\pi+t)}\sin t\,dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\pi e^{-4k\pi}\int_{0}^{\pi}e^{-2t}\sin t\,dt=\frac{\pi(1+e^{-2\pi})}{5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}e^{-4k\pi}(\text{等比级数求和})$$

$$=\frac{\pi(1+e^{-2\pi})}{5}\cdot\frac{1}{1-e^{-4\pi}}=\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}.$$

(34) 解　(Ⅰ)如图 3-16 所示,

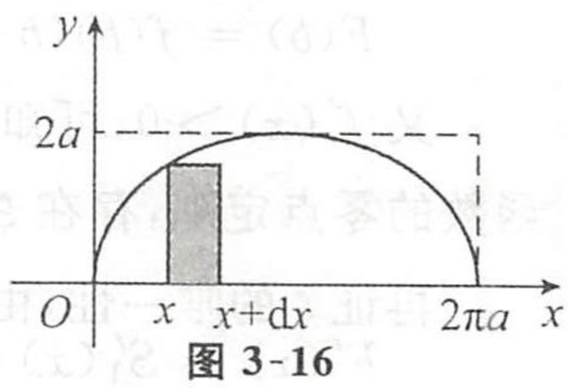


图 3-16

$$V_x=\pi\int_0^{2\pi a}y^2\,dx=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)\,dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=8\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}dt$$

$$=32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 u\,du=5\pi^2a^3,$$

$$V_y=2\pi\int_0^{2\pi a}xy\,dx=2\pi\int_0^{2\pi}a^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2\,dt$$

$$=2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t+t\cos^2 t-\sin t+2\sin t\cos t-\sin t\cos^2 t)\,dt=6\pi^3a^3.$$

(Ⅱ)　$$V_{y=2a}=\pi(2a)^2\cdot 2\pi a-\int_0^{2\pi a}\pi(2a-y)^2\,dx$$

$$=8\pi^2a^3-\pi\int_0^{2\pi}[2a-a(1-\cos t)]^2\cdot a(1-\cos t)\,dt$$

$$=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t)^2(1-\cos t)\,dt$$

$$=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^2 t(1+\cos t)\,dt$$

$$=8\pi^2a^3-\pi^2a^3=7\pi^2a^3.$$

(35) 解　由已知,$V_n=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{\frac{n}{2}}x\right)^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$,

$$\pi S_n=\pi\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\xlongequal{x=\sin t}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cdot\cos^2 t\,dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,dt=V_n-V_{n+2}.$$

而 $$V_{n+2}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,dt=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}t\,d(\cos t)$$

$$=-\pi\left[\cos t\cdot\sin^{n+1}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot(n+1)\sin^n t\cdot\cos t\,dt\right]$$

$$=\pi(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cdot(1-\sin^2 t)\,dt=(n+1)V_n-(n+1)V_{n+2},$$

整理得 $V_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}V_n$,所以 $\pi S_n=V_n-V_{n+2}=V_n-\frac{n+1}{n+2}V_n=\frac{1}{n+2}V_n$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi S_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

(36) 解　建立如图 3-17 所示的坐标系，圆的方程为

$$x^2+(y-R)^2=R^2.$$

用微元法. 任取$[y,y+\mathrm{d}y]\subset[0,2R]$，将球从水中取出恰好离开水面时，薄片$[y,y+\mathrm{d}y]$行程为$2R$，其中在水中移动的距离为$y$，由于球与水的密度相等，所以重力与浮力的合力为零，故球在水中移动所做功为零；在水面以上移动的距离为$2R-y$，故克服重力做功的微元为

$$\mathrm{d}W=\rho g(2R-y)\pi x^2\mathrm{d}y=\rho g\pi(2R-y)[R^2-(y-R)^2]\mathrm{d}y,$$

则 $W=\int_0^{2R}\mathrm{d}W=\rho g\int_0^{2R}\pi(2R-y)[R^2-(y-R)^2]\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\pi\rho gR^4.$

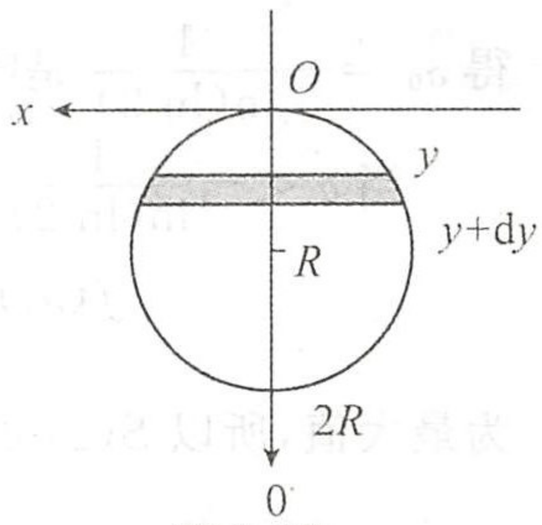


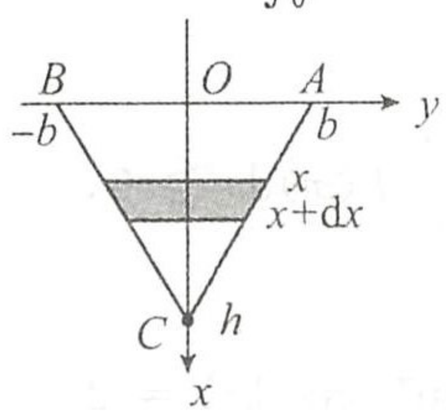
图 3-17

(37) 解　如图 3-18(a) 中直线 AC 的方程为 $y=\frac{b(h-x)}{h}$. 用微元法，任取$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,h]$，则 $\mathrm{d}P_1=2\rho gxy\mathrm{d}x=\frac{2\rho gb}{h}(h-x)x\mathrm{d}x$，故

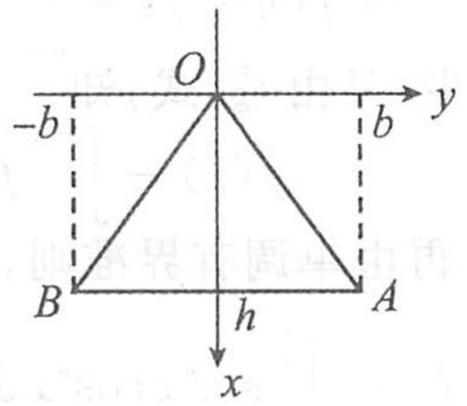
$$P_1=\int_0^h\mathrm{d}P_1=\int_0^h\frac{2\rho gb}{h}(h-x)x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\rho gbh^2.$$

如图 3-18(b) 中直线 OA 方程为 $y=\frac{bx}{h}$，则 $\mathrm{d}P_2=2\rho gxy\mathrm{d}x=\frac{2\rho gb}{h}x^2\mathrm{d}x$，故

$$P_2=\int_0^h\mathrm{d}P_2=\int_0^h\rho g\,\frac{2b}{h}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\rho gbh^2.$$



(a)



(b)

图 3-18

所以 $\frac{P_2}{P_1}=2$，即 $P_2=2P_1$.

(38) 解　曲线的图形如图 3-19 所示.

由已知及对称性，只需考虑 $x\in[0,2]$ 的情况，

$$y=3-|x^2-1|=\begin{cases}x^2+2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 4-x^2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

用微元法. 任取$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,1]$，$[0,1]$ 上体积记为 V_1，$[1,2]$ 上体积记为 V_2，则 $\mathrm{d}V_1=\pi\{3^2-[3-(x^2+2)]^2\}\mathrm{d}x$.

同理 $\mathrm{d}V_2=\pi\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}\mathrm{d}x$，故

$$V=2(V_1+V_2)=2\pi\int_0^1(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x+2\pi\int_1^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x=\frac{448\pi}{15}.$$

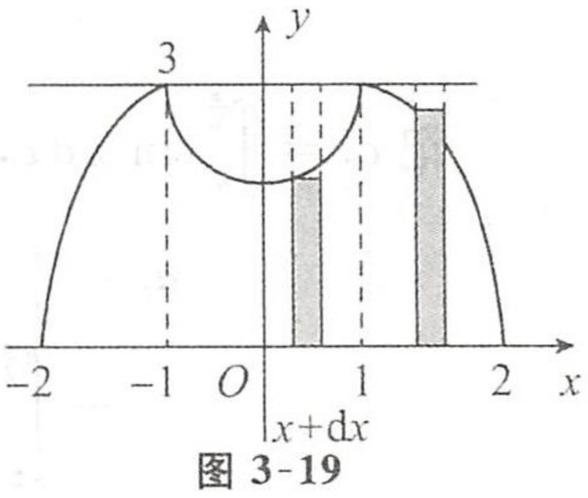


图 3-19

(39) 解　心形线 $r=4(1+\cos\theta)$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=4(1+\cos\theta)\cos\theta,\\ y=4(1+\cos\theta)\sin\theta.\end{cases}$$

心形线的图形如图 3-20 所示，则

$$V=\int_0^8\pi y^2\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\pi\cdot 16(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\cdot 4(-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2\sin^3\theta(1+2\cos\theta)\mathrm{d}\theta=160\pi.$$

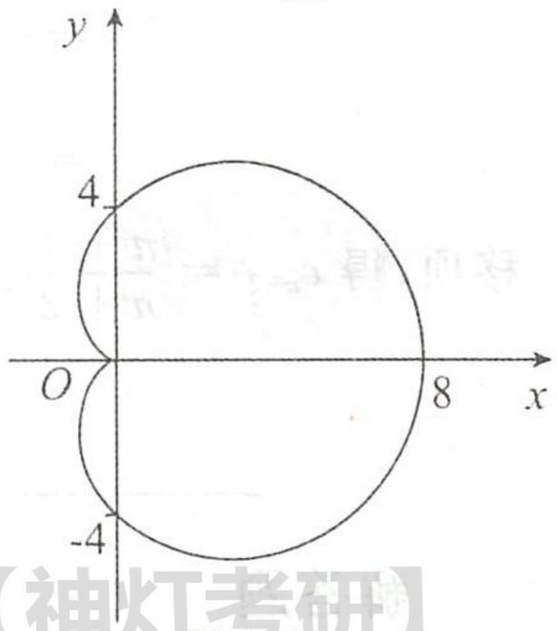


图 3-20

【注】　极坐标下计算旋转体体积：先将极坐标方程化为参数方程，再用直角坐标下公式计算.

(40) 解　(Ⅰ) 依题设，

$$S(\alpha)=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{\alpha+1}}=\int_2^{+\infty}(\ln x)^{-\alpha-1}\mathrm{d}(\ln x)$$

$$=-\frac{1}{\alpha}(\ln x)^{-\alpha}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\alpha(\ln 2)^{\alpha}}.$$

(Ⅱ) 令 $f(\alpha)=\alpha(\ln 2)^{\alpha}$，则由

$$f'(\alpha)=(\ln 2)^{\alpha}+\alpha\cdot(\ln 2)^{\alpha}\cdot\ln(\ln 2)=(\ln 2)^{\alpha}[1+\alpha\ln(\ln 2)]=0,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

得 $\alpha_0=-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$ 是唯一驻点.

当 $\alpha<-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$ 时,$f'(\alpha)>0$;当 $\alpha>-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$ 时,$f'(\alpha)<0$,故

$$f(\alpha_0)=-\frac{1}{\ln(\ln 2)}(\ln 2)^{-\frac{1}{\ln(\ln 2)}}=-\frac{1}{\ln(\ln 2)}\cdot\frac{1}{(\ln 2)^{\frac{1}{\ln(\ln 2)}}}$$

为最大值,所以 $S(\alpha)$ 的最小值为 $\frac{1}{f(\alpha_0)}=-\ln(\ln 2)\cdot(\ln 2)^{\frac{1}{\ln(\ln 2)}}$.

(41) 证 $$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]+\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x. \quad ①$$

由于 $f(x)$ 单调减少,所以

$$f(k+1)=\int_k^{k+1}f(k+1)\mathrm{d}x\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_k^{k+1}f(k)\mathrm{d}x=f(k),$$

故 $$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x+\int_1^{n}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

所以$\{a_n\}$ 单调减少.又由 ① 式,知

$$f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

故$\{a_n\}$ 有下界 0.再由单调有界准则,知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

(42) 解 $$b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n x\mathrm{d}x=2^{-n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n 2x\mathrm{d}(2x)=2^{-n-1}\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x$$

$$=2^{-n-1}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=2^{-n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x.$$

记 $c_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$,则 $b_n=2^{-n}c_n$,

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cdot\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\mathrm{d}t=c_n-c_{n+2}.$$

又 $$c_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}t\mathrm{d}(\cos t)$$

$$=-\left[\cos t\cdot\sin^{n+1}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot(n+1)\sin^n t\cdot\cos t\mathrm{d}t\right]$$

$$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t=(n+1)c_n-(n+1)c_{n+2},$$

移项,得 $c_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}c_n$,故 $a_n=c_n-c_{n+2}=\frac{1}{n+2}c_n=\frac{1}{n+2}\cdot 2^n b_n$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2^n}=0.$$

拓展题

解答题

(1) 解 (Ⅰ)曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=r\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta,\\ y=r\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta,\end{cases}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\frac{\cos\theta+\cos 2\theta}{-\sin\theta-\sin 2\theta},\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=1-\sqrt{2}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，有 $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$，$y=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$，故切线 T 的方程为

$$y-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})\left[x-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\right],$$

即 $y=(1-\sqrt{2})x+1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅱ）所围图形为如图 3-21 所示的阴影部分. 曲边三角形 AOP 的面积为

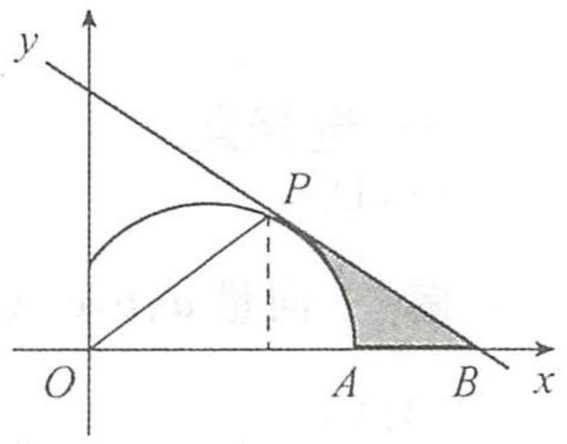


图 3-21

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{3}{16}\pi+\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

由（Ⅰ）知，切线的方程为 $y=(1-\sqrt{2})x+1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，令 $y=0$，得 x 轴上截距为 $x=2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$，故所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\times\frac{1+\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{9}{8}-\frac{3\pi}{16}+\frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

(2) 解　（Ⅰ）
$$\begin{aligned}V&=4\cdot 2\int_{-1}^{y}2\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\xlongequal{y=\sin t}16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y}\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=8\arcsin y+8y\sqrt{1-y^2}+4\pi(\mathrm{m}^3).\end{aligned}$$

（Ⅱ）由于 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=16\sqrt{1-y^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，故

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{y=0}=\frac{1}{16\sqrt{1-y^2}}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{y=0}=\frac{1}{16}\times 0.16=0.01(\mathrm{m/min}).$$

（Ⅲ）
$$\begin{aligned}W&=4\rho g\int_{-1}^{1}4\sqrt{1-y^2}\cdot(1-y)\mathrm{d}y\\&=4\rho g\left(\int_{-1}^{1}4\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}4\sqrt{1-y^2}\cdot y\mathrm{d}y\right)\\&=4\rho g\int_{-1}^{1}4\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y-0=8\rho g\pi(\mathrm{J}).\end{aligned}$$

(3) 解　$y=\sqrt{x}$ 与 $y=ax$ 的交点为 $(0,0)$，$\left(\frac{1}{a^2},\frac{1}{a}\right)(a>0)$. 故

$$V_x=\pi\int_0^{\frac{1}{a^2}}(\sqrt{x})^2\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^2\cdot\frac{1}{a^2}=\frac{\pi}{6a^4},$$

$$V_y=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{a^2}\right)^2\cdot\frac{1}{a}-\pi\int_0^{\frac{1}{a}}x^2(y)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{3a^5}-\pi\int_0^{\frac{1}{a}}y^4\mathrm{d}y=\frac{2\pi}{15a^5}.$$

由已知 $V_x=V_y$，即 $\frac{\pi}{6a^4}=\frac{2\pi}{15a^5}$，解得 $a=\frac{4}{5}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】 获取更多考研资源!

李林考研数学系列

第四章 空间解析几何

基础题

一、选择题

(1) D.

解 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=0$,即 $\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&0&2\\0&k&-3\end{vmatrix}=0$,解得 $k=-2$.

(2) C.

解 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,-2,1)$,$L_2$ 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

设两直线夹角为 φ,则 $\cos\varphi=\dfrac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$,故 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

(3) C.

解 直线 L 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&3&2\\2&-1&-10\end{vmatrix}=(-28,14,-7),$$

显然 $\boldsymbol{s}$ 与平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(4,-2,1)$ 平行,故直线 L 垂直于平面 π,C 正确.

(4) A.

解 方程 $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ 所表示的曲面,可视为在 xOy 面上的双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转单叶双曲面.

【注】 考研大纲要求能识别常用的二次曲面,如:

① 单叶双曲面:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

② 双叶双曲面:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$.

③ 椭圆抛物面:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=cz$.

④ 双曲抛物面(马鞍面):$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=cz$.

(5) D.

解 由题意及非零向量的加、减法,可知四边形的对角线相等(如图 4-1),故 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$,即 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$,D 正确.

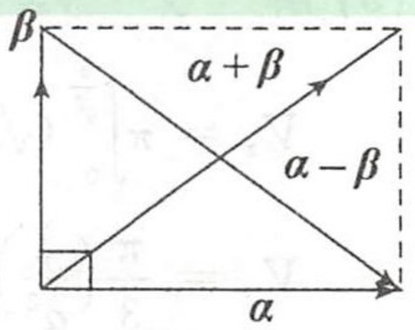


图 4-1

二、填空题

(1) 1.

解 设 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,由 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,得

$$-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&1&0\\x&y&z\end{vmatrix}=z\boldsymbol{i}+(-3z)\boldsymbol{j}+(3y-x)\boldsymbol{k},$$

则有 $z=-1$,$3y-x=0$,于是 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{i}+3x\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. 又

$$r=|\boldsymbol{c}|=\sqrt{x^2+(3x)^2+1}=\sqrt{1+10x^2},$$

可知当 $x=0$ 时,r 取得最小值 1.

(2)(14,10,2).

解 由 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$,知 $\boldsymbol{r}\,/\!/\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 令

$$\boldsymbol{r}=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=k\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&1\\1&-2&3\end{vmatrix}=(-7k,-5k,-k).$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

由于 $\mathrm{Prj}_c r=\dfrac{r\cdot c}{|c|}=\dfrac{-21k}{3}=-7k=14$，故 $k=-2$，从而 $r=(14,10,2)$.

(3) $16x-14y-11z-65=0$.

解　直线的方向向量

$$s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=-16i+14j+11k,$$

故所求平面的法向量 $n=(-16,14,11)$，因此平面方程为

$$-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0,$$

即 $16x-14y-11z-65=0$.

(4) $\dfrac{\sqrt{30}}{30}$.

解　$$d=\frac{|2\times1-1\times(-1)+5\times2-12|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+5^2}}=\frac{\sqrt{30}}{30}.$$

(5) $\dfrac{\sqrt{341}}{11}$.

解　直线 L 过点 $P_0(0,0,-1)$，其方向向量 $s=(3,3,2)$. 又 $\overrightarrow{P_0P}=(1,-1,1)$，

$$\overrightarrow{P_0P}\times s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-5i+j+6k,$$

故所求距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_0P}\times s|}{|s|}=\dfrac{\sqrt{341}}{11}$.

【注】　点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $L:\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ 的距离为

$$d=\frac{|s\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|s|}=\frac{\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

其中 $P_1(x_1,y_1,z_1)\in L$，$s=(l,m,n)$.

(6) 1.

解　先求过直线 L_2 的平面 π，使平面 π 平行于直线 L_1. 设过直线 L_2 的平面束方程 $\pi:(x+2y)+\lambda(z+2)=0$，即 $x+2y+\lambda z+2\lambda=0$.

由平面束 π 平行于直线 L_1，知 $n\perp s$，其中 $n=(1,2,\lambda)$，$s=(0,1,1)$，故

$$n\cdot s=(1,2,\lambda)\cdot(0,1,1)=2+\lambda=0,$$

得 $\lambda=-2$，所求平面 π 为 $x+2y-2z-4=0$，故 L_1 上的点 $(1,0,0)$ 到平面 π 的距离为

$$d=\frac{|1+0+0-4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=1.$$

【注】　直线 $L_1:\begin{cases}x-1=0,\\ y=z\end{cases}$ 化为对称式方程为 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$，故其方向向量为 $s=(0,1,1)$，且过点 $(1,0,0)$.

(7) $\begin{cases}7x-y=11,\\ z=0,\end{cases}$　$\begin{cases}7x-y=11,\\ z=1.\end{cases}$

解　直线 L 在 $z=0$ 上的投影为直线，由 L 的方程中消去 z，得 $7x-y=11$，故 L 在 $z=0$ 上的投影直线方程为 $\begin{cases}7x-y=11,\\ z=0.\end{cases}$

同理，L 在平面 $z=1$ 上的投影直线方程为 $\begin{cases}7x-y=11,\\ z=1.\end{cases}$

(8) $x-3y-2z=0$.

解　用平面的点法式方程，需求出平面的法向量 n，由已知，$\overrightarrow{AB}=(-3,-3,3)$，$\overrightarrow{AC}=(0,-2,3)$，则 $n\perp\overrightarrow{AB}$，$n\perp\overrightarrow{AC}$，故

$$n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}=-3i+9j+6k,$$

故所求平面方程为 $-3(x-1)+9(y-1)+6(z+1)=0$，即 $x-3y-2z=0$.

(9) $x^2+y^2+2z^2=4$.

解　设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是已知曲线上的一点，点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 绕 z 轴转到点 $M(x,y,z)$，此

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

时 $z=z_0$. 又点 M 到 z 轴的距离与点 M_0 到 z 轴的距离相等，故 $\sqrt{x^2+y^2}=|x_0|$，即

$$x_0=\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z_0=z,$$

从而旋转曲面方程为 $x^2+y^2+2z^2=4$.

【注】 一般地，曲线 $\begin{cases}f(x,z)=0,\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴与 x 轴旋转一周所得的曲面方程分别为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,\ f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0.$$

曲线 $\begin{cases}f(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴与 y 轴旋转一周所得的曲面方程分别为

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0,\ f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0.$$

曲线 $\begin{cases}f(y,z)=0,\\ x=0\end{cases}$ 绕 y 轴与 z 轴旋转一周所得的曲面方程分别为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0,f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

(10) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1,\\ z=0.\end{cases}$

解 由 $\begin{cases}z=2x^2+3y^2,\\ z=12-x^2-3y^2\end{cases}$ 消去 z，可得曲线在 xOy 面上的投影柱面方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,$$

故它在 xOy 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1,\\ z=0.\end{cases}$

【注】 求空间曲线 $L:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程，一般方法是由上面方程组消去 z，得 $H(x,y)=0$，则曲线 L 在 xOy 面上的投影曲线是

$$\begin{cases}H(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$$

类似地，可求得空间曲线在 yOz 面、xOz 面上的投影曲线方程.
求投影曲线是数学一常考内容.

(11) $\dfrac{5}{2}$.

解 所求平行四边形的面积为

$$\begin{aligned}A&=|(\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta})\times(3\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})|=|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}+6\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}|\\&=|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}-6\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=|-5\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|\\&=5|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=5|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\sin(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

【注】 以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为邻边的平行四边形的面积等于 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的向量积的模.

(12) 1.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{\alpha}+x\boldsymbol{\beta}|-|\boldsymbol{\alpha}|}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{(\boldsymbol{\alpha}+x\boldsymbol{\beta})\cdot(\boldsymbol{\alpha}+x\boldsymbol{\beta})-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{x(|\boldsymbol{\alpha}+x\boldsymbol{\beta}|+|\boldsymbol{\alpha}|)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2x\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+x^2\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}{2|\boldsymbol{\alpha}|x}=\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}|}+0\\&=|\boldsymbol{\beta}|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=2\times\frac{1}{2}=1.\end{aligned}$$

三、解答题

(1) 解 由于所求平面与平面 $x+y+z=9$ 平行，故可设其为平面 $\pi:x+y+z+D=0$，又因平面 π 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切，所以球心 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离为

$$\frac{|0+0+0+D|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=2,$$

解得 $D=\pm2\sqrt{3}$，故所求平面方程为

$$x+y+z+2\sqrt{3}=0 \text{ 或 } x+y+z-2\sqrt{3}=0.$$

(2) 解 过直线 L 的平面束方程为

$$(3x-2y+2)+\lambda(x-2y-z+6)=0,$$

即

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$(3+\lambda)x-(2+2\lambda)y-\lambda z+(2+6\lambda)=0.$$

由已知，

$$d=\frac{|(3+\lambda)-2(2+2\lambda)-\lambda+(2+6\lambda)|}{\sqrt{(3+\lambda)^2+(2+2\lambda)^2+\lambda^2}}=1,$$

即 $|2\lambda+1|=\sqrt{6\lambda^2+14\lambda+13}$，化简得

$$\lambda^2+5\lambda+6=0,$$

解得 $\lambda=-2,\lambda=-3$，故所求平面 π 的方程为

$$x+2y+2z-10=0 \text{ 或 } 4y+3z-16=0.$$

【注】 求过直线的平面方程，常利用平面束方程进行求解.

(3) 解 过直线 L 的平面束方程为

$$(x-z+4)+\lambda(x+5y+z)=0,$$

即

$$(1+\lambda)x+5\lambda y+(\lambda-1)z+4=0.$$

由于平面 π 与平面 π_1 夹角为 $45°$，即两平面的法向量夹角为 $45°$，故

$$\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(1+\lambda)+5\lambda\cdot(-4)+(\lambda-1)\cdot(-8)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}\cdot\sqrt{(1+\lambda)^2+(5\lambda)^2+(\lambda-1)^2}}$$

$$=\frac{9-27\lambda}{9\sqrt{27\lambda^2+2}}=\frac{1-3\lambda}{\sqrt{27\lambda^2+2}},$$

解得 $\lambda=0,\lambda=-\frac{4}{3}$，故平面 π 的方程为

$$x-z+4=0 \text{ 或 } x+20y+7z-12=0.$$

(4) 解 用平面束方程求出经过直线 L 且与平面 π 垂直的平面，该平面与平面 π 的方程联立，便可得投影直线方程.

将直线 L 变形为一般式：$\begin{cases}x+3y-4=0,\\2x-3z+1=0,\end{cases}$ 故过 L 的平面束方程为

$$x+3y-4+\lambda(2x-3z+1)=0,$$

即

$$(1+2\lambda)x+3y-3\lambda z+\lambda-4=0,$$

此平面与平面 π 垂直，故

$$(1+2\lambda,3,-3\lambda)\cdot(2,3,3)=11-5\lambda=0,$$

解得 $\lambda=\frac{11}{5}$，于是与平面 $\pi:2x+3y+3z-8=0$ 垂直的平面方程为

$$\left(1+\frac{22}{5}\right)x+3y-\frac{33}{5}z+\frac{11}{5}-4=0,$$

即 $9x+5y-11z-3=0$，故所求投影直线方程为

$$\begin{cases}9x+5y-11z-3=0,\\2x+3y+3z-8=0.\end{cases}$$

(5) 解 依题设，解题关键是求所求直线的方向向量 $s=(m,n,p)$. 由已知，

$$\begin{cases}(m,n,p)\cdot(4,5,6)=0,\\(m,n,p)\cdot(7,8,9)=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}4m+5n+6p=0,\\7m+8n+9p=0.\end{cases}$$

任取其一组非零解均可作为方向向量，不妨取 $s=(1,-2,1)$，故所求直线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}.$$

(6) 解法 1 依题意，所求直线的方向量为

$$s=(1,-1,1)\times(2,1,3)=(-4,-1,3).$$

由已知，所求直线 L 既在 L_1 与 L 所确定的平面内，又在 L_2 与 L 所确定的平面内，即直线 L 为两平面的交线.

直线 L_1 与 L 所确定的平面的法向量为

$$(1,-1,1)\times(-4,-1,3)=(-2,-7,-5);$$

直线 L_2 与 L 所确定的平面的法向量为

$$(2,1,3)\times(-4,-1,3)=(6,-18,2).$$

综上可知，所求直线为

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\begin{cases}2(x+2)+7(y-3)+5(z+1)=0,\\3(x+4)-9y+(z-4)=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2x+7y+5z-12=0,\\3x-9y+z+8=0.\end{cases}$$

解法 2　分别在直线 L_1,L_2 上任取一点，则使该两点之间的连线，平行于所求直线的方向向量为

$$s=(1,-1,1)\times(2,1,3)=(-4,-1,3).$$

将 L_1 与 L_2 写成参数式方程的形式，有

$$x_1=-2+t,\ y_1=3-t,\ z_1=-1+t,$$
$$x_2=-4+2u,\ y_2=u,\ z_2=4+3u,$$

其中 t,u 为参数. 由

$$\frac{x_1-x_2}{-4}=\frac{y_1-y_2}{-1}=\frac{z_1-z_2}{3},$$

解得 $t=2,\ u=0$.

所求直线为点(0,1,1)与点(−4,0,4)的连线，故所求直线为

$$\frac{x-0}{-4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{3}.$$

(7) 解　分别求出公垂线与 L_1 及 L_2 确定的平面，将二者联立即为所求.

如图 4-2 所示，设 L 为所求公垂线，则 L 在由 L_1 与 L 确定的平面 π_1 上，L 也在由 L 和 L_2 确定的平面 π_2 上，因此 L 的方向向量为

$$s=(2,1,0)\times(1,0,1)=(1,-2,-1),$$

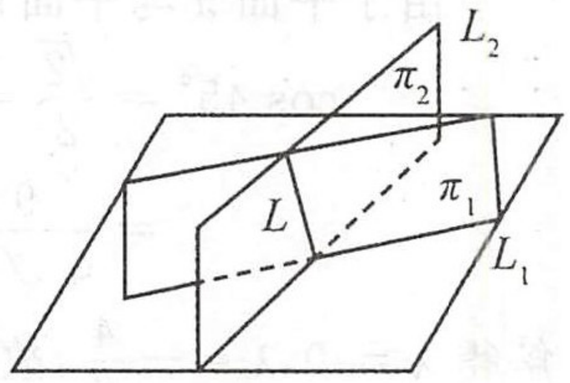


图 4-2

故平面 π_1 与平面 π_2 的法向量分别为

$$n_1=s\times(2,1,0)=(1,-2,-1)\times(2,1,0)=(1,-2,5),$$
$$n_2=s\times(1,0,1)=(1,-2,-1)\times(1,0,1)=(-2,-2,2),$$

平面 π_1 和平面 π_2 的方程分别为

$$(x-3)-2(y-0)+5(z-1)=0$$

和

$$-2(x+1)-2(y-2)+2(z-0)=0,$$

即

$$\pi_1:x-2y+5z-8=0,$$
$$\pi_2:x+y-z-1=0,$$

故公垂线方程为 $\begin{cases}x-2y+5z-8=0,\\x+y-z-1=0.\end{cases}$

【注】　对于有关直线、平面较复杂的题目，可先根据题中条件作出直线、平面相互位置的草图，结合几何图形找出直线方向向量、平面法向量之间的关系，从而解决问题.

(8) 解　已知直线的参数方程为 $\begin{cases}x=1,\\y=t,\\z=2t+1\end{cases}$ (t 为参数)，其上任一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 绕 z 轴旋转至某一点 $M(x,y,z)$ 时，有

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=x^2+y^2=1+t^2,\\z=z_0=2t+1,\end{cases}$$

消去 t，得曲面上任一点坐标满足的关系式，即旋转曲面方程为

$$x^2+y^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^2=1,$$

它是一个单叶双曲面.

【注】　求空间曲线 $L:x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面方程，一般方法为固定一个 t，即得 L 上一点 $M(x(t),y(t),z(t))$，点 M 到 z 轴的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}.$$

点 M 绕 z 轴旋转一周所得圆周为

$$\begin{cases}x^2+y^2=x^2(t)+y^2(t),\\z=z(t).\end{cases}$$

上式即为旋转曲面上任一点满足的关系式，消去 t 便得旋转曲面的直角坐标方程. 求旋转曲面方程是数学一的重要考点.

(9) 解　设 $M_0(x_0,y_0,x_0)$ 是 L 上任一点，定直线 $\begin{cases}x=2,\\y=3\end{cases}$ 平行于 z 轴，所以当点 M_0 转

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

到点 $M(x,y,z)$ 时，有

$$z = z_0, \tag{1}$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=(x_0-2)^2+(y_0-3)^2. \tag{2}$$

又 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在 L 上，故 $x_0=3z_0+4, y_0=4z_0+6$，

$$(x_0-2)^2=(3z_0+2)^2, \tag{3}$$

$$(y_0-3)^2=(4z_0+3)^2. \tag{4}$$

将 ①③④ 式代入 ② 式，得曲面方程

$$(x-2)^2+(y-3)^2=(3z+2)^2+(4z+3)^2,$$

即

$$x^2+y^2-25z^2-4x-6y-36z=0.$$

拓展题

解答题

解　设动点为 (x,y,z).

（Ⅰ）$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=|z-4|,$$

即 $x^2+y^2+8z=16$，它是以 z 轴为旋转轴的旋转抛物面.

（Ⅱ）$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2},$$

即

$$3(x^2+y^2+z^2)+4x+6y+8z=29,$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{116}{9},$$

它是以点 $\left(-\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{3}\right)$ 为球心，$\frac{2\sqrt{29}}{3}$ 为半径的球面.

（Ⅲ）动点 (x,y,z) 到 x 轴的距离为 $\sqrt{y^2+z^2}$，故

$$\sqrt{x^2+y^2+(z-5)^2}=\sqrt{y^2+z^2},$$

即 $25+x^2=10z$，它是母线平行于 y 轴的抛物柱面.

（Ⅳ）动点 (x,y,z) 到 yOz 面的距离为 $|x|$，故 $\sqrt{y^2+z^2}=2|x|$，即

$$4x^2-y^2-z^2=0,$$

它是以坐标原点为顶点，x 轴为对称轴的圆锥面.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

第五章　多元函数微分学及其应用

基础题

一、选择题

(1) B.

解　$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin|x|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x},$$
不存在，
$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin y^2}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y}=0,$$
故 B 正确.

(2) C.

解　$f(x,y)$ 在某点偏导数存在不一定在该点连续，排除 B. 也不能推得 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$ 存在，例如：设
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$
可知 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都存在，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)$ 不存在，故排除 A.

由 $f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ 存在，只能推得当固定 $y=y_0$ 时，$f(x,y)$ 在 x_0 的邻域内有定义. 而
$$\mathring{U}(x_0,y_0)=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$
是圆域，故 D 不正确.

由 $f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ 存在，知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$，C 正确.

(3) C.

解　令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$，则 $F(0,1,1)=0$.

$F(x,y,z)$ 对 x,y,z 分别求偏导，得 $F'_x=y+e^{xz}\cdot z$，$F'_y=x-\dfrac{z}{y}$，$F'_z=-\ln y+e^{xz}\cdot x$，

故　$$F'_x(0,1,1)=2\neq 0,\ F'_y(0,1,1)=-1\neq 0,\ F'_z(0,1,1)=0,$$
根据隐函数存在定理，知 $F(x,y,z)=0$ 在点 $(0,1,1)$ 的某个邻域内能确定隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$，故 C 正确.

(4) C.

解　由已知，$f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处取得极大值，由极值的必要条件，知
$$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0,$$
故 C 正确.

(5) A.

解　由
$$\begin{cases}f'_x=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0,\\ f'_y=e^{2x}(2y+2)=0,\end{cases}$$
得驻点 $P\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$. 由于 $A=f''_{xx}(P)=2e$，$B=f''_{xy}(P)=0$，$C=f''_{yy}(P)=2e$，故
$$AC-B^2=2e\cdot 2e-0>0,\ A=2e>0,$$
所以 $f\left(\dfrac{1}{2},-1\right)=-\dfrac{e}{2}$ 为极小值，A 正确.

(6) B.

解　偏导数存在，不能推得可微，故 A 不正确.

曲线 $\begin{cases}x=x,\\ y=0,\\ z=f(x,0),\end{cases}$ 视 x 为参数，故切向量为 $(1,0,f'_x(0,0))=(1,0,1)$，B 正确.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为

$$(f'_x(0,0),f'_y(0,0),-1)=(1,1,-1),$$

故 C 不正确.

偏导数存在不能推出二重极限必存在，故 D 不正确.

(7) D.

解　由于 $f'_x=\dfrac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}$，$f'_y=\dfrac{e^x}{(x-y)^2}$，故 $f'_x+f'_y=\dfrac{e^x}{x-y}=f$，D 正确.

(8) B.

解　设方程 $F(ax-bz,ay-cz)=0$ 确定的隐函数为 $z=z(x,y)$，则其切平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},-1\right)$.

方程两边同时对 x,y 求偏导，得 $\begin{cases}F'_1\left(a-b\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2\left(0-c\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0,\\ F'_1\left(0-b\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+F'_2\left(a-c\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0,\end{cases}$ 解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{aF'_1}{bF'_1+cF'_2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{aF'_2}{bF'_1+cF'_2}.$$

设 $\boldsymbol{l}=(b,c,a)$，由于

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{abF'_1}{bF'_1+cF'_2}+\frac{caF'_2}{bF'_1+cF'_2}+(-a)=\frac{abF'_1+caF'_2-a(bF'_1+cF'_2)}{bF'_1+cF'_2}=0,$$

故 B 正确.

二、填空题

(1) $\dfrac{2}{3}\ln 2$.

解　由于函数在点 $(3,0)$ 处连续，故极限存在，且

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(3+e^0)}{\sqrt{3^2+0^2}}=\frac{2}{3}\ln 2.$$

(2) 0.

解　利用不等式 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$ 求解.

由于当 $x\to\infty,y\to\infty$ 时，有

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{|x|+|y|}{|xy|}=\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\to 0,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left|\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|=0$，从而原极限 $=0$.

(3) $e^{-\frac{1}{2}}$.

解　$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 0}}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 0}}\left[\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{-2x}\right]^{\frac{x}{x+y}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(4) $dx+(1+2\ln 2)dy$.

解　$$\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\cdot\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right],$$

故 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=1$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=1+2\ln 2$，于是

$$dz\Big|_{(1,1)}=dx+(1+2\ln 2)dy.$$

(5) 47.

解　$F'(x)=f'_1+f'_2(f'_1+2f'_2)$. 由于 $f[1,f(1,2)]=f(1,2)$，$f'_1(1,2)=f'_x(1,2)=3$，$f'_2(1,2)=f'_y(1,2)=4$，

故 $$\begin{aligned}F'(1)&=f'_1(1,2)+f'_2(1,2)[f'_1(1,2)+2f'_2(1,2)]\\&=3+4\times(3+8)=47.\end{aligned}$$

(6) $\dfrac{1}{2e}dx-\dfrac{1}{2}dy$.

解　由 $x=e,y=0$，知 $z=1$. 令 $F(x,y,z)=ze^{y+z}-x$，则

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{-1}{e^{y+z}(1+z)}=\frac{1}{e^{y+z}(1+z)}=\frac{z}{x(1+z)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{ze^{y+z}}{e^{y+z}(1+z)}=-\frac{z}{1+z},$$

故 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(e,0)}=\frac{1}{2e}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(e,0)}=-\frac{1}{2}$，所以 $\left.dz\right|_{(e,0)}=\frac{1}{2e}dx-\frac{1}{2}dy$.

(7) $\frac{f'_xF'_t-f'_tF'_x}{F'_t+f'_tF'_y}$.

解 由已知条件，视为方程组确定 $y=y(x)$，$t=t(x)$，方程两边同时对 x 求导，得

$$\frac{dy}{dx}=f'_x+f'_t\frac{dt}{dx},\ F'_x+F'_y\cdot\frac{dy}{dx}+F'_t\frac{dt}{dx}=0,$$

两式消去 $\frac{dt}{dx}$，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'_xF'_t-f'_tF'_x}{F'_t+f'_tF'_y}.$$

(8) $\frac{G'_tf'_x-G'_xf'_t}{G'_yf'_t+G'_t}$.

解 令 $F(x,y,t)=f(x,t)-y=0$，则 $\begin{cases}F(x,y,t)=0,\\G(x,y,t)=0\end{cases}$ 确定 $y=y(x)$，$t=t(x)$.

方程组两边同时对 x 求导，得

$$\begin{cases}F'_x+F'_y\frac{dy}{dx}+F'_t\frac{dt}{dx}=f'_x+f'_t\frac{dt}{dx}-\frac{dy}{dx}=0,\\G'_x+G'_y\frac{dy}{dx}+G'_t\frac{dt}{dx}=0,\end{cases}$$

解方程组，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{G'_tf'_x-G'_xf'_t}{G'_yf'_t+G'_t}.$$

(9) $-\frac{1}{x^2}f'-\frac{y}{x^3}f''+e^xg''_{12}\cos y$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'+e^xg'_1$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f'-\frac{y}{x^3}f''+e^xg''_{12}\cos y$.

(10) $f''_{11}(1,1)+f'_1(1,1)-f'_2(1,1)$.

解 $\frac{dy}{dx}=f'_1e^x-f'_2\sin x$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(f''_{11}e^x-f''_{12}\sin x)e^x+f'_1e^x-(f''_{21}e^x-f''_{22}\sin x)\sin x-f'_2\cos x,$$

故 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f''_{11}(1,1)+f'_1(1,1)-f'_2(1,1)$.

(11) $-\frac{1}{2}(dx+dy)$.

解 等式两边同时对 x,y 求偏导，得

$$\begin{cases}e^{2yz}\cdot 2y\frac{\partial z}{\partial x}+1+\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\e^{2yz}\left(2z+2y\frac{\partial z}{\partial y}\right)+2y+\frac{\partial z}{\partial y}=0.\end{cases}$$

当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时，$z=0$，代入方程组，解得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac12,\frac12)}=-\frac{1}{2},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac12,\frac12)}=-\frac{1}{2},$$

故 $\left.dz\right|_{(\frac12,\frac12)}=-\frac{1}{2}(dx+dy)$.

(12) 4.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y\sin xy}{1+(xy)^2}$，

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,2)}=\left(\frac{2\sin 2x}{1+4x^2}\right)'\Big|_{x=0}=\left.\frac{4(1+4x^2)\cos 2x-16x\sin 2x}{(1+4x^2)^2}\right|_{x=0}=4.$$

【注】 这里先将 $y=2$ 代入再对 x 求导.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

(13) $\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C$($C$ 为任意常数).

解　由已知，$\frac{\partial z}{\partial x}=x^2+2xy-y^2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2-2xy-y^2$，故

$$z=\int(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+\varphi(y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2+\varphi(y).$$

又
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2-2xy+\varphi'(y)=x^2-2xy-y^2,$$

得 $\varphi'(y)=-y^2$，积分得 $\varphi(y)=-\frac{1}{3}y^3+C$，其中 C 为任意常数，故

$$z(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C.$$

(14) $\frac{-z\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}}{(1+z)^3}$.

解　已知方程两边同时对 x,y 求偏导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-\mathrm{e}^{-x^2}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+\mathrm{e}^{-y^2}=0.$$

上两式解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z\mathrm{e}^{-x^2}}{1+z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z\mathrm{e}^{-y^2}}{1+z}$，故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot(1+z)-z\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+z)^2}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{(1+z)^2}\cdot\left(\frac{-z\mathrm{e}^{-y^2}}{1+z}\right)=\frac{-z\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}}{(1+z)^3}.$$

(15) $f'_1-\frac{1}{y^2}f'_2+xyf''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2-\frac{y}{x^2}g',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y\left(xf''_{11}-\frac{x}{y^2}f''_{12}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2+\frac{1}{y}\left(xf''_{21}-\frac{x}{y^2}f''_{22}\right)-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

$$=f'_1-\frac{1}{y^2}f'_2+xyf''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''.$$

【注】　此题 g' 不能写成 g'_x.

(16) $4x+2y-z-6=0$，$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}$.

解　令 $F(x,y,z)=z-x^2-y^2+1$，则法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F'_x(P),F'_y(P),F'_z(P))=(-4,-2,1),$$

故切平面方程为
$$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0,$$

即
$$4x+2y-z-6=0.$$

法线方程为
$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}.$$

(17) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{-3}$，$x-3y-3z+3=0$.

解　由 $\begin{cases}x^2+y^2=10,\\ x^2+z^2=10\end{cases}$ 确定函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$，视 x 为参数，故曲线 L 的切线的方向向量为 $\boldsymbol{T}=(1,y'(x),z'(x))$.

已知方程组两边同时对 x 求导，得 $\begin{cases}2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,\\ 2x+2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}$ 将 $x=3,y=1,z=1$ 代入上方程组，解得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-3$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-3$，所以 $\boldsymbol{T}=(1,-3,-3)$，故切线方程为 $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{-3}$，

法平面方程为
$$(x-3)-3(y-1)-3(z-1)=0,$$

即
$$x-3y-3z+3=0.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

【注】 求空间曲线的切线的方向向量时，视为参数方程处理.

(18) 2.

解 令 $P=\dfrac{x+ky}{(x+y)^2}$，$Q=\dfrac{y}{(x+y)^2}$，依题意，有$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，则

$$\frac{0-y\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4}=\frac{k(x+y)^2-(x+ky)\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4},$$

比较两边分子，得 $-2y=(k-2)x-ky$，解得 $k=2$.

(19) $i-j$.

解 函数 $f(x,y)$ 在 $P(1,-2)$ 处增加最快的方向是梯度方向，由已知，

$$\mathbf{grad}\ f(1,-2)=(f'_x(1,-2),f'_y(1,-2))=(1,-1),$$

故所求方向为 $i-j$.

(20) $\dfrac{2}{9}(1,2,-2)$.

解 $$\mathbf{grad}\ u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}),$$

故 $$\mathbf{grad}\ u(1,2,-2)=\frac{2}{9}(1,2,-2).$$

三、解答题

(1) 解 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'_1+f'_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f'_3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}. \tag{①}$$

方程 $\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 两边同时对 x 求导，得 $\mathrm{e}^{xy}\left(y+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{1-xy}. \tag{②}$$

方程 $\mathrm{e}^z-xz=0$ 两边同时对 x 求导，得 $\mathrm{e}^z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z-x\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$，解得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z}{xz-x}. \tag{③}$$

将 ②③ 代入 ①，得 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'_1+\frac{y^2}{1-xy}f'_2+\frac{z}{xz-x}f'_3.$$

(2) 解 方程组两边同时对 x 求导，得

$$\begin{cases}2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=3,\\ 2-3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}$$

解方程组，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}3-2x & 2z\\ -2 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2y & 2z\\ -3 & 5\end{vmatrix}}=-\frac{10x-4z-15}{2(5y+3z)},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}2y & 3-2x\\ -3 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2y & 2z\\ -3 & 5\end{vmatrix}}=-\frac{6x+4y-9}{2(5y+3z)}.$$

(3) 解 设 S 上任一点为 (x,y,z)，则 $(0,0,0)$ 到 (x,y,z) 的距离的平方为

$$d^2=x^2+y^2+z^2.$$

令 $L=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2-z^2-1]$，则

$$\begin{cases}L'_x=2x+2\lambda(x-y)=0, & ①\\ L'_y=2y-2\lambda(x-y)=0, & ②\\ L'_z=2z-2\lambda z=0, & ③\\ L'_\lambda=(x-y)^2-z^2-1=0. & ④\end{cases}$$

由 ① 和 ②，得 $x=-y$，由 ③ 得 $z=0$ 或 $\lambda=1$.

若 $\lambda=1$，由 ①②，知 $x=y=0$，与 ④ 矛盾，舍去，故 $z=0$. 由 ④，可得 $x^2=\dfrac{1}{4}$，解得驻点 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right),\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$，故所求最短距离为

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资料

$$d=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(4) 解　依题意，平面与柱面的交线在xOy面的上方，故归纳为求$z=5\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)$在条件$x^2+y^2=1$下的极值.

利用拉格朗日乘数法，令$L=5\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)+\lambda(x^2+y^2-1)$，则

$$\begin{cases}L'_x=-\frac{5}{3}+2\lambda x=0,\\ L'_y=-\frac{5}{4}+2\lambda y=0,\\ L'_\lambda=x^2+y^2-1=0,\end{cases}$$

解方程组，得$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right),\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

根据题设的实际意义，存在最小值，比较$z\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)=\frac{35}{12}$，$z\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)=\frac{85}{12}$，知距离最短的点为$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12}\right)$.

(5) 解　在$xy=4$上任取一点$P(x,y)$，则点P到直线$2x+y=1$的距离为

$$d=\frac{|2x+y-1|}{\sqrt{5}},$$

只需求$d^2=\frac{(2x+y-1)^2}{5}$的最小值.

利用拉格朗日乘数法，令$L=\frac{1}{5}(2x+y-1)^2+\lambda(xy-4)$，则

$$\begin{cases}L'_x=\frac{4}{5}(2x+y-1)+\lambda y=0,\\ L'_y=\frac{2}{5}(2x+y-1)+\lambda x=0,\\ L'_\lambda=xy-4=0,\end{cases}$$

解方程组，得驻点$(\sqrt{2},2\sqrt{2}),(-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$. 比较

$$d(\sqrt{2},2\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{5}}(4\sqrt{2}-1),\ d(-\sqrt{2},-2\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{5}}(1+4\sqrt{2}),$$

得最短距离为$\frac{1}{\sqrt{5}}(4\sqrt{2}-1)$.

(6) 解　（Ⅰ）在$D:x^2+y^2<16$内. 由$\begin{cases}z'_x=3x^2-6x=0,\\ z'_y=-6y=0,\end{cases}$得驻点$(0,0),(2,0)$.

（Ⅱ）在$D:x^2+y^2=16$上.

利用拉格朗日乘数法，令$L=x^3-3x^2-3y^2+\lambda(x^2+y^2-16)$，则

$$\begin{cases}L'_x=3x^2-6x+2\lambda x=0,\\ L'_y=-6y+2\lambda y=0,\\ L'_\lambda=x^2+y^2-16=0,\end{cases}$$

解得$(0,\pm4),(\pm4,0)$.

（Ⅲ）比较大小

$$z(0,0)=0,\ z(2,0)=-4,\ z(0,4)=-48,$$
$$z(0,-4)=-48,\ z(4,0)=16,\ z(-4,0)=-112,$$

得最大值为$z(4,0)=16$.

【注】　① 在$D:x^2+y^2=16$上，考虑到$z=x^3-3x^2-3y^2$中含x^2+y^2，可以化为一元函数极值问题.

将$y^2=16-x^2$代入$z=x^3-3x^2-3y^2$，得$z=x^3-48(-4\leqslant x\leqslant 4)$.

又由$\frac{dz}{dx}=3x^2=0$，解得$x=0$，则可得$y=\pm4$. 又因为$x=\pm4$时，$y=0$，所以在D边界上可能的最值点有$(0,4),(0,-4),(4,0),(-4,0)$. 比较大小

$$z(0,0)=0,\ z(2,0)=-4,\ z(0,4)=-48,$$
$$z(0,-4)=-48,\ z(4,0)=16,\ z(-4,0)=-112,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

得最大值为 $z(4,0)=16$.

② 求一元函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最值时，若可导函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有唯一极值点 P，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上，在点 P 处取得最值，但对二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上，此结论不一定成立.

此例，在 D 内有两个驻点 $(0,0),(2,0)$，则 $z''_{xx}=6x-6, z''_{xy}=0, z''_{yy}=-6$.

对点 $(0,0)$，有 $A=-6, B=0, C=-6$，则 $AC-B^2=36>0, A=-6<0$，故 $(0,0)$ 是 $z=f(x,y)$ 的极大值点；

对点 $(2,0)$，有 $A=12, B=0, C=-6$，则 $AC-B^2=12\times(-6)-0<0$，故 $(2,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

综上可知，点 $(0,0)$ 是 $z=x^3-3x^2-3y^2$ 在 $x^2+y^2<16$ 内的唯一极大值点，但不是 $D:x^2+y^2\leqslant 16$ 上的最大值点，最大值 $z(4,0)=16$ 在边界 $x^2+y^2=16$ 上取得.

(7) 解　依题意，知 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$d^2=x^2+y^2+z^2$.

问题转化为求 $x^2+y^2+z^2$ 在条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最值，利用拉格朗日乘数法. 令 $L=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-4)$，则

$$\begin{cases} L'_x=2x-2\lambda_1 x+\lambda_2=0, & ① \\ L'_y=2y-2\lambda_1 y+\lambda_2=0, & ② \\ L'_z=2z+\lambda_1+\lambda_2=0, & ③ \\ L'_{\lambda_1}=z-x^2-y^2=0, & ④ \\ L'_{\lambda_2}=x+y+z-4=0. & ⑤ \end{cases}$$

考虑到 L 关于 x 与 y 具有轮换性，方程组有 $x=y$ 解，将 $x=y$ 代入 ④ 与 ⑤，解得

$$(-2,-2,8),(1,1,2),$$

故最大值为 $\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+8^2}=6\sqrt{2}$，最小值为 $\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$.

【注】 ① 此题有两个约束条件 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x+y+z=4, \end{cases}$ 可将 z 消去化为一个约束条件

$$x+y+x^2+y^2=4,$$

问题转化为求 $x^2+y^2+(4-x-y)^2$ 在约束条件 $x+y+x^2+y^2=4$ 下的最值.

② 此题也可利用微分解决.

求 $u=x^2+y^2+z^2$ 在 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x+y+z=4 \end{cases}$ 下的条件极值.

可令全微分 $\mathrm{d}u=0$，并将约束条件两边微分整理得

$$\begin{cases} 2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=0, \\ 2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=0, \\ \mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0. \end{cases}$$

由于 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 不全为零，故上面方程组有非零解，于是

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

将行列式展开并化简，有 $2(x-y)(2z+1)=0$.

又由题意可知 $z\geqslant 0$，故 $x=y$，将 $x=y$ 代入 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$，解得两点分别为 $(1,1,2)$ 和 $(-2,-2,8)$.

比较大小，可知 $\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$，$\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+8^2}=6\sqrt{2}$ 分别为最小值和最大值.

(8) 解　视 ξ,η 为中间变量，x,y 为自变量.

由已知，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 1+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\cdot a+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\cdot b, \end{cases}$$

这里 $\dfrac{\partial u}{\partial \xi},\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ 是以 ξ,η 为中间变量、x,y 为自变量的二元函数，故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

代入已知方程，得

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$=(1+4a+3a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+[2+4(a+b)+6ab]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+(1+4b+3b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

又由已知，得
$$\begin{cases}1+4a+3a^2=0, & ①\\ 1+4b+3b^2=0, & ②\\ 2+4(a+b)+6ab\neq 0, & ③\end{cases}$$

联立 ① 式和 ② 式，解得
$$\begin{cases}a=-1,\\ b=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=-\dfrac{1}{3},\\ b=-1,\end{cases}\text{且都满足 ③ 式，故为所求.}$$

(9) 解　令 $e^x\sin y=u$，则
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\sin^2 y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\cos^2 y,$$

代入原方程，得 $f''(u)-f(u)=0$，此为二阶齐次线性微分方程，解得
$$f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}(C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

综合题

一、选择题

(1) B.

解　四个选项中，只有 B 是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微的充分条件，故 B 一定不成立.

(2) A.

解　利用保号性和极值的定义.

由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{e^{x^2+y^2}-1}=1$，知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$.

又由保号性，知在点 $(0,0)$ 的去心邻域内有 $f(x,y)>0=f(0,0)$. 由极值的定义，可知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值，故 A 正确.

(3) B.

解　在点 $(0,0)$ 的去心邻域内有 $|x|+y^4>0$，则由保号性，可知 $f(x,y)-f(0,0)<0$，再由极值的定义，可知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值，故 B 正确.

(4) C.

解　由 $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界，知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.
$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,$$
$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\arctan\frac{1}{|y|}=\frac{\pi}{2},$$
$$\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y]}{\rho}$$
$$=\frac{y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\left[0\cdot x+\dfrac{\pi}{2}\cdot y\right]}{\rho},$$

由于 $\left|\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$，故
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，故 C 正确.

(5) B.

解　由已知条件及极限与无穷小的关系，有

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

$$\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=k+\alpha(\alpha\to 0),$$

即 $$f(x,y)=(1+k)\sqrt{x^2+y^2}+o(\rho),\rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

则在点(0,0)处,$f(x,y)$ 沿任何方向 $\boldsymbol{l}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}$ 的方向导数都存在,且

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+k)t+o(t)}{t}=1+k,$$

故当 $\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}\right|_{(0,0)}=1+k>0$ 时,$f(x,y)$ 在点(0,0)处取得极小值,B正确.

【注】 ① 由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=k$ 及 $f(0,0)=0$,得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=f(0,0)=0$.

②$\boldsymbol{l}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\sin\alpha\boldsymbol{j}$,如图5-1所示,

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}.$$

$\boldsymbol{l}$ 所在直线方程的参数式为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha.\end{cases}$

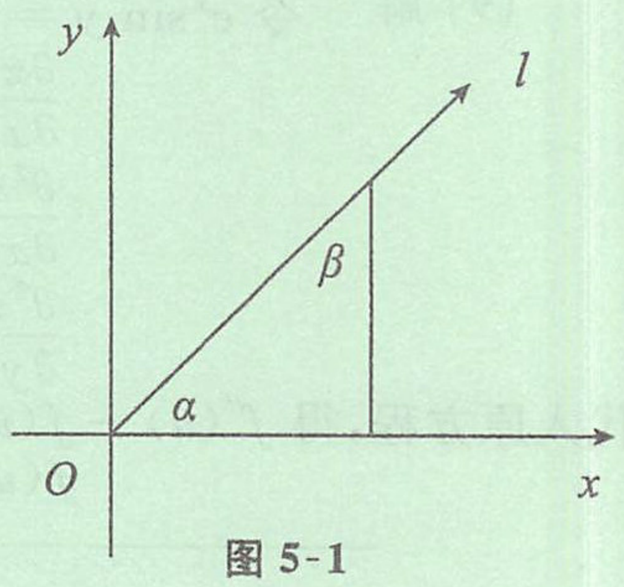


图 5-1

③ $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+k)\sqrt{x^2}+o(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+k)\frac{|x|}{x}+\frac{o(x)}{x}\right].$$

当 $k>-1$ 时,上述极限不存在,故 $f'_x(0,0)$ 不存在,同样 $f'_y(0,0)$ 不存在,所以 $f(x,y)$ 在点(0,0)处不可微.可排除A,D.

④$f(x,y)$ 在点(0,0)处沿任何方向的方向导数都大于零(小于零),则 $f(x,y)$ 在点(0,0)处取得极小(大)值.

(6) A.

解 由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$,知 $f(x,y)$ 关于 x 单调增加;由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,知 $f(x,y)$ 关于 y 单调减少,故当 $x_1<x_2,y_1>y_2$ 时,有

$$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1),f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2),$$

即 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$,故A正确.

(7) A.

解 由 $F'_x(x_0,y_0)=0$,得 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}=0$,故 $x=x_0$ 是 $y=y(x)$ 的驻点.

$F(x,y)=0$ 两边对 x 求导,得 $F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\cdot\frac{dy}{dx}=0$.再对 x 求导,得

$$F''_{xx}(x,y)+F''_{xy}(x,y)\cdot\frac{dy}{dx}+\left[F''_{yx}(x,y)+F''_{yy}(x,y)\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx}+F'_y(x,y)\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

将 (x_0,y_0) 代入上式,解得 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}=-\frac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}>0$,故 $y=y(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值,A正确.

二、填空题

(1) y^2+xy+1.

解 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$,两边同时对 y 积分,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\int 2dy+\varphi(x)=2y+\varphi(x),$$

由 $z'_y(x,0)=x$,得 $\varphi(x)=x$,故 $\frac{\partial z}{\partial y}=2y+x$,两边再同时对 y 积分,得

$$z=\int(2y+x)dy+\varphi_1(x)=y^2+xy+\varphi_1(x).$$

又由 $z(x,0)=1$,得 $\varphi_1(x)=1$,于是 $z(x,y)=y^2+xy+1$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(2) $\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2$.

解　$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=x+y$,两边同时对 x 积分,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\int(x+y)\mathrm{d}x+\varphi(y)=\frac{1}{2}x^2+xy+\varphi(y),$$

由 $z(0,y)=y^2$,有 $\frac{\mathrm{d}(y^2)}{\mathrm{d}y}=\varphi(y)$,故 $\varphi(y)=2y$.

又由 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}x^2+xy+2y$,两端同时对 y 积分,得 $z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+y^2+\varphi_1(x)$,

由于 $z(x,0)=x$,故 $\varphi_1(x)=x$,所以 $z(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2$.

(3) $n!\left[1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right]$.

解　$z=\frac{2x}{x^2-y^2}=\frac{1}{x+y}-\frac{1}{y-x}$,利用 $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$,有

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n}=(-1)^n\frac{n!}{(x+y)^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(y-x)^{n+1}},$$

故 $\left.\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right|_{(2,1)}=(-1)^n\frac{n!}{3^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(-1)^{n+1}}=n!\left[1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right]$.

(4) $x+4y+6z=21$ 或 $x+4y+6z=-21$.

解　令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$,则 $F'_x=2x$,$F'_y=4y$,$F'_z=6z$,法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)=(2x,4y,6z).$$

设切点为 (x_0,y_0,z_0),于是曲面 $F(x,y,z)=0$ 在该点处的切平面方程为

$$x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+3z_0(z-z_0)=0.$$

由已知,该切平面与 $x+4y+6z=0$ 平行,故有 $\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{4}=\frac{3z_0}{6}\xlongequal{\text{记}}\lambda$,

解得 $x_0=\lambda$,$y_0=2\lambda$,$z_0=2\lambda$.

又切点在曲面上,故 $\lambda^2+2(2\lambda)^2+3(2\lambda)^2=21$,解得 $\lambda=\pm1$. 对应于 $\lambda=1$,切点为 $(1,2,2)$;对应于 $\lambda=-1$,切点为 $(-1,-2,-2)$.

所求切平面方程为

$$(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0,(x+1)+4(y+2)+6(z+2)=0,$$

即 $x+4y+6z=21$ 或 $x+4y+6z=-21$.

(5) $4x-z-2=0$.

解　依题设,只需求法向量 $\boldsymbol{n}=(f'_x,f'_y,-1)$.

$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$ 两边同时对 t 求导,得 $xf'_1(tx,ty)+yf'_2(tx,ty)=2tf(x,y)$,

令 $t=1$,则上式为　　$xf'_1(x,y)+yf'_2(x,y)=2f(x,y)$.

将 $x=1$,$y=-2$,$z=f(1,-2)=2$,$f'_1(1,-2)=4$ 代入上式,得 $f'_2(1,-2)=0$,即 $f'_y(1,-2)=0$,故法向量为 $\boldsymbol{n}=(4,0,-1)$,所求切平面方程为

$$4(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)(z-2)=0,$$

即 $4x-z-2=0$.

(6) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{3}$,$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{6}$,$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{9}$,$\boldsymbol{n}$ 为单位向量,故

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(7) $-\frac{12}{5}\sqrt{5}$.

解　令 $F=x^2+y^2-5$,外法线方向 $\boldsymbol{n}=(2x,2y,0)$,则曲面在点 $P(1,2,-1)$ 处 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为　　$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$,$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$,$\cos\gamma=0$.

又 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=-4$,$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=-4$,$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=12$,故

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=(-4)\times\frac{1}{\sqrt{5}}+(-4)\times\frac{2}{\sqrt{5}}+12\times0=-\frac{12}{5}\sqrt{5}.$$

三、解答题

(1) 解 此题是隐函数与复合函数求导的综合题.

由 $xe^x=\tan t$,可知 x 是 t 的函数,同理 $y=\cos t$,y 也是 t 的函数,再由 $x+y-z=e^z$,可知 z 是 t 的一元函数.

方程 $x+y-z=e^z$ 两边同时对 t 求导,得 $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-\frac{dz}{dt}=e^z\cdot\frac{dz}{dt}$,故

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{1+e^z}\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right).$$

再求导,得 $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2z}{dt^2}=e^z\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+e^z\frac{d^2z}{dt^2}$,故

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{1}{1+e^z}\left[\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}-e^z\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{1+e^z}\left[\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}-e^z\cdot\frac{1}{(1+e^z)^2}\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)^2\right]. \quad ①$$

而 $$\frac{dy}{dt}=-\sin t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-\cos t,$$

又由 $xe^x=\tan t$,得 $e^x\frac{dx}{dt}+xe^x\frac{dx}{dt}=\sec^2t$,再对 t 求导,得

$$e^x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+e^x\frac{d^2x}{dt^2}+e^x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+xe^x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+xe^x\frac{d^2x}{dt^2}=2\sec^2t\cdot\tan t,$$

故 $$\frac{dx}{dt}=\frac{\sec^2t}{(1+x)e^x},\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\sec^2t[2e^x(1+x)^2\tan t-(2+x)\sec^2t]}{(1+x)^3e^{2x}}.$$

当 $t=0$ 时,由 $xe^x=0$,得 $x=0$,而 $y=\cos0=1$. 将 $x=0,y=1$ 代入 $x+y-z=e^z$,得 $z=0$,故

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=1,\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0,\ \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0}=-2,\ \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0}=-1,$$

代入 ① 式,可知 $\left.\frac{d^2z}{dt^2}\right|_{t=0}=-\frac{13}{8}$.

(2) 证 (必要性)设 $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$. 令 $\frac{x}{y}=u$,则

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{1}{y}, & ①\\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right), & ②\end{cases}$$

① $\times x+$ ② $\times y$,得 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

(充分性)设 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$. 令 $u=\frac{x}{y},v=y$,则 $z=z(x,y)$ 为

$$z=z(yu,v)=f(u,v).$$

根据复合函数微分法,有 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u\cdot\frac{1}{y}+f'_v\cdot0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'_u\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+f'_v\cdot1.\end{cases}$

由条件 $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}f'_u-\frac{x}{y}f'_u+yf'_v=0,$$

知 $f'_v=0$,故 f 只是 u 的函数,即 $z=f(u)=f\left(\frac{x}{y}\right)$.

(3) 解法 1 方程 $F\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}$,两边分别对 x,y 求导,得

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\begin{cases} F' \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=-\dfrac{1}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}, & ① \\ F' \cdot \left(\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=-\dfrac{1}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial y}, & ② \end{cases}$$

解 ①② 式，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z^2F'}{(F'+1)x^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{z^2F'}{(F'+1)y^2}$，

故 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

解法 2　用公式求.

令 $G=F\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}\right)-\dfrac{1}{z}$，则

$$G'_x=F'\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\ G'_y=F'\cdot\frac{1}{y^2},\ G'_z=F'\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2},$$

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{G'_x}{G'_z}=\dfrac{z^2F'}{x^2(F'+1)}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{G'_y}{G'_z}=-\dfrac{z^2F'}{y^2(F'+1)}$，

从而 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

(4) 解　将 $z=z(x,y)$ 代入 $y=g(x,z)$，得 $y=g[x,z(x,y)]$.　①

在方程 ① 两边分别对 x 求导，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g'_1\cdot 1+g'_2\cdot\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$.　②

在方程 $f(x-z,xy)=0$ 两边分别对 x,y 求偏导，视 z 是关于 x,y 的函数，得

$$\begin{cases} f'_1\cdot\left(1-\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+f'_2\cdot y=0, \\ f'_1\cdot\left(0-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+f'_2\cdot x=0, \end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{f'_1+f'_2\cdot y}{f'_1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{f'_2\cdot x}{f'_1}$，将其代入 ② 式，解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f'_1g'_1+g'_2(f'_1+f'_2\cdot y)}{f'_1-xf'_2g'_2}$.

(5) 解　利用拉格朗日乘数法，令

$$L(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3),$$

则
$$\begin{cases} L'_x=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0, & ① \\ L'_y=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0, & ② \\ L'_\lambda=x^2+y^2+xy-3=0. & ③ \end{cases}$$

由 ①② 消去 λ，得 $(x-y)(x+y-1)=0$，故 $x=y$ 或 $x+y-1=0$.

当 $x=y$ 时，代入 ③ 式，解得 $x=y=\pm 1$；

当 $x+y=1$ 时，代入 ③ 式，解得 $x=2,y=-1$ 或 $x=-1,y=2$.

比较大小：$f(1,1)=8$，$f(-1,-1)=0$，$f(2,-1)=f(-1,2)=9$，

故 $f(x,y)$ 的最大值为 9.

【注】　若 $L(x,y,\lambda)$ 关于 x,y 具有轮换性（即 x,y 互换位置，$L(x,y,\lambda)$ 不变），一般地，方程组 $\begin{cases} L'_x=0, \\ L'_y=0, \\ L'_\lambda=0 \end{cases}$ 有解 $x=y$.

但应注意，方程组的全部解不一定都满足 $x=y$. 此题最大值不是在满足 $x=y$ 的点取得，应引起重视，否则容易漏解.

(6) 解　设点 $P(x,y,z)$ 为椭球面在第一卦限上的任一点，则过点 P 的切平面方程为

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0,$$

该切平面在三个坐标轴上的截距分别为 $\dfrac{a^2}{x}$，$\dfrac{b^2}{y}$，$\dfrac{c^2}{z}$，故四面体的体积

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{x}\cdot\frac{b^2}{y}\cdot\frac{c^2}{z}=\frac{a^2b^2c^2}{6xyz}(x>0,y>0,z>0),$$

问题转化为求 xyz 在条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 下的最大值.

令 $L=xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$，则

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\begin{cases} L'_x = yz + 2\lambda \dfrac{x}{a^2} = 0, & ① \\ L'_y = xz + 2\lambda \dfrac{y}{b^2} = 0, & ② \\ L'_z = xy + 2\lambda \dfrac{z}{c^2} = 0, & ③ \\ L'_\lambda = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0. & ④ \end{cases}$$

由①②③式，得$\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$，代入④式，可解得$x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$，$y = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$，$z = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$，

故所求最小体积为$V = \dfrac{a^2b^2c^2}{6 \cdot \dfrac{a}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{b}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{c}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$.

(7)解　由极值的必要条件，得$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3 - 2ax - 2by = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4 - 4ay - 2bx = 0, \end{cases}$

即$\begin{cases} 2ax + 2by = 3, \\ 2bx + 4ay = 4, \end{cases}$当$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 4a \end{vmatrix} = 8a^2 - 4b^2 \neq 0$时，$f(x,y)$有唯一驻点，且

$$x = \frac{3a - 2b}{2a^2 - b^2},\ y = \frac{4a - 3b}{2(2a^2 - b^2)}.$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2a,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2b,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4a.$$

当$AC - B^2 = 8a^2 - 4b^2 > 0$，即$2a^2 - b^2 > 0$时，$f(x,y)$有极值.

当$A = -2a > 0$，即$a < 0$时，有极小值；

当$A = -2a < 0$，即$a > 0$时，有极大值.

综上所述，当$2a^2 - b^2 > 0$且$a < 0$时，$f(x,y)$有唯一的极小值；当$2a^2 - b^2 > 0$且$a > 0$时，有唯一的极大值.

(8)解　依题意，有

$$\begin{cases} f'_x(-1,y_0) = e^{-x}(-ax - b + y^2 + a)\Big|_{(-1,y_0)} = e(2a - b + y_0^2) = 0, & ① \\ f'_y(-1,y_0) = -2ye^{-x}\Big|_{(-1,y_0)} = 0 & ② \end{cases}$$

(此处由②式，知$y_0 = 0$，故$f(x,y)$在点$(-1,0)$处取得极大值)，

解①式，得$b = 2a$. 又

$$A = f''_{xx}(-1,0) = e^{-x}(ax + b - y^2 - 2a)\Big|_{(-1,0)} = e(-3a + b),$$

$$B = f''_{xy}(-1,0) = 2ye^{-x}\Big|_{(-1,0)} = 0,$$

$$C = f''_{yy}(-1,0) = -2e^{-x}\Big|_{(-1,0)} = -2e,$$

由已知，$AC - B^2 = -2e^2(-3a + b) > 0$，$A < 0$，故$a > 0$，$b = 2a$.

当$a = 0, b = 0$时，$AC - B^2 = 0$，此时$f(x,y) = -y^2e^{-x} \leqslant f(-1,0) = 0$，

不满足极值的定义，故$f(-1,0)$不是极大值.

综上所述，a,b满足的条件为$a > 0, b = 2a$.

(9)解　已知方程两边同时对x,y求偏导，得

$$\begin{cases} 2x - 6y - 2y\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, & ① \\ -6x + 20y - 2z - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} - 2z\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. & ② \end{cases}$$

令$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$，得$\begin{cases} x - 3y = 0, \\ -3x + 10y - z = 0, \end{cases}$解得$x = 3y, z = y$，代入原方程解得

$$x = 9, y = 3, z = 3 \text{ 或 } x = -9, y = -3, z = -3.$$

①②式两边同时对x,y求偏导，得

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资料

$$\begin{cases} 2-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \\ -6-2\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, \\ 20-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \end{cases}$$

将$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,x=9,y=3,z=3$代入上方程组，得

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6},\ B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2},\ C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3},$$

故$AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0,A=\dfrac{1}{6}>0$，所以$z(9,3)=3$为极小值.

同理，得

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},\ C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3},$$

故$AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0,\ A=-\dfrac{1}{6}<0$，所以$z(-9,-3)=-3$为极大值.

(10) 证　由$z=f(x)\ln f(y)$，得$z'_x=f'(x)\ln f(y),\ z'_y=f(x)\cdot\dfrac{f'(y)}{f(y)}$.

由已知，$f'(0)=0$，故

$$z'_x(0,0)=f'(0)\ln f(0)=0,\ z'_y(0,0)=f(0)\cdot\frac{f'(0)}{f(0)}=0.$$

又

$$z''_{xx}(x,y)=f''(x)\ln f(y),$$
$$z''_{xy}(x,y)=f'(x)\frac{f'(y)}{f(y)},$$
$$z''_{yy}(x,y)=f(x)\frac{f''(y)f(y)-[f'(y)]^2}{f^2(y)},$$

所以　$A=z''_{xx}(0,0)=f''(0)\ln f(0),\ B=z''_{xy}(0,0)=0,\ C=z''_{yy}(0,0)=f''(0)$，

又$f''(0)>0,f(0)>1$，故

$$AC-B^2=f''(0)\ln f(0)\cdot f''(0)-0^2=[f''(0)]^2\ln f(0)>0,$$
$$A=f''(0)\ln f(0)>0,$$

所以$z=f(x)\ln f(y)$在点$(0,0)$处取得极小值.

(11) 解　依题意，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y-x^2,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x-1$，故

$$z=\int\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x=\int(y-x^2)\mathrm{d}x+\varphi(y)=xy-\frac{1}{3}x^3+\varphi(y),$$

又$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+\varphi'(y)=x-1$，得$\varphi'(y)=-1$，积分得$\varphi(y)=-y+C$，所以

$$z=xy-\frac{1}{3}x^3-y+C.$$

由$f(1,1)=-\dfrac{1}{3}$，得$C=0$，于是$z=f(x,y)=xy-\dfrac{1}{3}x^3-y$.

（Ⅰ）在D内，如图5-2所示. 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-x^2=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x-1=0,$$

解得唯一驻点$(1,1)$.

（Ⅱ）在D的边界上，$y=0(0\leqslant x\leqslant 7),f(x,0)=-\dfrac{1}{3}x^3$，显然在$[0,7]$上最大值为0；$x=0(0\leqslant y\leqslant 7),f(0,y)=-y$，最大值为0；

$$x+y=7,\ f(x,7-x)=-\frac{x^3}{3}-x^2+8x-7(0\leqslant x\leqslant 7),$$

由$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,7-x)]=-x^2-2x+8=0$，得$x=2,x=-4$(舍).

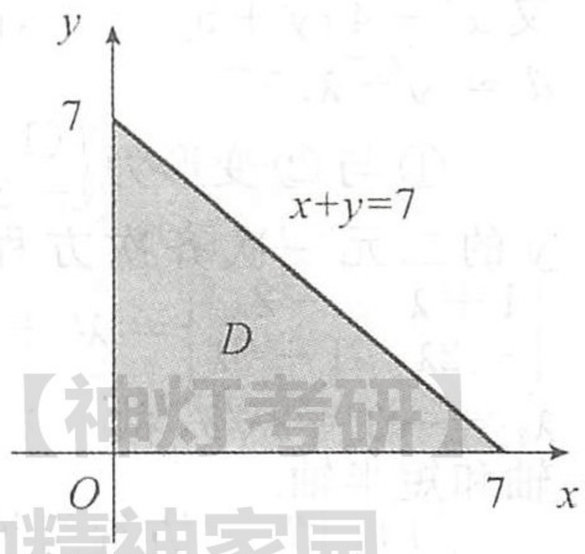


图5-2

比较大小：

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

$$f(1,1)=-\frac{1}{3},\ f(0,0)=0,f(2,5)=\frac{7}{3},\ f(0,7)=-7,\ f(7,0)=-\frac{7^3}{3},$$

故 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 $f(2,5)=\frac{7}{3}$.

【注】 此题已知全微分,求 $f(x,y)$ 也可利用凑微分法:

$$\begin{aligned}dz&=(y-x^2)dx+(x-1)dy=ydx+xdy-x^2dx-dy\\&=d(xy)-d\left(\frac{x^3}{3}\right)-dy=d\left(xy-\frac{x^3}{3}-y\right),\end{aligned}$$

故 $z=xy-\frac{x^3}{3}-y+C$.

(12) 解 曲线 $x^2+xy+y^2=1$ 上任意一点 (x,y) 到坐标原点的距离为 $d=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,则原问题转化为求 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在条件 $x^2+xy+y^2=1$ 下的最大值与最小值的问题.

令 $L=x^2+y^2+\lambda(x^2+xy+y^2-1)$,则

$$\begin{cases}L'_x=2x+(2x+y)\lambda=0, & ①\\ L'_y=2y+(x+2y)\lambda=0, & ②\\ L'_\lambda=x^2+xy+y^2-1=0. & ③\end{cases}$$

由 ① $\times y-$ ② $\times x$,得 $(y^2-x^2)\lambda=0$,解得 $\lambda=0$ 或 $x=\pm y$.

若 $\lambda=0$,则由 ①② 式,得 $x=y=0$ 不满足 ③ 式,故 $\lambda=0$ 舍去.

将 $x=-y$ 代入 ③ 式,解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\ y=1.\end{cases}$

将 $x=y$ 代入 ③ 式,解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{3}},\\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{1}{\sqrt{3}},\\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}.\end{cases}$

比较大小:由于 $f(1,-1)=\sqrt{2},\ f(-1,1)=\sqrt{2},$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3},f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

故最长距离为 $\sqrt{2}$,最短距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(13) 解 依题意,相当于求原点 $(0,0)$ 到椭圆上的点的距离 d 的最大值和最小值,如图 5-3 所示.

设 $P(x,y)$ 为椭圆上任一点,则

$$d=\sqrt{x^2+y^2},\ d^2=x^2+y^2.$$

利用拉格朗日乘数法,令 $L=x^2+y^2+\lambda(x^2-4xy+5y^2-1)$,则

$$\begin{cases}L'_x=2x+2\lambda x-4\lambda y=0, & ①\\ L'_y=2y-4\lambda x+10\lambda y=0, & ②\\ L'_\lambda=x^2-4xy+5y^2-1=0, & ③\end{cases}$$

① $\times\frac{x}{2}+$ ② $\times\frac{y}{2}$,得 $x^2+y^2+\lambda(x^2-4xy+5y^2)=0$,

又 $x^2-4xy+5y^2=1$,故 $x^2+y^2=-\lambda$,于是只需求 λ,可得 $d=\sqrt{-\lambda}$.

① 与 ② 变形为 $\begin{cases}(1+\lambda)x-2\lambda y=0,\\ -2\lambda x+(1+5\lambda)y=0,\end{cases}$ 上式为关于 x,y 的二元一次齐次方程组,有非零解 x,y 的充要条件是

$$\begin{vmatrix}1+\lambda & -2\lambda\\ -2\lambda & 1+5\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+6\lambda+1=0,$$

解得 $\lambda_1=-3+2\sqrt{2}$,$\lambda_2=-3-2\sqrt{2}$,故 $-\lambda=3\pm2\sqrt{2}=(\sqrt{2}\pm1)^2$,所以 $d_1=\sqrt{2}+1$,$d_2=\sqrt{2}-1$ 分别为长半轴和短半轴.

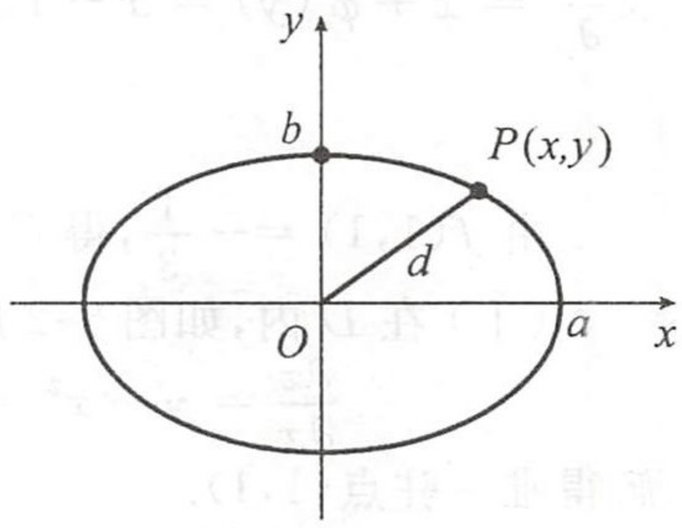


图 5-3

(14) 解 方程组等号两边同时对 y 求导,得

$$\begin{cases}F'_1\cdot\left(1-\frac{dx}{dy}\right)+F'_2\cdot\left(1-\frac{dz}{dy}\right)=0,\\ G'_1\cdot\left(x+y\frac{dx}{dy}\right)+G'_2\cdot\left(-\frac{z}{y^2}+\frac{1}{y}\frac{dz}{dy}\right)=0,\end{cases}$$

微信公众号【神灯考研】考研人的精神家园
微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

整理，得
$$\begin{cases} F'_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+F'_2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=F'_1+F'_2, \\ yG'_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{1}{y}G'_2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\dfrac{z}{y^2}G'_2-xG'_1, \end{cases}$$

解此方程组，得
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\begin{vmatrix} F'_1+F'_2 & F'_2 \\ \dfrac{z}{y^2}G'_2-xG'_1 & \dfrac{1}{y}G'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_1 & F'_2 \\ yG'_1 & \dfrac{1}{y}G'_2 \end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{1}{y}F'_1G'_2+xF'_2G'_1+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{z}{y^2}\right)F'_2G'_2}{\dfrac{1}{y}F'_1G'_2-yF'_2G'_1}.$$

同理，可得
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-\frac{(x+y)F'_1G'_1+yF'_2G'_1-\dfrac{z}{y^2}F'_1G'_2}{\dfrac{1}{y}F'_1G'_2-yF'_2G'_1}.$$

(15) 证　依题意，只要证明曲面上任一点的法向量都垂直于定向量.

令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^{2x-z}-f(\pi y-\sqrt{2}z)$，则 $F'_x=2\mathrm{e}^{2x-z}$，$F'_y=-\pi f'$，$F'_z=-\mathrm{e}^{2x-z}+\sqrt{2}f'$，故曲面上任一点$(x,y,z)$处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2\mathrm{e}^{2x-z},-\pi f',-\mathrm{e}^{2x-z}+\sqrt{2}f')$.

设定向量为 $\boldsymbol{T}=(l,m,n)$，要使 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即 $2l\mathrm{e}^{2x-z}-m\pi f'-n\mathrm{e}^{2x-z}+\sqrt{2}nf'=0$，

只需使
$$2l=n,\ m\pi=\sqrt{2}n,$$
所以若取 $l=\pi$，$n=2\pi$，$m=2\sqrt{2}$，则有 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}=0$，故曲面上任一点的切平面都平行于以$(\pi,2\sqrt{2},2\pi)$为方向向量的定直线.

【注】　此题说明 $\mathrm{e}^{2x-z}=f(\pi y-\sqrt{2}z)$ 表示一个柱面.

(16) 解　利用拉格朗日乘数法，令 $L=\dfrac{1}{\alpha}x^{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}y^{\beta}+\lambda(xy-1)$，则
$$\begin{cases} L'_x=x^{\alpha-1}+\lambda y=0, \\ L'_y=y^{\beta-1}+\lambda x=0, \\ L'_\lambda=xy-1=0, \end{cases}$$
解方程组得 $x=y=1$. 由此得到点$(1,1)$是唯一可能的极值点，再应用二元函数极值的充分条件判断，可知点$(1,1)$是唯一极小值点，故点$(1,1)$即为最小值点，最小值为 $f_{\min}=f(1,1)=1$.

(17) 解
$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

又
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{c^2},$$
$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\ \cos\beta=\frac{y}{r},\ \cos\gamma=\frac{z}{r},$$
其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，故
$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{x}{r}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{y}{r}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{z}{r}=\frac{2u}{r},$$
且梯度为
$$\mathbf{grad}\ u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right).$$

（Ⅰ）当 a,b,c 两两不相等时，函数 u 的等值面为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=k(k>0)$，梯度方向是等值面的外法线方向，在椭球面的六个顶点处的外法线方向与向径 l 的方向相同，故在这些点处有 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=|\ \mathbf{grad}\ u\ |$.

（Ⅱ）当 $a=b\neq c$ 时，等值面为旋转椭球面 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=k(k>0)$，在顶点$(0,0,\pm c\sqrt{k})$及圆周 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2k, \\ z=0 \end{cases}$ 上，梯度方向与向径 l 方向相同，故在这些点处有 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=|\ \mathbf{grad}\ u\ |$.

（Ⅲ）当 $a=b=c$ 时，等值面为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2k(k>0)$，球面上各点的外法线方向与向径 l 方向相同，故在这些点处有 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=|\ \mathbf{grad}\ u\ |$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

拓展题

一、选择题

D.

解 对于D:当D中条件成立时,有

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\cdot(\Delta x)^2\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}\right]=0,$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{1}{\Delta y}\cdot(\Delta y)^2\sin\frac{1}{(\Delta y)^2}\right]=0,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{1}{2}}\cdot\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0.$$

由可微的定义,知 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微,且 $\mathrm{d}f=0$,D正确.

对于A:由 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$,知偏导数存在,但不能推出 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

对于B:$\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$,当 $\Delta y=0$ 时,$\Delta f=0$;当 $\Delta x=0$ 时,$\Delta f=0$,故 $f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=0$,$f'_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta y}=0$,由此可知

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

不存在,即 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不可微.

对于C:由于 $\Delta f=\dfrac{\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$,故 $f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(\Delta x)^2}{|\Delta x|\cdot\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{|\Delta x|}$,

又因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{|\Delta x|}=1$,$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta x}{|\Delta x|}=-1$,

所以 $f'_x(x_0,y_0)$ 不存在.同理 $f'_y(x_0,y_0)$ 不存在,故 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不可微.

二、解答题

证 令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,由已知条件及极限与无穷小的关系,有

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=(1+k)+\alpha(\alpha\text{ 为无穷小}),$$

即

$$f(x,y)=(1+k)\sqrt{x^2+y^2}+o(\rho). \qquad ①$$

(Ⅰ)① 式两边同时取极限,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+k)\sqrt{x^2+y^2}+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}o(\rho)=0=f(0,0),$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(Ⅱ)当 $k\neq -1$ 时,

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+k)\sqrt{x^2}+o(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[(1+k)\frac{|x|}{x}+\frac{o(x)}{x}\right],$$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+k)\dfrac{|x|}{x}$ 不存在,故 $f'_x(0,0)$ 不存在,同理 $f'_y(0,0)$ 不存在,因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微(偏导数存在是可微的必要条件).

(Ⅲ)当 $k=-1$ 时,$f(x,y)=o(\rho)$,故

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0.$$

同理,$f'_y(0,0)=0$,故 $\mathrm{d}f\big|_{(0,0)}=0\cdot x+0\cdot y$,则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

李林考研数学系列

第六章　重积分及其应用

基础题

一、选择题

(1) B.

解　D 如图 6-1 所示，在 D 上有

$$[\ln(x+y)]^9 \leqslant [\sin(x+y)]^9 \leqslant (x+y)^9,$$

故 B 正确.

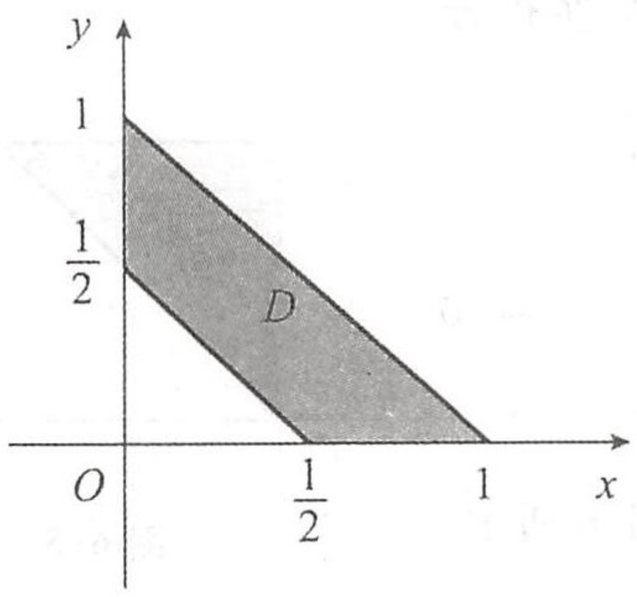


图 6-1

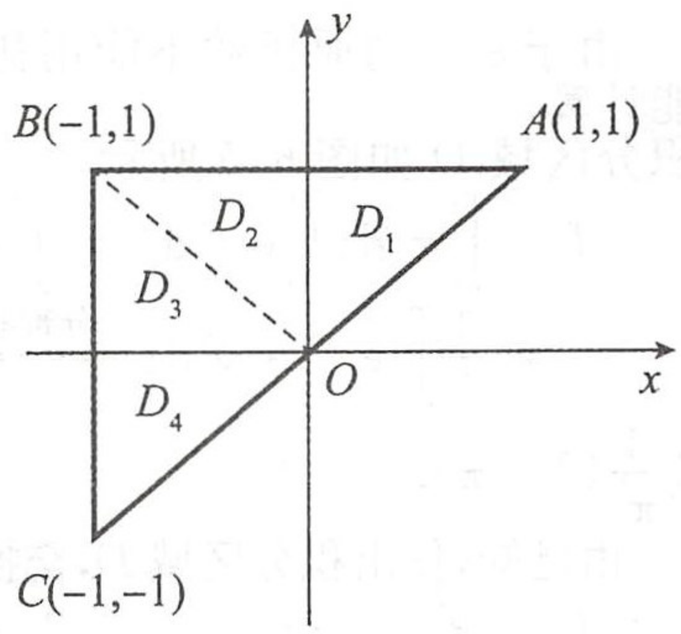


图 6-2

(2) C.

解　D 关于 y 轴对称，kx 关于 x 为奇函数，故 $\iint\limits_D kx\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. 又在 D 内，$y<0$，故 $I<0$.

(3) C.

解　依题意，D 如图 6-2 所示，

$$I = \iint\limits_D (xy + \cos x \sin y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \cos x \sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1 + I_2.$$

对于 I_1，$D_1 \cup D_2$ 关于 y 轴对称，xy 关于 x 为奇函数，故 $\iint\limits_{D_1 \cup D_2} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，同理 $\iint\limits_{D_3 \cup D_4} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，于是 $I_1 = 0$.

对于 I_2，$D_3 \cup D_4$ 关于 x 轴对称，$\cos x \sin y$ 关于 y 是奇函数，故 $\iint\limits_{D_3 \cup D_4} \cos x \sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，$D_1 \cup D_2$ 关于 y 轴对称，$\cos x \sin y$ 关于 x 是偶函数，故

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} \cos x \sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} \cos x \sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故 C 正确.

(4) C.

解　原积分 I 的积分区域如图 6-3 所示，

$$D_1 = \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{x^2}{2}, \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}, \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{8-x^2}, \end{cases}$$

故 $I = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$

(5) C.

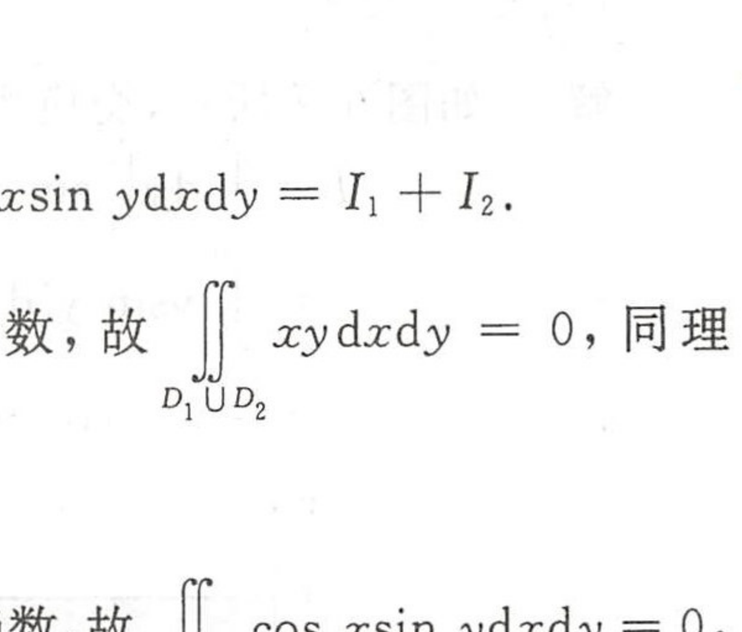


图 6-3

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

解 $x^2+y^2\leqslant x$ 化为极坐标方程为 $0\leqslant r\leqslant\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，故 C 正确.

(6)C.

解 由 $r=2\sin\theta$，得 $r^2=2r\sin\theta$，即

$$x^2+y^2=2y,$$

积分区域 D 如图 6-4 所示，所以 C 正确.

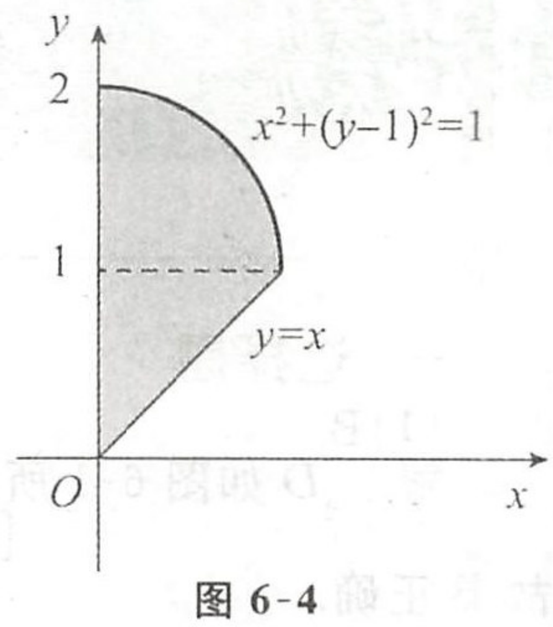


图 6-4

(7)A.

解 积分区域 V 关于 yOz 面和 xOz 面对称，$z=zx^0y^0$ 关于 x 与 y 为偶函数，故 A 正确.

二、填空题

(1) $\frac{1}{6}-\frac{1}{3e}$.

解 由于 e^{-y^2} 的原函数不能用初等函数表达，故交换积分顺序才能计算.

原积分区域 D 如图 6-5 所示，

$$I=\int_0^1x^2dx\int_x^1e^{-y^2}dy=\int_0^1e^{-y^2}dy\int_0^yx^2dx$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^1e^{-y^2}\cdot y^3dy\overset{\text{分部积分}}{=\!=\!=}\frac{1}{6}-\frac{1}{3e}.$$

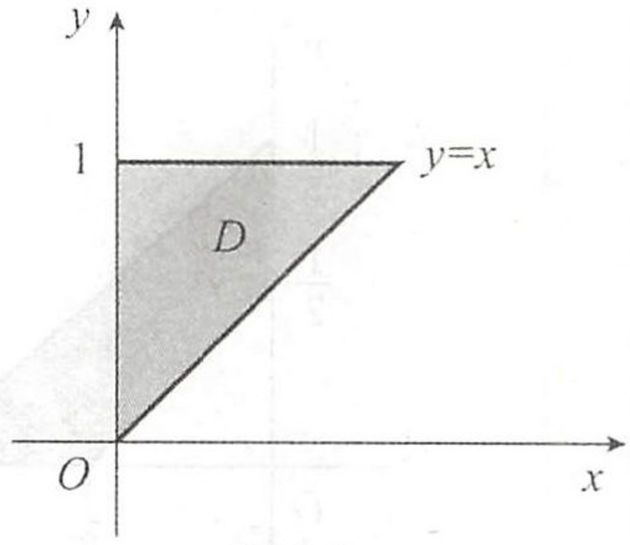


图 6-5

(2) $\frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$.

解 由已知，作出积分区域 D，交换积分顺序，如图 6-6 所示，

$$I=\int_1^2dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx=\int_1^2\frac{2y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}y\right)dy$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2y\cos\frac{\pi}{2}ydy\overset{\text{分部积分}}{=\!=\!=}\frac{4}{\pi^3}(2+\pi).$$

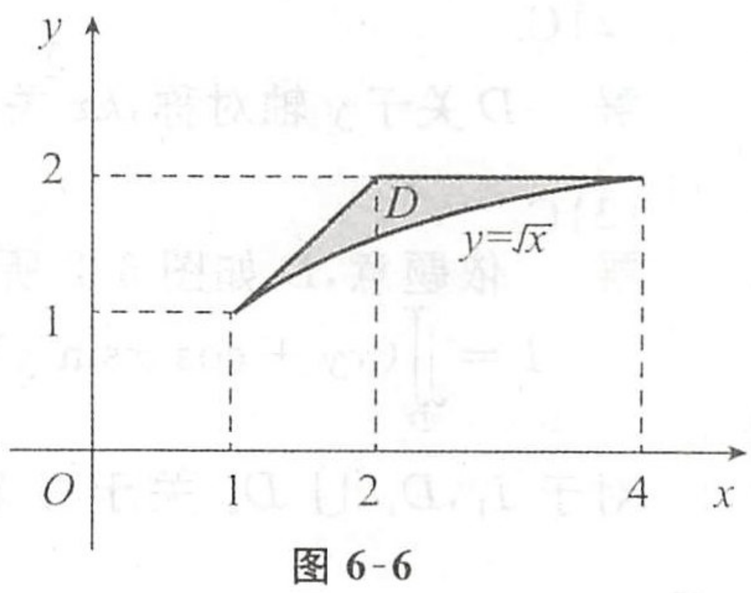


图 6-6

(3) $\frac{1-\cos 1}{2}$.

解 如图 6-7 所示，交换积分顺序，得

$$I=\int_0^1dy\int_0^y\sin y^2dx$$
$$=\int_0^1y\sin y^2dy=\frac{1}{2}\int_0^1\sin y^2d(y^2)$$
$$=\frac{1}{2}(-\cos y^2)\Big|_0^1=\frac{1-\cos 1}{2}.$$

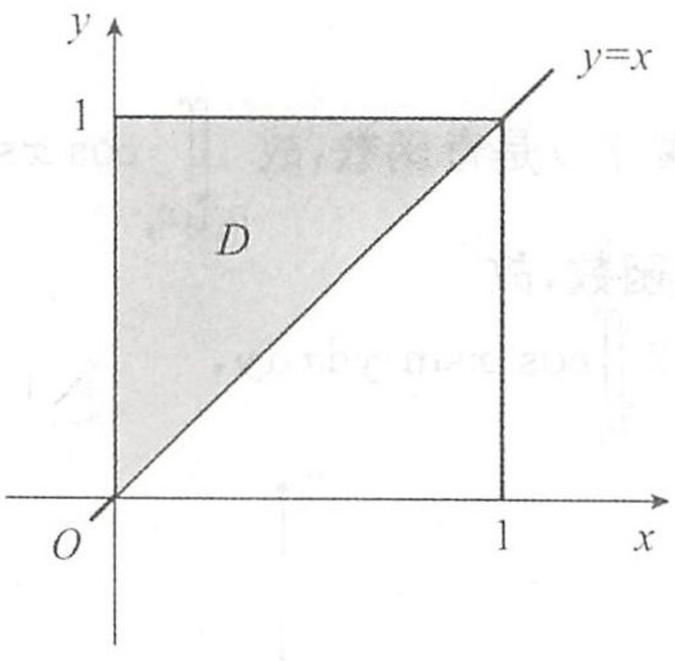


图 6-7

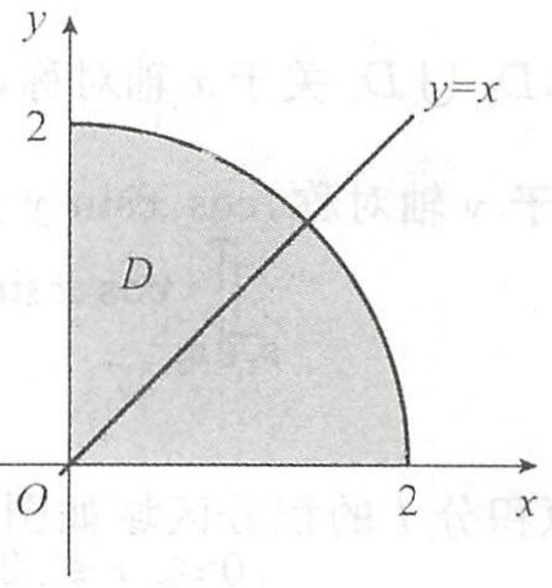


图 6-8

(4) $\frac{a+b}{2}\pi$.

解 如图 6-8 所示，D 关于直线 $y=x$ 对称，故

$$I=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\right]dxdy$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= \frac{a+b}{2}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2 = \frac{a+b}{2}\pi.$$

(5) $\dfrac{A^2}{2}$.

解　令 $F(x)=\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y$，则 $F'(x)=-f(x)$，故

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y$$
$$=-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}[F(x)]=-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1=\frac{A^2}{2}.$$

【注】　也可利用交换积分顺序及积分与积分变量无关求解.

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y,$$

故

$$2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\left\{f(x)\left[\int_0^x f(y)\mathrm{d}y+\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right]\right\}$$
$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\right]=A^2,$$

故 $I=\dfrac{A^2}{2}$.

(6) $\dfrac{\pi}{4}\ln 2$.

解　如图 6-9 所示，由于 D 关于直线 $y=x$ 对称，所以

$$I=\iint_D \frac{1+x-y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{1+x-y}{1+x^2+y^2}+\frac{1+y-x}{1+y^2+x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\iint_D\frac{2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1+r^2)}{1+r^2}$$
$$=\frac{\pi}{4}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\ln 2.$$

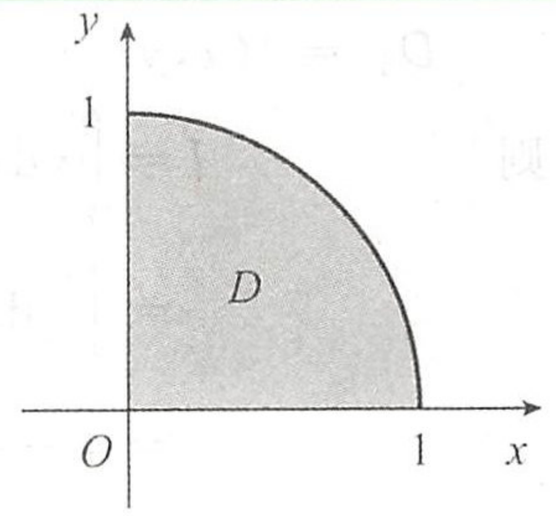


图 6-9

(7) $\dfrac{\pi^2}{32}$.

解　D 如图 6-10 所示，用极坐标有

$$\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta,$$

故
$$I=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\frac{r}{r\sqrt{4-r^2}}\mathrm{d}r$$
$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\arcsin\frac{r}{2}\Big|_0^{2\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}(\pi-\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^2}{32}.$$

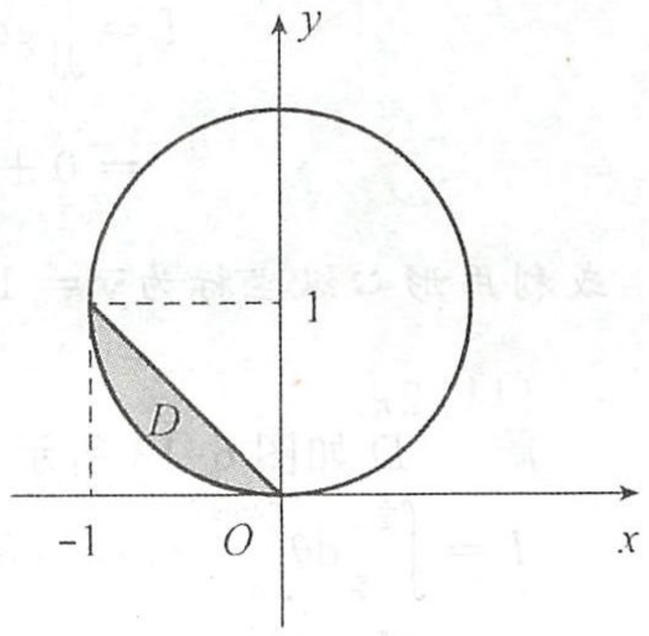


图 6-10

(8) $2\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}$.

解　D 如图 6-11 所示，采用极坐标. $x^2+y^2=2x$ 的极坐标方程为 $r=2\cos\theta$，$x=2$ 的极坐标方程为 $r=2\sec\theta$，$y=x$ 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，故

$$I=\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2\sec\theta}\frac{1}{r}\cdot r\mathrm{d}r$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec\theta - \cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= 2(\ln|\sec\theta + \tan\theta| - \sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}.$$

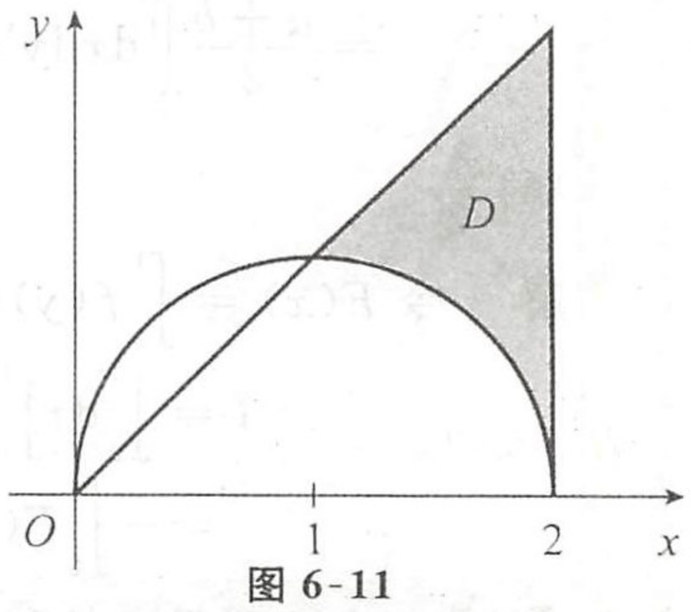


图 6-11

(9) $\dfrac{13\pi}{144}$.

解 D 关于直线 $y=x$ 对称，由轮换对称性，有

$$I = \iint_D \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{9}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{13\pi}{144}.$$

(10) $4-\dfrac{\pi}{2}$.

解 如图 6-12 所示，设

$$D_{大} = \{(x,y)\,|\,-2\leqslant x\leqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant 2\},$$

$$D_{小} = \{(x,y)\,|\,-\sqrt{2y-y^2}\leqslant x\leqslant 0\},$$

则

$$I = \iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{大}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{小}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-2}^0 \mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^2\sin\theta\mathrm{d}r$$

$$= 4 - \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta = 4 - \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t$$

$$= 4 - \frac{8}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = 4-\frac{\pi}{2}.$$

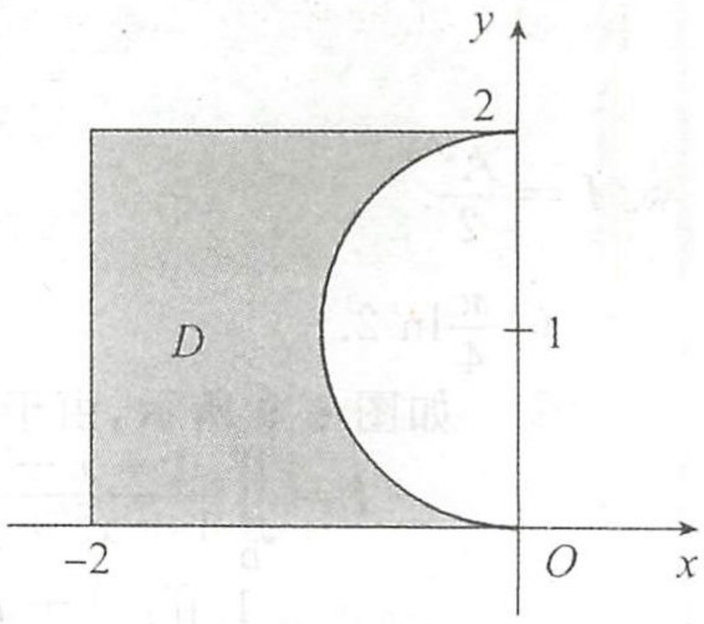


图 6-12

【注】 由于 D 关于 $y=1$ 对称，故

$$I = \iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D [(y-1)+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 0 + 2^2 - \frac{1}{2}\pi\times 1^2 = 4-\frac{\pi}{2},$$

或利用形心纵坐标为 $\bar{y}=1$，有 $I = \iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \bar{y}\cdot\left(4-\dfrac{\pi}{2}\right) = 4-\dfrac{\pi}{2}$.

(11) 2π.

解 D 如图 6-13 所示，利用极坐标，

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(2r\cos\theta+3r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16}{3}\cos^4\theta + 8\cos^3\theta\cdot\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta + 0$$

$$= \frac{32}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

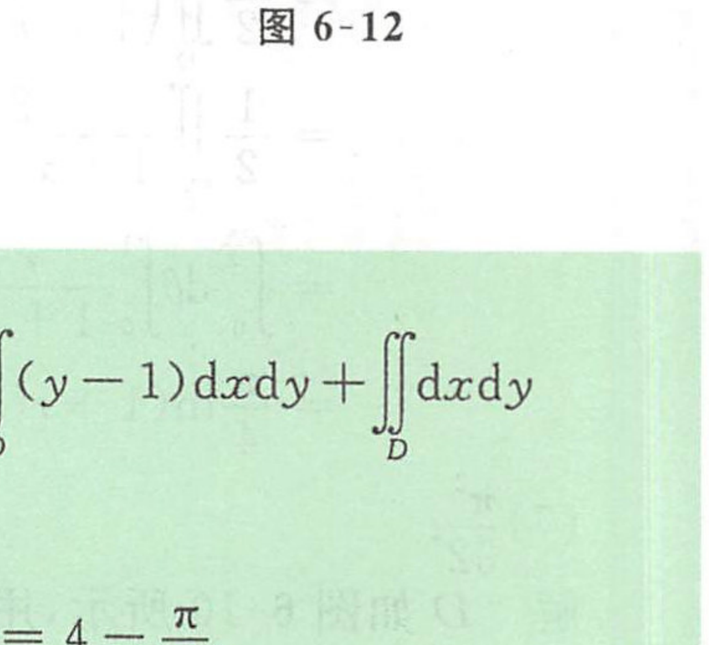


图 6-13

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

【注】 ① 考虑到被积函数关于 x,y 都是一次函数，可利用形心坐标 $(\overline{x},\overline{y})=(1,0)$.

由

$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

有 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\overline{x}\cdot\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示 D 的面积.

同理，$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\overline{y}\cdot\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以

$$I=\iint\limits_D (2x+3y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(2\overline{x}+3\overline{y})\pi\cdot 1^2=2\pi.$$

② 考虑到 D 关于直线 $x=1$ 对称，则

$$I=\iint\limits_D (2x+3y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D [2(x-1)+2+3y]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

将 $x-1$ 视为整体，它为奇函数，故 $\iint\limits_D 2(x-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，所以

$$I=2\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+3\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又 D 关于 x 轴对称，故 $3\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，于是

$$I=2\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\times\pi\times 1^2=2\pi.$$

(12) 0.

解　V 是以 $(-1,1,0)$ 为球心、$\sqrt{2}$ 为半径的球体，若视其密度为常数，则质心（形心）坐标为 $(-1,1,0)$，则

$$\overline{x}=\frac{\iiint\limits_V x\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \mathrm{d}V},\quad \overline{y}=\frac{\iiint\limits_V y\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \mathrm{d}V},\quad \overline{z}=\frac{\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \mathrm{d}V}.$$

而 $\iiint\limits_V \mathrm{d}V$ 为球的体积 $\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi$，故

$$\iiint\limits_V x\,\mathrm{d}V=\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi\times(-1)=-\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi,$$

$$\iiint\limits_V y\,\mathrm{d}V=\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi\times 1=\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi,$$

$$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V=\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi\times 0=0,$$

于是 $I=\iiint\limits_V (x+y+z)\,\mathrm{d}V=0.$

(13) $\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)R^3.$

解　xOy 坐标面上方部分立体如图 6-14 所示，则

$$V=4\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)R^3.$$

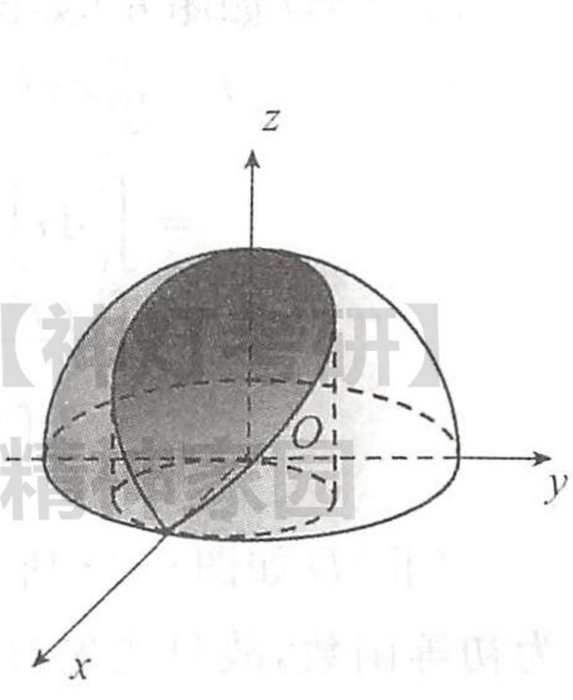


图 6-14

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(14) $\left(\dfrac{15\pi-32}{30\pi-48},0\right)$.

解 如图 6-15 所示，由对称性，知 $\bar{y}=0$. 又由于

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta} r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r}{\frac{1}{2}\pi\times 1^2+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta} r\mathrm{d}r}$$

$$=\frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta} r^2\mathrm{d}r}{\frac{1}{2}\pi+2\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(r^2\Big|_0^{1+\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{15\pi}{16}-2\right)}{\frac{5}{4}\pi-2}=\frac{15\pi-32}{30\pi-48},$$

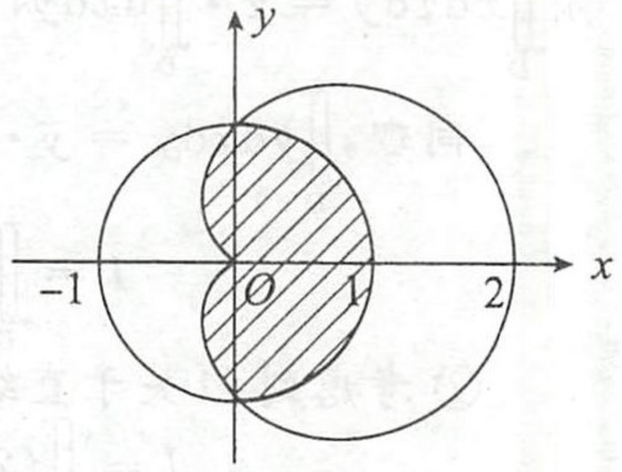


图 6-15

故形心坐标为 $\left(\dfrac{15\pi-32}{30\pi-48},0\right)$.

(15) $\dfrac{1}{44}$, $\dfrac{1}{36}$.

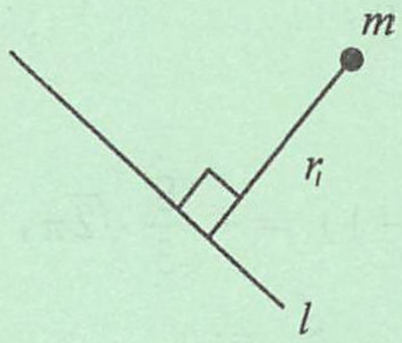
解 对 x 轴与 y 轴的转动惯量分别为 $I_x=\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $I_y=\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故

$$I_x=\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^{\frac{3}{2}}}^{x} y^2\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{3}y^3\Big|_{x^{\frac{3}{2}}}^{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{44},$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^{\frac{3}{2}}}^{x} x^2\mathrm{d}y=\frac{1}{36}.$$

【注】 质点(质量为 m)对轴 l 的转动惯量为 $I_l=m\cdot r_l^2$，其中 r_l 表示质点到轴 l 的距离.

平面区域 D，对 x 轴的转动惯量可以采用微元法：任取一个小区域 $\mathrm{d}\sigma$($\mathrm{d}\sigma$ 也表示面积)，如图 6-16 所示，看成质量集中为一点 (x,y)，则微元 $\mathrm{d}I_x=\rho\cdot y^2\mathrm{d}\sigma$($\rho$ 表示 D 的面密度)，故 $I_x=\iint\limits_D y^2\cdot\rho\mathrm{d}\sigma$.



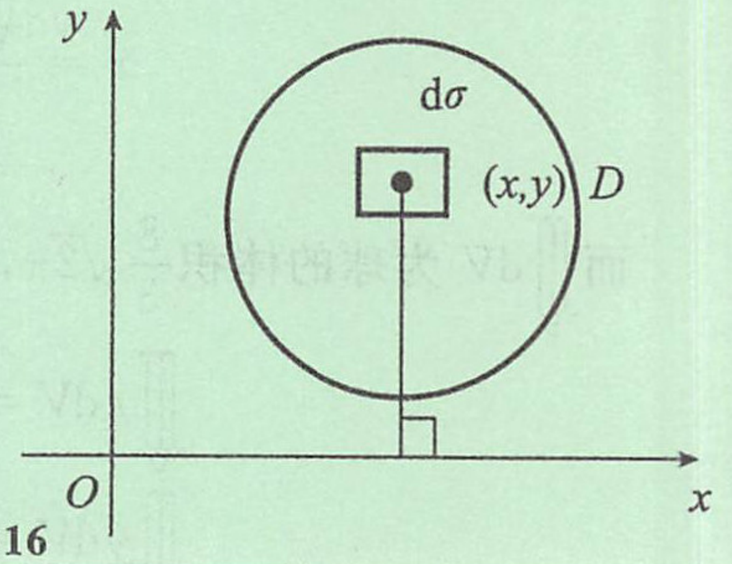


图 6-16

三、解答题

(1) 解 (Ⅰ)D 如图 6-17 所示，先对 y 积分较简便.

$$I=\iint\limits_D xy(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x} xy(x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x^2y^2}{2}-\frac{xy^3}{3}\right)\Big|_{-x}^{x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=-\frac{2}{15}.$$

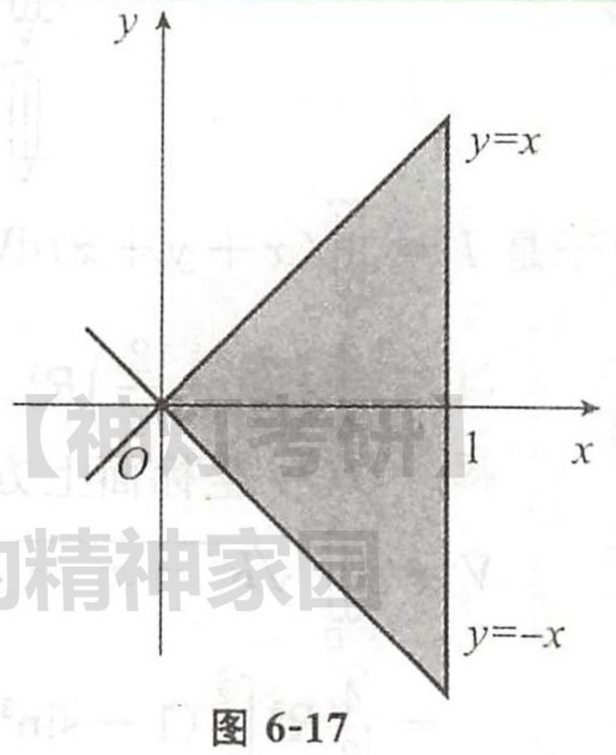


图 6-17

(Ⅱ)D 如图 6-18 所示，若先对 y 积分，则 $\int\dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$ 不能表示为初等函数，故只能先对 x 积分.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$I=\iint_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y-y^2)\mathrm{d}y=\int_0^1(1-y)\sin y\mathrm{d}y$$
$$=[-(1-y)\cos y-\sin y]\Big|_0^1=1-\sin 1.$$

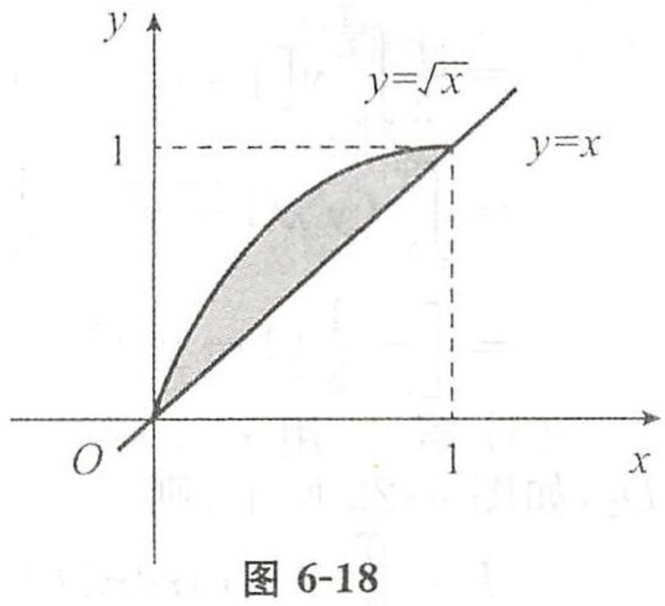


图 6-18

(Ⅲ)D 如图 6-19 所示，先对 x 积分，则

$$I=\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}}x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+y^3)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1).$$

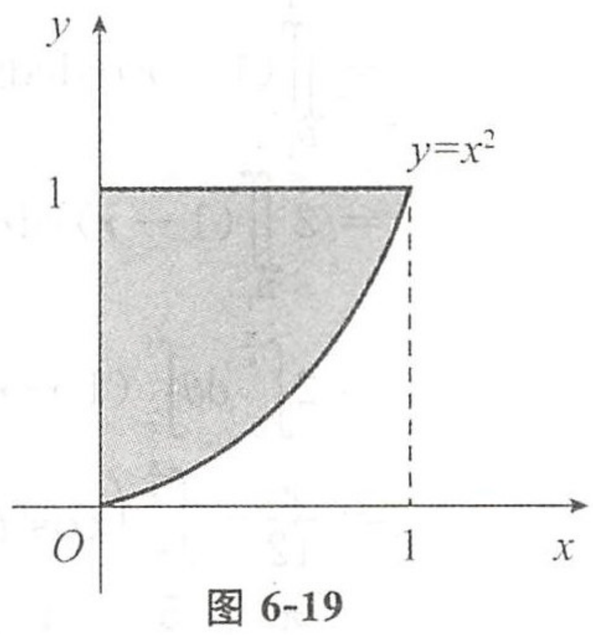


图 6-19

(Ⅳ)D 如图 6-20 所示，作辅助线 $y=-\arcsin x(-1\leqslant x\leqslant 0)$，将 D 划分为 D_1 与 D_2，则

$$I=\iint_D x(\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{记}}I_1-I_2,$$

$$I_1=\iint_D x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{D_1} x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由 D_1 关于 y 轴对称，$x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y$ 关于 x 是奇函数，故

$$\iint_{D_1} x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

同理，$\iint_{D_2} x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，故 $I_1=0$.

$$I_2=\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

根据对称性，$\iint_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 又

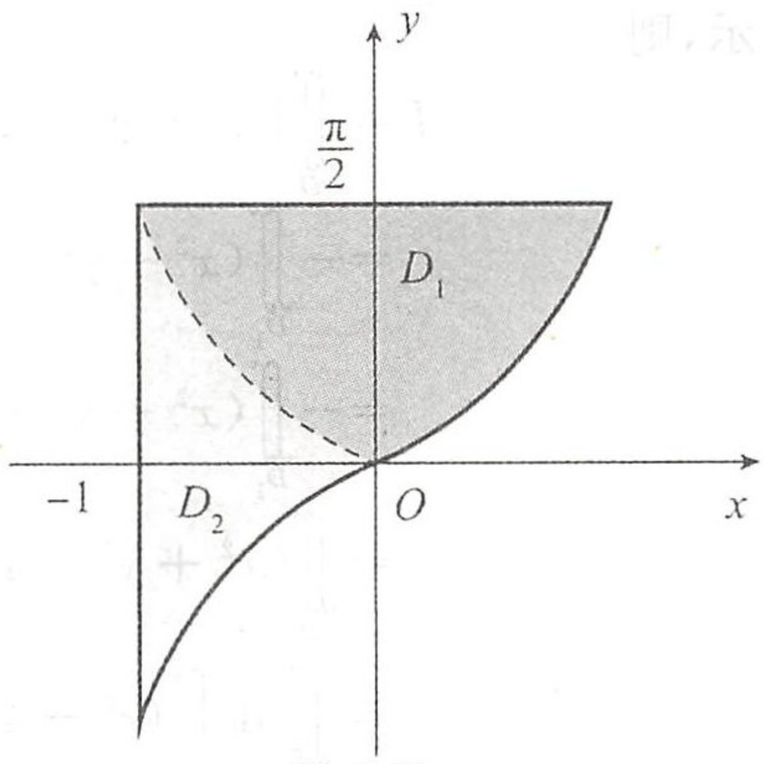


图 6-20

$$\iint_{D_2} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y\int_{-1}^{-\sin y}x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4},$$

故 $I=0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

(2) 解　由 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x^2+y^2=2x\end{cases}$ 解得交点 $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，积分区域 D 如图 6-21 所示，故

$$I=\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}xy\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} yx^2\Big|_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$$

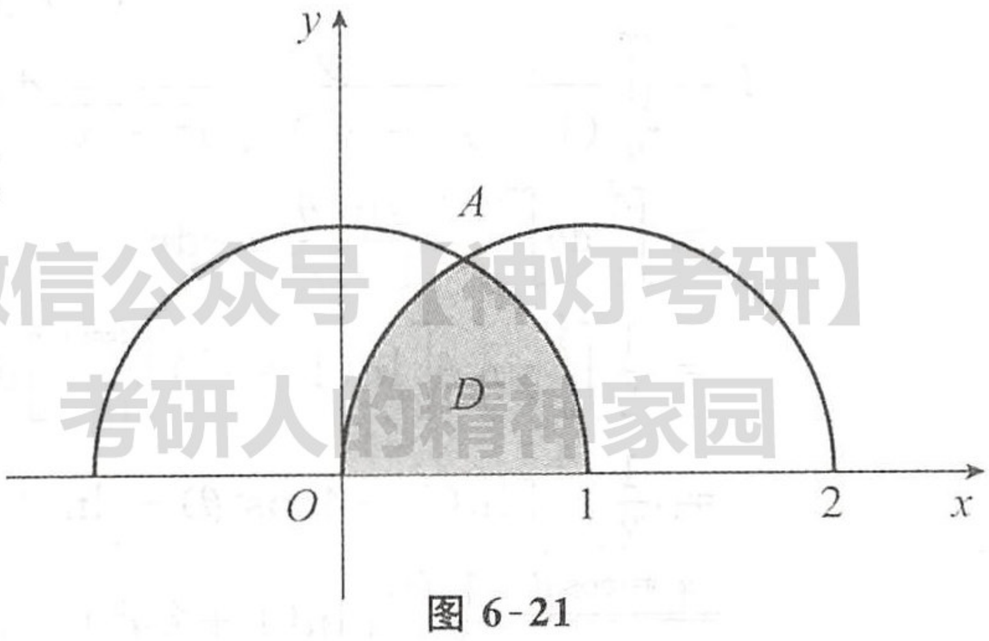


图 6-21

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y\left[1-y^2-(1-\sqrt{1-y^2})^2\right]\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(y\sqrt{1-y^2}-\frac{1}{2}y\right)\mathrm{d}y$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}y^2\right]\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{48}.$$

(3) 解 用 $x^2+y^2=1$，即 $r=1$ 将 D 划分为 D_1 与 D_2，如图 6-22 所示，则

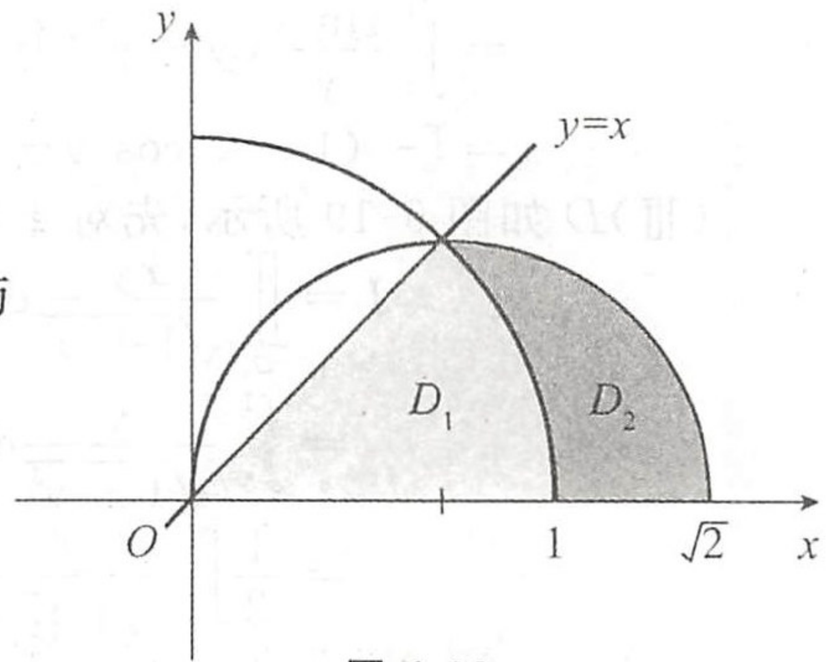


图 6-22

$$I = \iint_{D_1}(1-r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + \iint_{D_2}(r-1)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \iint_{D_1}(1-r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta - \iint_{D_2}(1-r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\iint_{D_1}(1-r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta - \iint_{D}(1-r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r)r\mathrm{d}r - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}\cos\theta}(1-r)r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{12} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\theta - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos^3\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{5}{9} - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{11}{36} - \frac{\pi}{24}.$$

(4) 解 用 $x^2+y^2=4$ 将 D 划分为 D_1 与 D_2，如图 6-23 所示，则

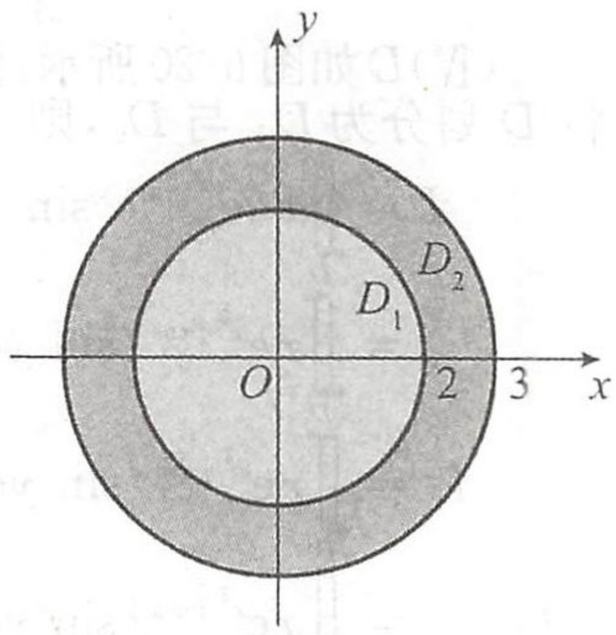


图 6-23

$$I = \iint_D |x^2+y^2-4|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_1}(x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2}(x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_1}(x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D-D_1}(x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D(x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint_{D_1}(x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3(r^2-4)r\mathrm{d}r - 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2-4)r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\left(\frac{r^4}{4}-2r^2\right)\Big|_0^3 - 4\pi\left(\frac{r^4}{4}-2r^2\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{9}{2}\pi + 16\pi = \frac{41}{2}\pi.$$

(5) 解 D 如图 6-24 所示，由 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x^2+y^2=2x,\end{cases}$ 解得交点 $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$I = \iint_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}\frac{\sin\theta}{1+r^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\left[\ln(1+r^2)\Big|_1^{2\cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}[\ln(1+4\cos^2\theta)-\ln 2]\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{u=\cos\theta} \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1[\ln(1+4u^2)-\ln 2]\mathrm{d}u$$

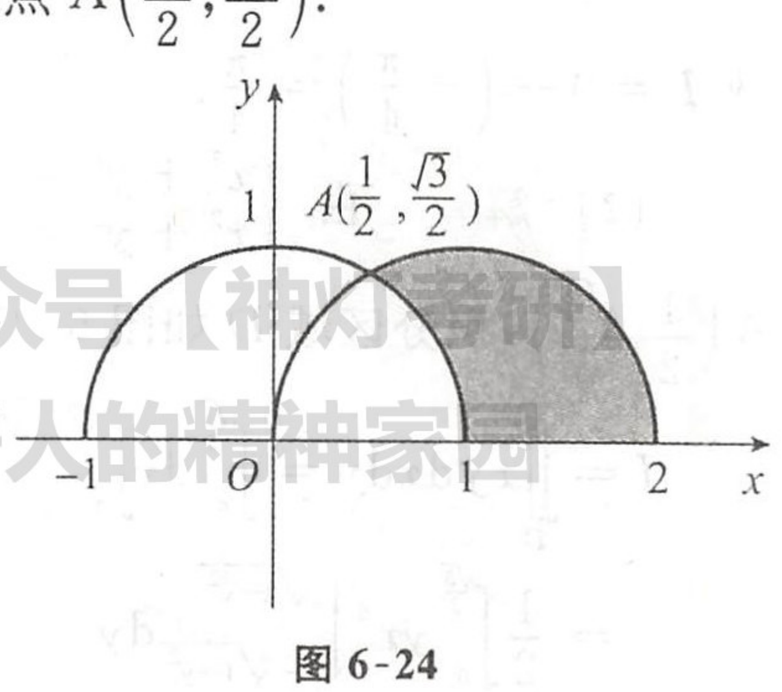


图 6-24

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= \frac{1}{2}[u\ln(1+4u^2) - 2u + \arctan 2u]\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{4}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{5}{2} - 1 + \arctan 2 - \frac{\pi}{4}\right).$$

(6) 解　如图 6-25 所示，直线 $x+y=i(i=1,2,3,4)$ 将 D 分为 4 个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$，则

$$[1+x+y] = k(k=1,2,3,4),$$

故

$$I = \iint_D [1+x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_3} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_4} 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 10.$$

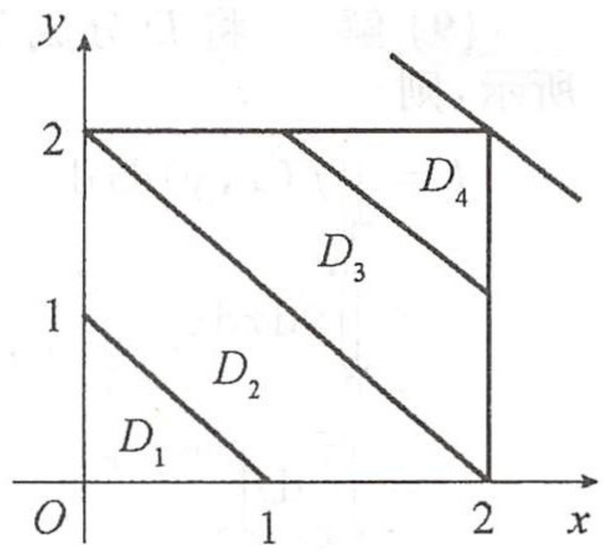


图 6-25

【注】　$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示 D 的面积.

(7) 解　用直线 $y=x$ 将 D 划分为 D_1 与 D_2，如图 6-26 所示，故

$$I = \iint_D \max\{x,y\}\cdot|\,y-x^2\,|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1} y(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} x\,|\,y-x^2\,|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又 D_2 被 $y=x^2$ 分为上、下两部分，则

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 y(y-x^2)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^x x(y-x^2)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} x(x^2-y)\mathrm{d}y = \frac{11}{40}.$$

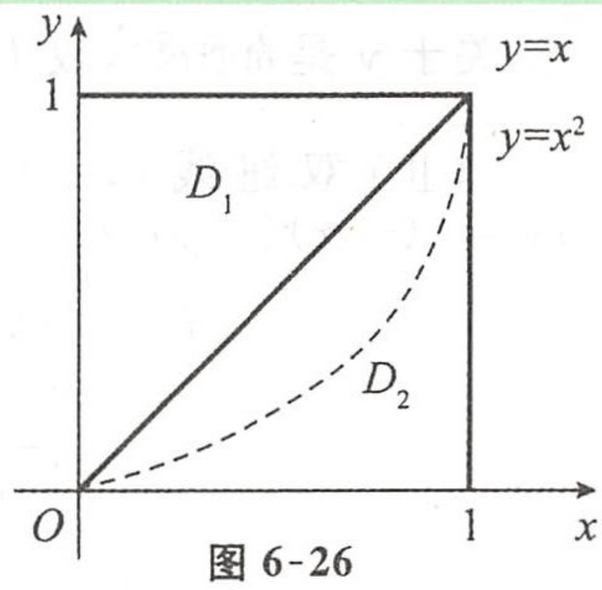


图 6-26

(8) 解　由符号函数的定义，知

$$\mathrm{sgn}(x^2-y^2+2) = \begin{cases} 1, & x^2-y^2+2>0, \\ 0, & x^2-y^2+2=0, \\ -1, & x^2-y^2+2<0, \end{cases}$$

故 $x^2-y^2+2=0$，即双曲线 $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}=1$ 将 D 划分为三个区域 D_1, D_2, D_3，如图 6-27 所示，

$$\mathrm{sgn}(x^2-y^2+2) = \begin{cases} 1, & (x,y)\in D_2, \\ -1, & (x,y)\in D_1 \cup D_3, \end{cases}$$

故

$$I = \iint_D \mathrm{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_2} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_1} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_3} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint_{D_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

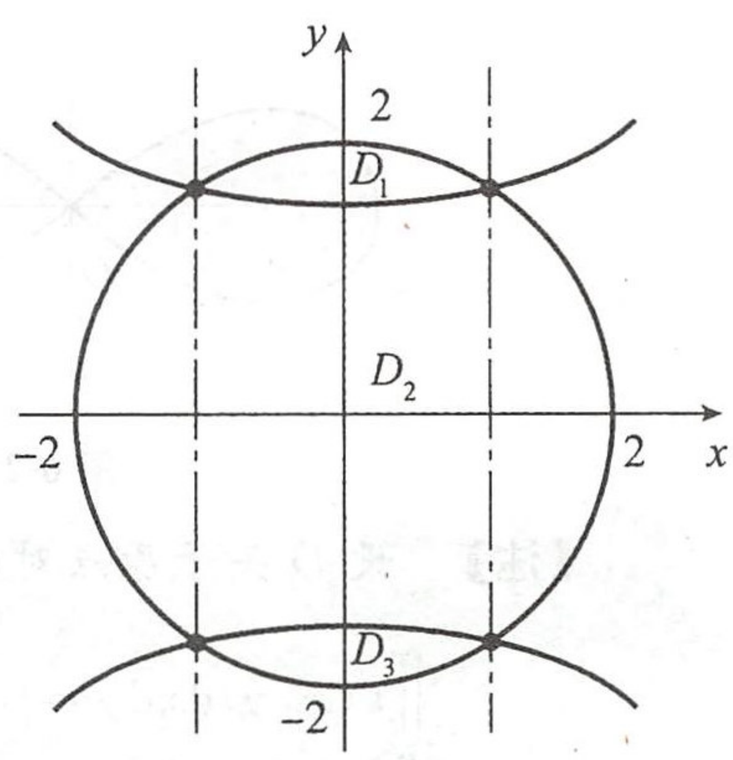


图 6-27

而

$$\iint_{D_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_1\cup D_3} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint_{D_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故

$$I = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 4\iint_{D_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\times 2^2 - 4\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$= 4\pi - 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{2+x^2} - \ln(x+\sqrt{2+x^2})\right]\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 4\pi - 4\left[\frac{2\pi}{3} - \ln(2+\sqrt{3})\right] = \frac{4\pi}{3} + 4\ln(2+\sqrt{3}).$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

(9) 解 将 D 分成 $D=D_1+D_2+D_3$，如图 6-28 所示，则

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}+\iint_{D_3}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\sec\theta}^{3\sec\theta}\frac{r}{r^4}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{9}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{9}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\pi+6-3\sqrt{3}}{54}.$$

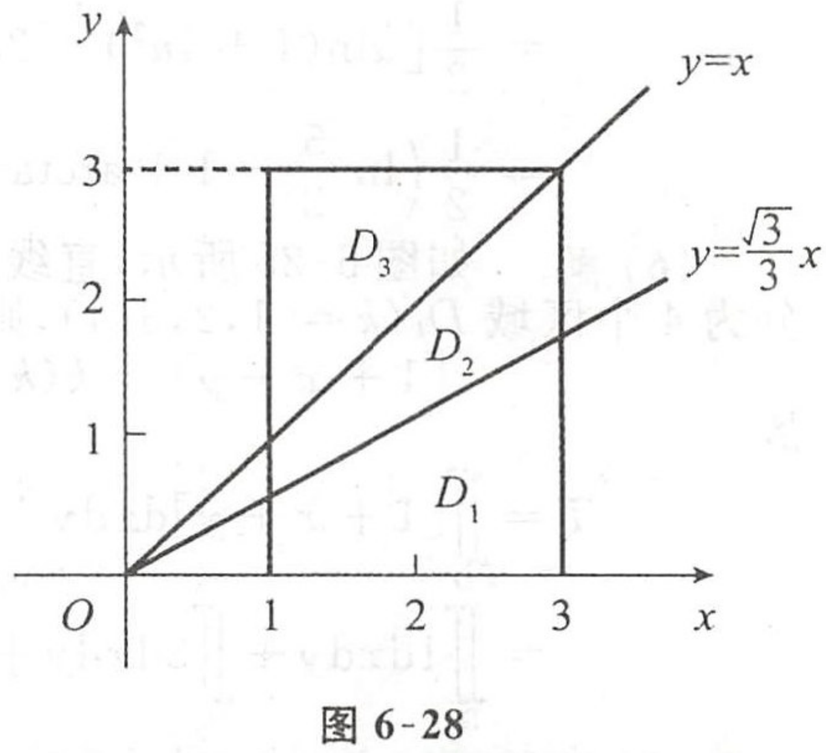


图 6-28

(10) 解 (Ⅰ) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$ 如图 6-29 所示，由于 D 关于 x 轴对称，xy 关于 y 是奇函数，故 $I=\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

(Ⅱ) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=2xy$ 如图 6-30 所示，由于 D 关于原点对称，而 $xy=(-x)(-y)$，故

$$I=\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y(D_1\text{ 是 }D\text{ 在第一象限的部分})$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}}r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{1}{6}.$$

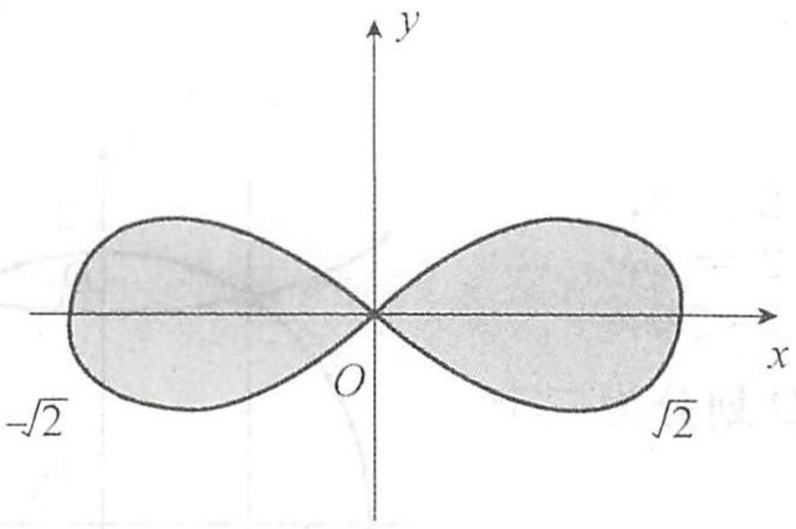


图 6-29

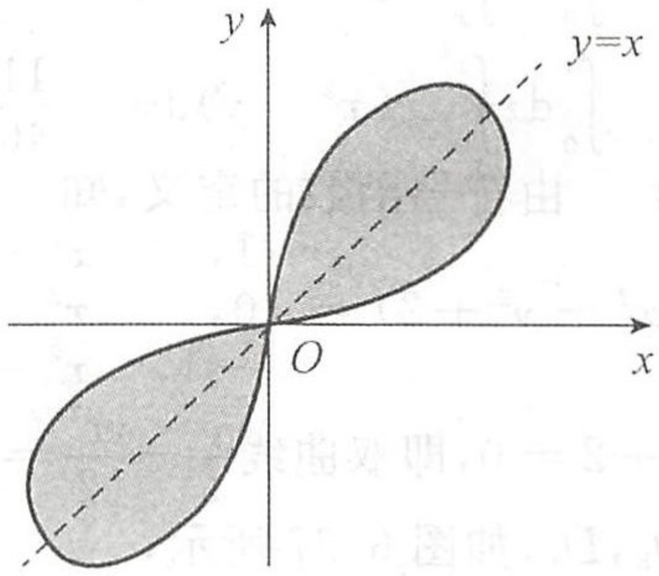


图 6-30

【注】 设 D 关于原点对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}2\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)\text{ 关于 }x,y\text{ 是偶函数},\\ 0, & f(x,y)\text{ 关于 }x,y\text{ 是奇函数},\end{cases}$$

其中 $D_1=D\cap\{(x,y)\mid x\geqslant 0\}$.

(11) 解 V 如图 6-31 所示，用球坐标

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi,$$

则 V 为 $0\leqslant r\leqslant R$，$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，故

$$I=\iiint_V z\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\sin\varphi\cdot r\cos\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^3\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\left(\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^R=\frac{\pi R^4}{8}.$$

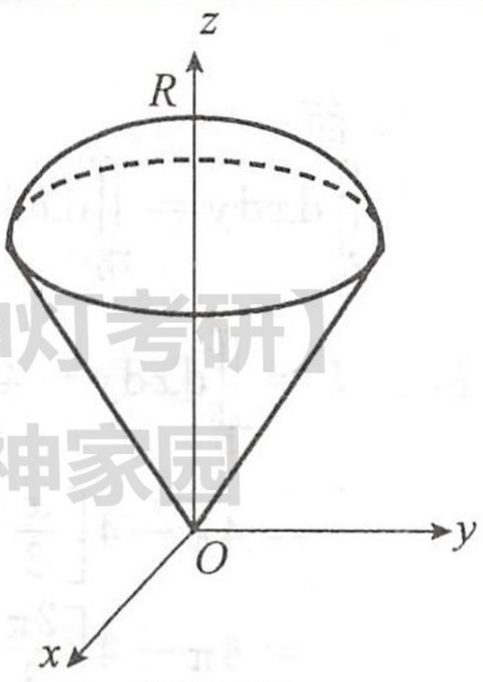


图 6-31

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(12) 解　用柱面坐标. 积分区域 V 如图 6-32 所示，

$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant r \leqslant 1$，$r-1 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-r^2}$，

故

$$I = \iiint_V z^2 \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_{r-1}^{\sqrt{1-r^2}} z^2 \mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^1 [r(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - r(r-1)^3]\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}.$$

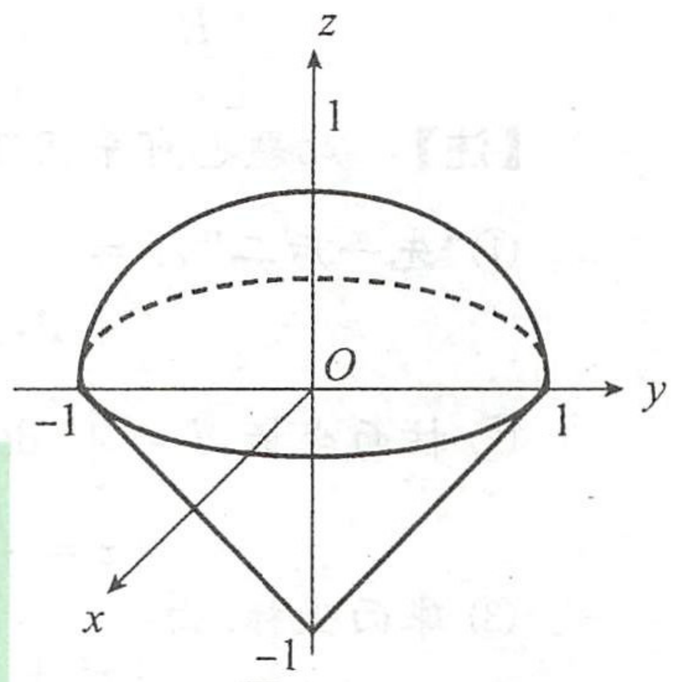


图 6-32

【注】　此题若采用球面坐标需分两个区域积分：

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^2\cos^2\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r +$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi - \cos\varphi}} r^2\cos^2\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r,$$

显然计算量较大.

(13) 解　依题意，立体体积 V 可视为以 $z = \sqrt{5-x^2-y^2}$ 为曲顶的柱体体积与以 $x^2+y^2 = 4z$ 为曲顶的柱体体积之差，利用重积分计算. 如图 6-33 所示，两曲面的交线为 $\begin{cases} z = \sqrt{5-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2 = 4z, \end{cases}$ 消去 z，得 $D: x^2+y^2 = 4$，故

$$V = \iint_D \left[\sqrt{5-x^2-y^2} - \frac{1}{4}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 (\sqrt{5-r^2} - \frac{1}{4}r^2) r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\int_0^2 (\sqrt{5-r^2} - \frac{1}{4}r^2) r\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^2 r\sqrt{5-r^2}\mathrm{d}r - \frac{\pi}{2}\int_0^2 r^3\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-4).$$

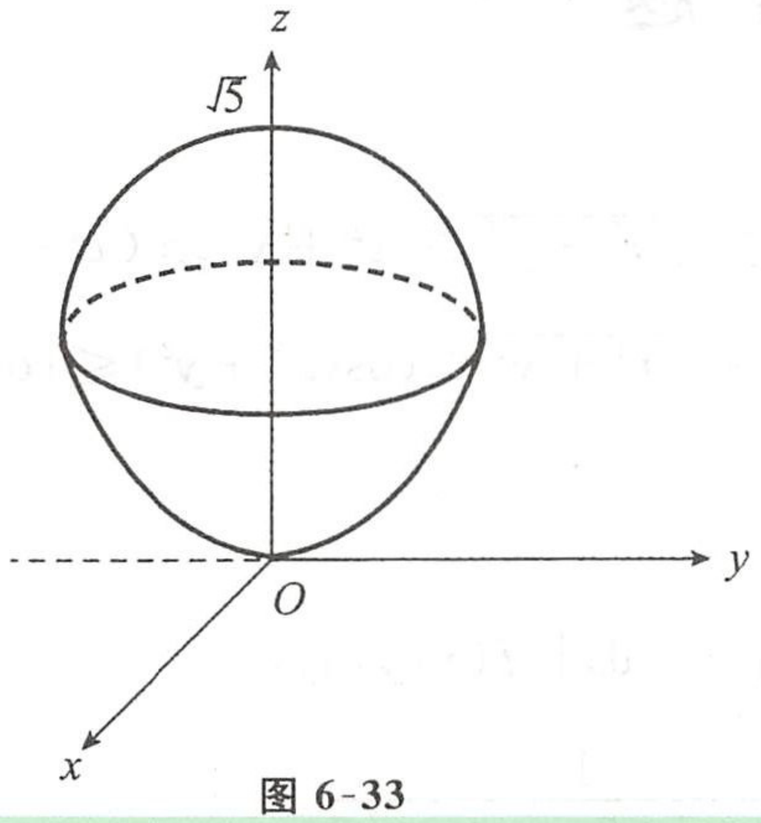


图 6-33

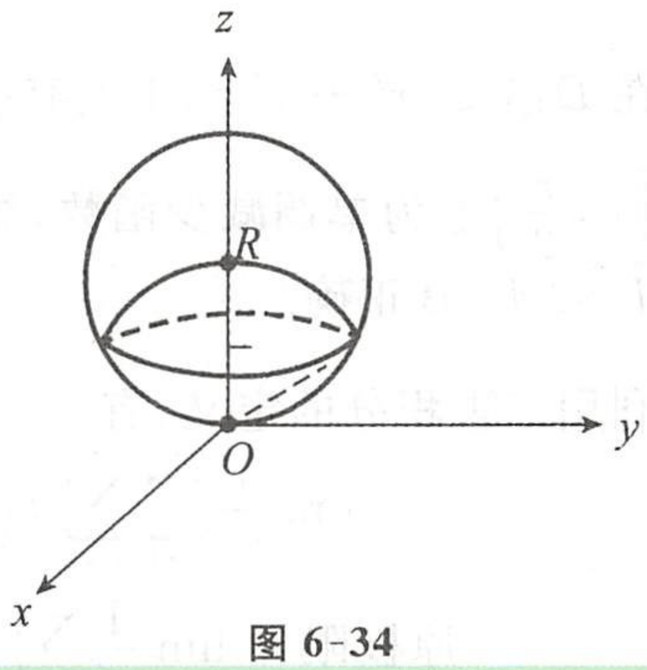


图 6-34

【注】　此题也可采用三重积分计算：$V = \iiint_V \mathrm{d}V$，用柱面坐标，有

$$V = \iiint_V \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_{\frac{1}{4}r^2}^{\sqrt{5-r^2}} \mathrm{d}z = 2\pi\int_0^2 (\sqrt{5-r^2} - \frac{1}{4}r^2) r\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-4).$$

(14) 解　如图 6-34 所示，V 由两个球面所围.

由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2, \\ x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2, \end{cases}$ 解得 $z = \frac{R}{2}$，于是积分区域 V 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

考虑到被积函数仅含 z，采用直角坐标的“先二后一”，有

$$I = \iiint_V z^2\mathrm{d}V = \int_0^{\frac{R}{2}} z^2\mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant 2Rz-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2\mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_0^{\frac{R}{2}} z^2(2Rz-z^2)\mathrm{d}z + \pi\int_{\frac{R}{2}}^R z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

$$= \pi\left[\frac{R}{2}z^4 - \frac{1}{5}z^5\right]\Big|_0^{\frac{R}{2}} + \pi\left[\frac{R^2}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5\right]\Big|_{\frac{R}{2}}^{R} = \frac{59}{480}\pi R^5.$$

【注】 此题也可采用下列方法:

①“先一后二”,$I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4}R^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2\,\mathrm{d}z$,显然积分较烦琐.

② 柱面坐标,$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} r\mathrm{d}r\int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} z^2\,\mathrm{d}z$.

③ 球面坐标. 由$\begin{cases} z = \dfrac{R}{2}, \\ x^2+y^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 \end{cases}$化为球坐标,得

$$\begin{cases} r\cos\varphi = \dfrac{R}{2}, \\ r^2\sin^2\varphi = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2, \end{cases} \text{即} \begin{cases} r\cos\varphi = \dfrac{R}{2}, \\ r\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R, \end{cases}$$

解得 $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$,故分区域积分有

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^4\,\mathrm{d}r.$$

比较以上情形,知选择“先二后一”较为方便.

综合题

一、选择题

(1)B.

解 在 $D:0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$ 上有 $\dfrac{\pi}{2} > 1 \geqslant \sqrt{x^2+y^2} \geqslant x^2+y^2 \geqslant (x^2+y^2)^2 \geqslant 0$,

且 $\cos x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上为单调减少函数,故 $0\leqslant\cos\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\cos(x^2+y^2)\leqslant\cos(x^2+y^2)^2$,

所以 $I_1 < I_2 < I_3$,B 正确.

(2)A.

解 利用二重积分的定义,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right) = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$\text{原极限} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{n}\right)\left[1+\left(\dfrac{j}{n}\right)^2\right]}$$

$$= \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int_0^1\frac{1}{1+x}\cdot\arctan y\Big|_0^1\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \frac{\pi}{4}\ln(1+x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\ln 2.$$

(3)D.

解 此题是极坐标下的二次积分化为直角坐标下的二次积分,关键是正确画图,如图 6-35 所示.

由 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,知 $0\leqslant x\leqslant 1$.

$$r = \cos\theta \Rightarrow r^2 = r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2 = x,$$

即 $y = \sqrt{x-x^2}$,故

$$I = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

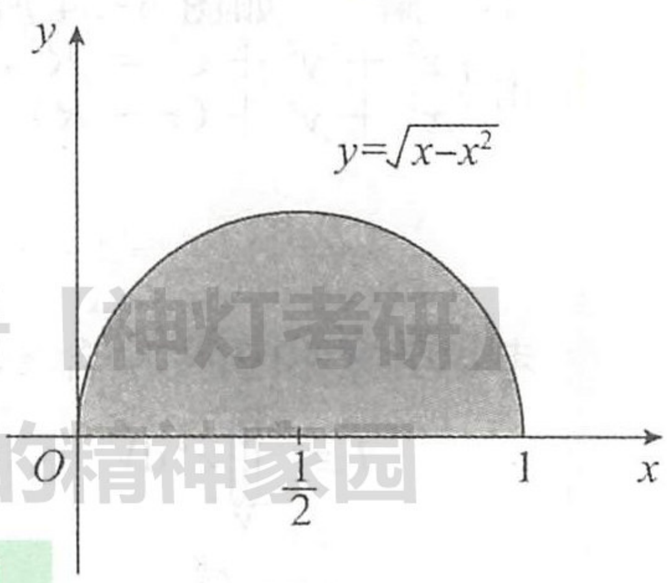


图 6-35

【注】 一般二次积分的极坐标与直角坐标的相互转化,利用

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases} \text{或} x^2+y^2 = r^2, \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

二、填空题

(1) 4π.

解　积分区域 D 如图 6-36 所示，为去掉绝对值符号，用 $y=x+\pi$，将 D 划分为 D_1 与 D_2，

$$D_1:-\pi\leqslant x-y\leqslant 0,\ D_2:-2\pi\leqslant x-y\leqslant -\pi,$$

故

$$\begin{aligned}I&=\iint_D|\sin(x-y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_1}[-\sin(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\pi}\mathrm{d}y\int_0^{y}[-\sin(x-y)]\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\int_{y-\pi}^{y}[-\sin(x-y)]\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\int_0^{y-\pi}\sin(x-y)\mathrm{d}x\\&=4\pi.\end{aligned}$$

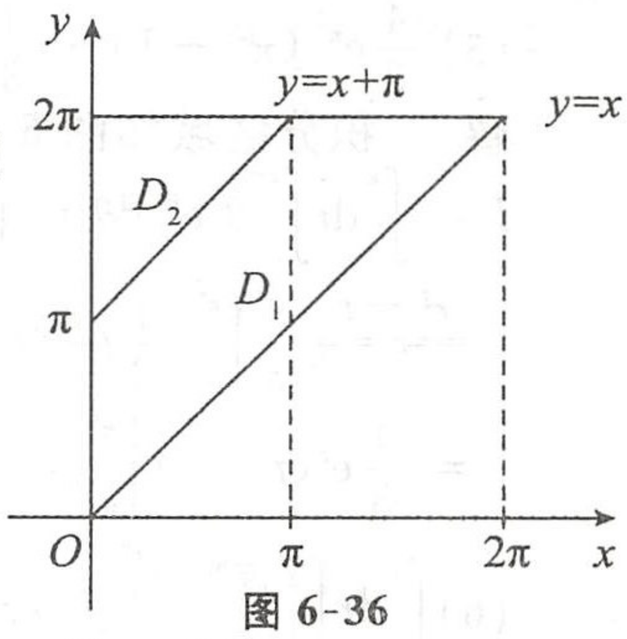


图 6-36

(2) $\dfrac{1}{4}$.

解　由已知，有

$$f(y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f(x+y)=\begin{cases}x+y, & 0\leqslant x+y\leqslant 1,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

故　$D_1=\{(x,y)\,|\,-y\leqslant x\leqslant 1-y,0\leqslant y\leqslant 1\}$，如图 6-37 所示.

在 D_1 上 $f(y)=y$，$f(x+y)=x+y$，在 D_1 以外部分 $f(y)=0$ 或 $f(x+y)=0$，故

$$\begin{aligned}I&=\iint_D f(y)f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}y(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{1-y}y(x+y)\mathrm{d}x=\int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}(x+y)^2\Big|_{-y}^{1-y}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{2}y\mathrm{d}y=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

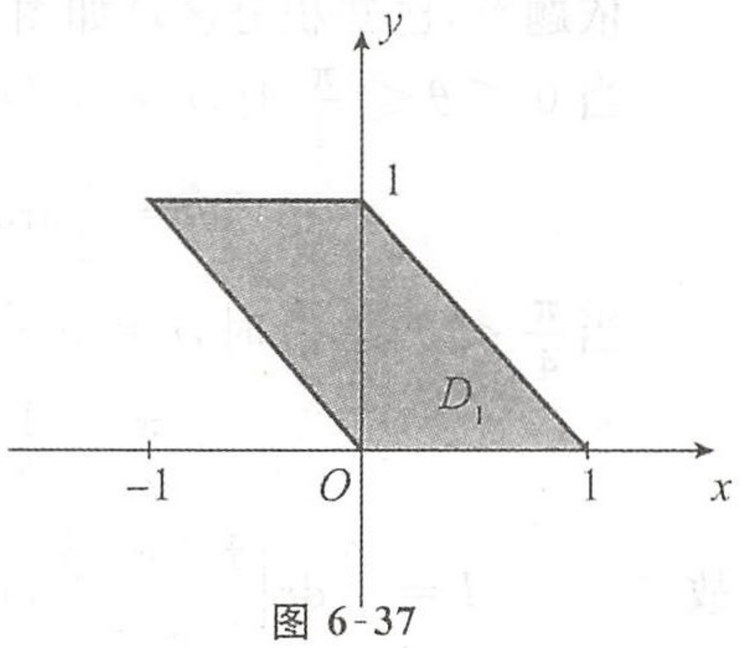


图 6-37

(3) $(\ln 2)^2$.

解　利用极坐标求解. 如图 6-38 所示，D 关于 $y=x$ 对称，且

$$D:\frac{1}{4}\cos\theta\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}\cos\theta,\ \frac{1}{4}\sin\theta\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}\sin\theta,$$

故由 $\begin{cases}r=\dfrac{1}{2}\sin\theta,\\ r=\dfrac{1}{4}\cos\theta,\end{cases}$ 解得 $\theta=\arctan\dfrac{1}{2}$，故

$$I=\iint_D\frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{4}\cos\theta}^{\frac{1}{2}\sin\theta}\frac{\mathrm{d}r}{r\sin\theta\cos\theta}$$

$$=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\ln\frac{\frac{1}{2}\sin\theta}{\frac{1}{4}\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan\theta}\ln(2\tan\theta)\mathrm{d}(\tan\theta)=(\ln 2)^2.$$

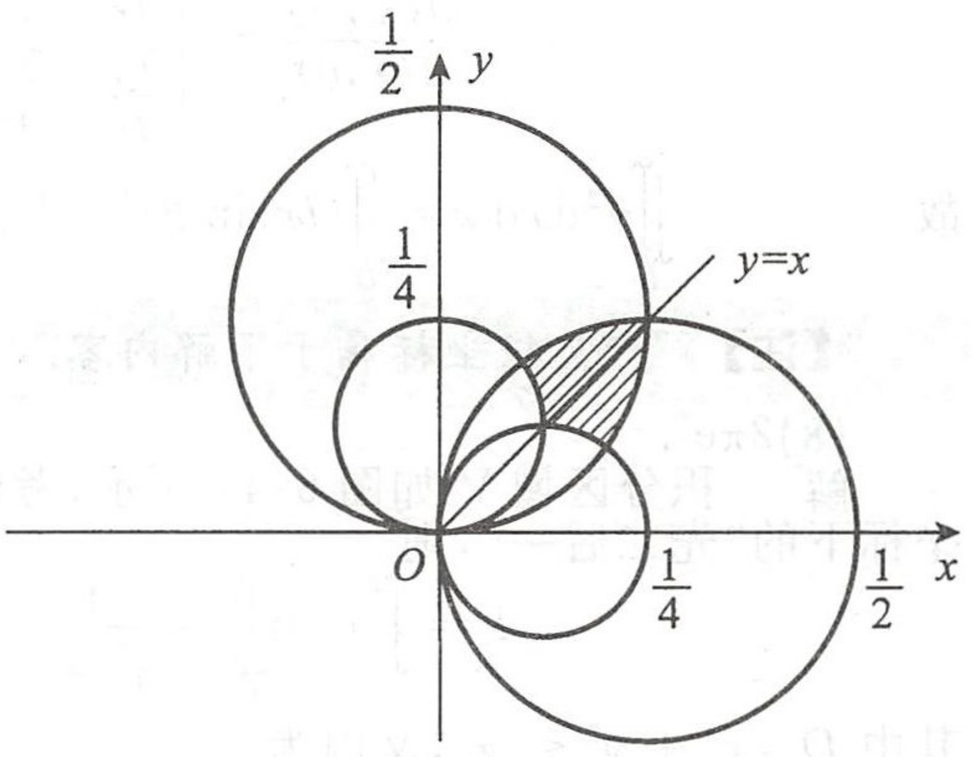


图 6-38

(4) $\dfrac{1}{4}(1-\cos 1)$.

解　交换积分顺序，得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^1 y\sin(1-x)^2\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{y^2}{2}\sin(1-x)^2\Big|_{\sqrt{x}}^1\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\sin(1-x)^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int_0^1\sin(1-x)^2\mathrm{d}[(1-x)^2]\\&=\frac{1}{4}\cos(1-x)^2\Big|_0^1=\frac{1}{4}(1-\cos 1).\end{aligned}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(5) $\frac{4}{3}e^{\pi^2}(\pi^2-1)+\frac{4}{3}$.

解 积分区域如图 6-39 所示，交换极坐标顺序，则

$$I=\int_0^{\pi}dr\int_0^{2r}\theta^2e^{r^2}d\theta=\int_0^{\pi}e^{r^2}\cdot\frac{1}{3}\theta^3\Big|_0^{2r}dr=\int_0^{\pi}e^{r^2}\cdot\frac{8}{3}r^3dr$$

$$\xlongequal{r^2=t}\frac{8}{3}\int_0^{\pi^2}\frac{1}{2}te^tdt=\frac{4}{3}\int_0^{\pi^2}te^tdt$$

$$=\frac{4}{3}e^t(t-1)\Big|_0^{\pi^2}=\frac{4}{3}e^{\pi^2}(\pi^2-1)+\frac{4}{3}.$$

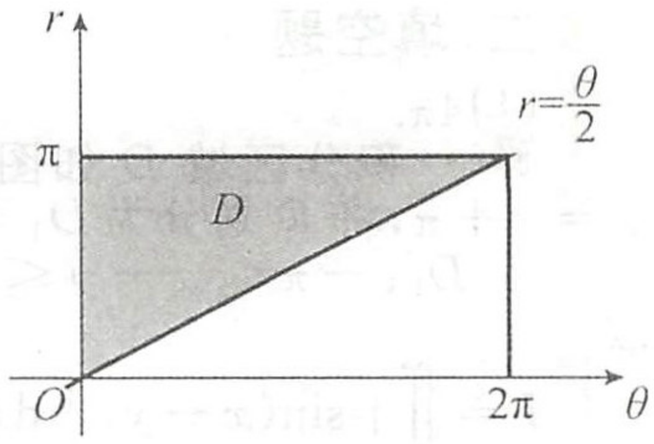


图 6-39

(6) $\int_0^a dr\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$.

解 极坐标下交换积分顺序可视 θ 为 x 轴，r 为 y 轴，用直角坐标处理(包括画图和确定积分限).

依题意，已知积分区域如图 6-40 所示.

当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，$r=a\sqrt{\sin 2\theta}$ 的反函数为

$$\theta=\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2};$$

当 $\frac{\pi}{4}<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$r=a\sqrt{\sin 2\theta}$ 的反函数为

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2},$$

故
$$I=\int_0^a dr\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta.$$

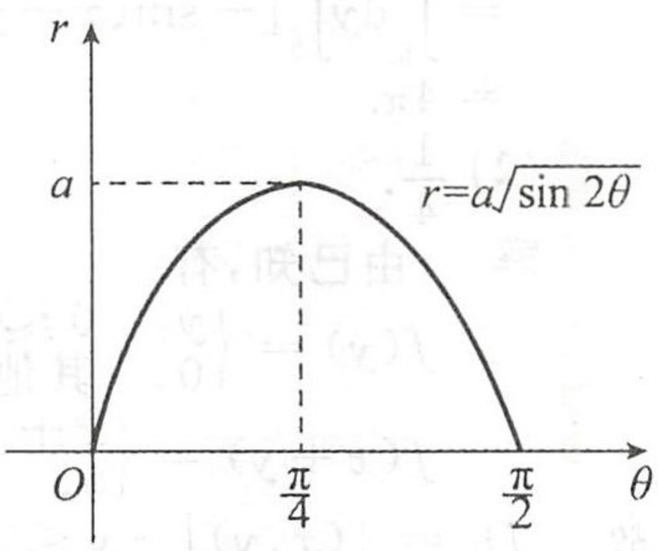


图 6-40

(7) $\frac{\pi ab^3}{4}$.

解 由于 D 为椭圆形区域，故用广义极坐标进行计算.

令 $x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta$，则 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，变为 $D':0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，其变换雅可比行列式为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}\\\frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\theta&-ar\sin\theta\\b\sin\theta&br\cos\theta\end{vmatrix}=abr,$$

故
$$\iint_D y^2dxdy=\iint_{D'}(br\sin\theta)^2\mid J\mid drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 b^2r^2\sin^2\theta\cdot abrdr=\frac{\pi ab^3}{4}.$$

【注】 广义极坐标属于了解内容.

(8) $2\pi e^2$.

解 积分区域 V 如图 6-41 所示，考虑到被积函数，可采用直角坐标下的“先二后一”，则

$$I=\int_1^2e^zdz\iint_{D_z}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$$

其中 $D_z:x^2+y^2\leqslant z^2$，又因为

$$\iint_{D_z}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{r}rdr=2\pi z,$$

所以
$$I=\int_1^2 2\pi ze^zdz=2\pi(ze^z\Big|_1^2-\int_1^2e^zdz)=2\pi e^2.$$

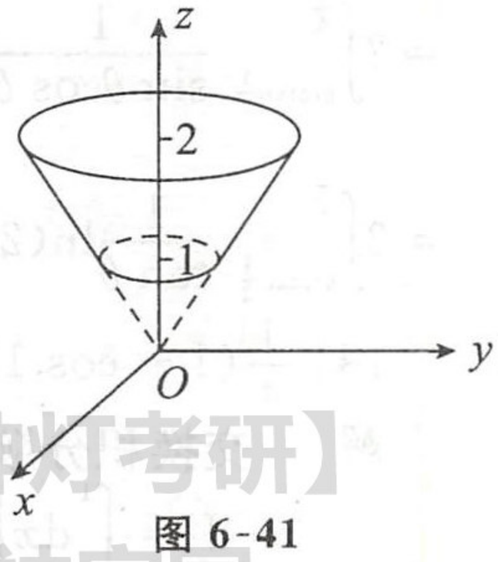


图 6-41

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

【注】 此题若采用“先一后二”或球面坐标的方法，计算量较大.

(9) $\frac{1}{4e}$.

解 直接积分比较困难，交换积分顺序，积分区域如图 6-42 所示，先对 x 积分，得

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$I=\iiint_V(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}V$$
$$=\iint_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_0^{1-y-z}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\iint_{D_{yz}}(1-y)(1-y-z)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1(1-y)\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(1-y-z)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-y)\left[\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\right]\Big|_0^{1-y}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-y)\left[1-\mathrm{e}^{-(1-y)^2}\right]\mathrm{d}y=\frac{1}{4\mathrm{e}}.$$

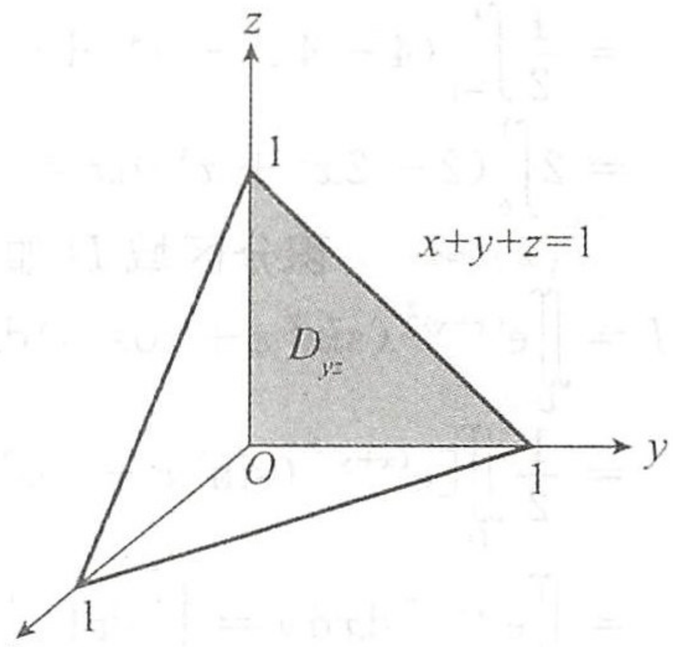


图 6-42

(10) 9π.

解　积分区域 V 如图 6-43 所示，由于被积函数仅与 z 有关，所以采用“先二后一”. D_z 为 $x^2+y^2\leqslant 1+2z^2(1\leqslant z\leqslant 2)$，$D_z$ 的面积为 $\pi(1+2z^2)$，故

$$I=\iiint_V z\,\mathrm{d}V=\int_1^2 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\pi(1+2z^2)z\mathrm{d}z=9\pi.$$

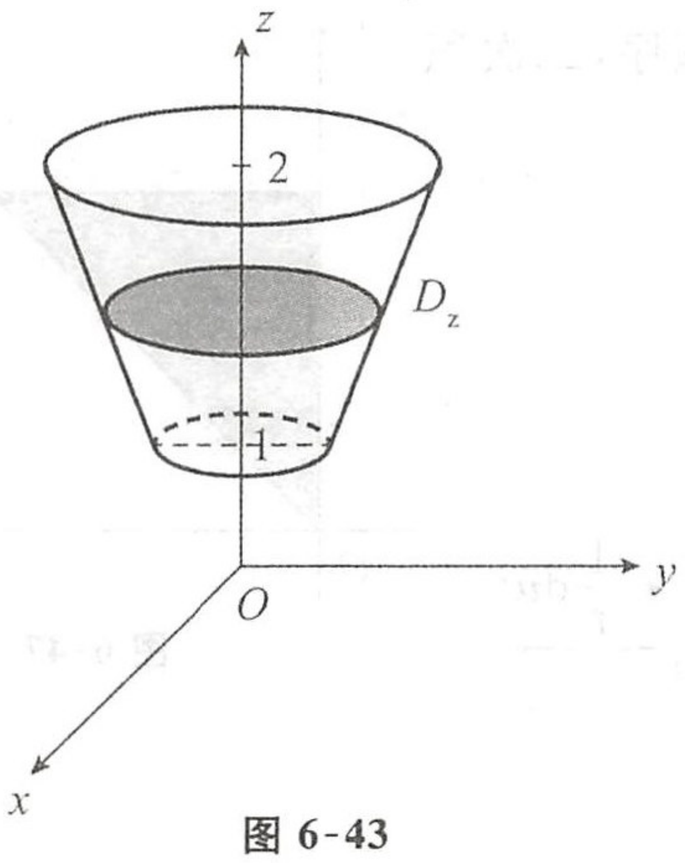


图 6-43

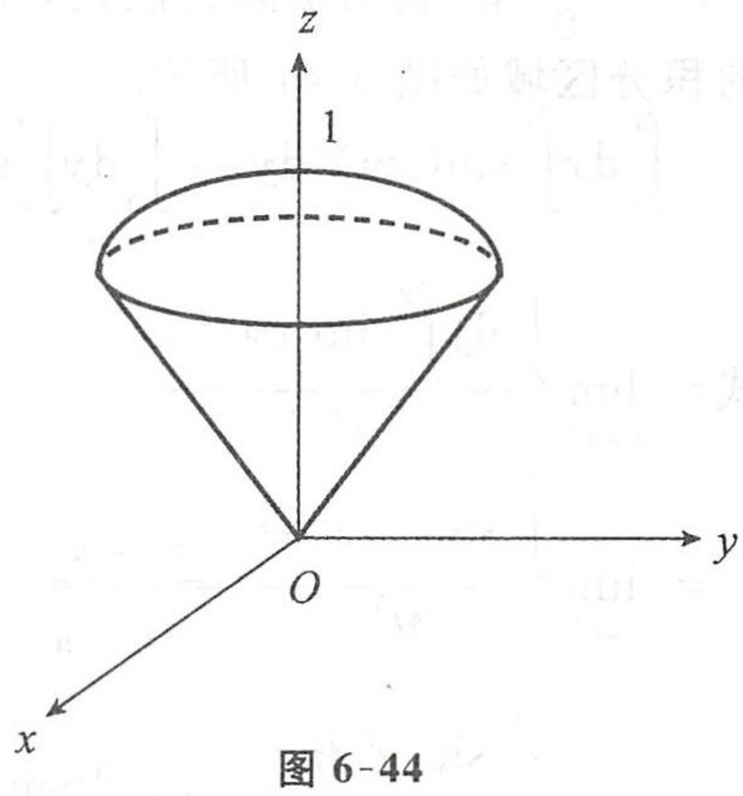


图 6-44

(11) $\frac{\pi}{8}$.

解　V 由下半圆锥与上半球面所围，如图 6-44 所示，V 关于 yOz 面对称，且被积函数 x 是奇函数，故 $\iiint_V x\,\mathrm{d}V=0$，则

$$I=\iiint_V(x+z)\mathrm{d}V=0+\iiint_V z\mathrm{d}V$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}.$$

三、解答题

(1)解　由 $y=x^2$ 将 D 划分为 D_1 与 D_2，如图 6-45 所示，则

$$I=\iint_D|y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2(y-x^2)\mathrm{d}y+\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^1\frac{1}{2}(y-x^2)^2\Big|_{x^2}^2\mathrm{d}x-\int_{-1}^1\frac{1}{2}(y-x^2)^2\Big|_0^{x^2}\mathrm{d}x$$

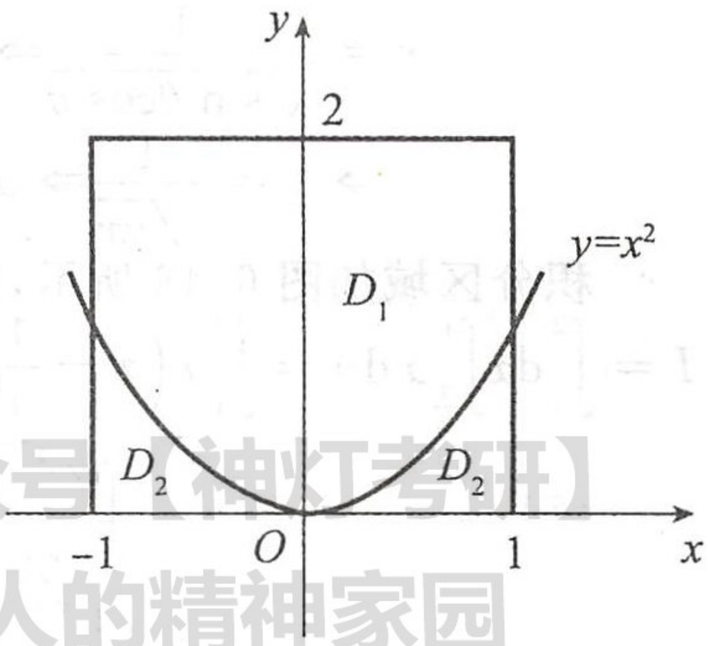


图 6-45

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(4-4x^2+x^4)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^4\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{0}^{1}(2-2x^2+x^4)\mathrm{d}x = 2\times\left(2-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{46}{15}.$$

(2) 解　积分区域 D 如图 6-46 所示，显然 D 关于直线 $x=y$ 对称，则

$$I=\iint_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D\left[\mathrm{e}^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)+\mathrm{e}^{(y+x)^2}(\sin^2 y+\cos^2 x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\cdot\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\Big|_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{(1+\tan\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\left(-\frac{1}{1+\tan\theta}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}(\mathrm{e}^3-1).$$

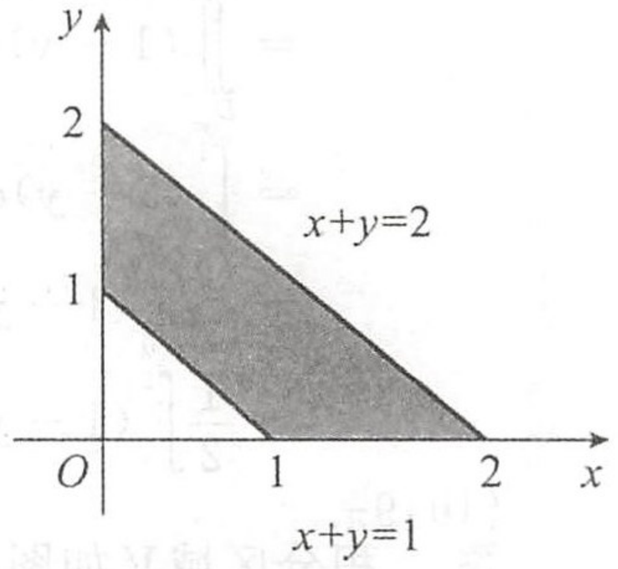


图 6-46

(3) 解　$\frac{0}{0}$ 型，利用洛必达法则，需交换积分顺序，二次积分表示的积分区域如图 6-47 所示.

$$\int_0^t\mathrm{d}x\int_x^t\sin(xy)^2\mathrm{d}y = \int_0^t\mathrm{d}y\int_0^y\sin(xy)^2\mathrm{d}x,$$

故

$$\text{原式} = \lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t\mathrm{d}y\int_0^y\sin(xy)^2\mathrm{d}x}{t^6}$$

$$= \lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t\sin(tx)^2\mathrm{d}x}{6t^5}\xrightarrow[x=\frac{1}{t}u]{tx=u}\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{t^2}\sin u^2\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}u}{6t^5}$$

$$= \lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{t^2}\sin u^2\mathrm{d}u}{6t^6} = \lim_{t\to0^+}\frac{2t\sin t^4}{36t^5} = \frac{1}{18}.$$

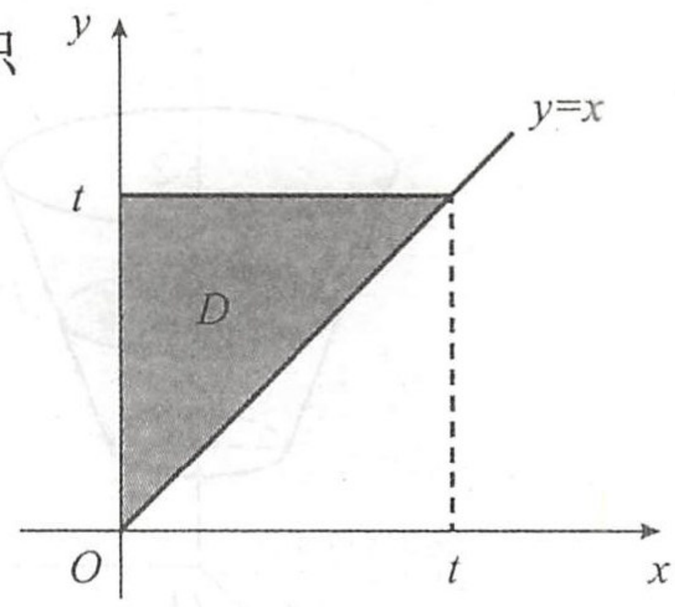


图 6-47

(4) 解　直接计算极坐标下的二次积分较烦琐，将其化为直直角坐标下的二次积分.

$$\theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow y=x;$$

$$r=\frac{2}{\cos\theta}\Rightarrow x=2;$$

$$r=\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\Rightarrow r=\frac{r}{\sqrt{r^2\sin\theta\cos\theta}}$$

$$\Rightarrow 1=\frac{1}{\sqrt{yx}}\Rightarrow xy=1.$$

积分区域如图 6-48 所示，故在直角坐标系下有

$$I=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^x x\mathrm{d}y=\int_1^2 x\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x-\int_1^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

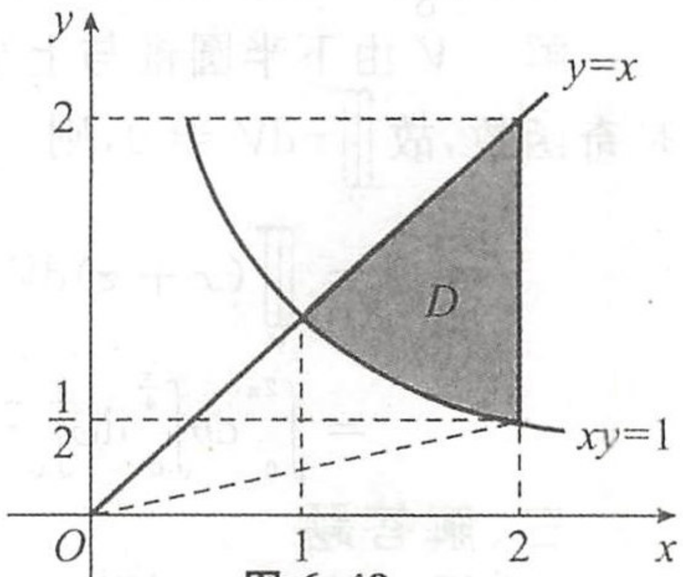


图 6-48

(5) 解

$$\int_{-\sqrt{t^2-x^2}}^{\sqrt{t^2-x^2}}\left[f(\sqrt{x^2+y^2})+2y\right]\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{t^2-x^2}}f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$$

$$\xrightarrow{\sqrt{x^2+y^2}=u} 2\int_x^t\frac{uf(u)}{\sqrt{u^2-x^2}}\mathrm{d}u,$$

故

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{t^2-x^2}}^{\sqrt{t^2-x^2}}\left[f(\sqrt{x^2+y^2})+2y\right]\mathrm{d}y}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{2\int_0^t\mathrm{d}x\int_x^t\frac{uf(u)}{\sqrt{u^2-x^2}}\mathrm{d}u}{t^3}=2\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u\int_0^u\frac{1}{\sqrt{u^2-x^2}}\mathrm{d}x}{t^3}$$

$$=\pi\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u}{t^3}=\pi\lim_{t\to0^+}\frac{tf(t)}{3t^2}=\frac{\pi}{3}.$$

(6) 解　积分区域 D 如图 6-49 所示，用极坐标. 当 $t\neq0$ 时，

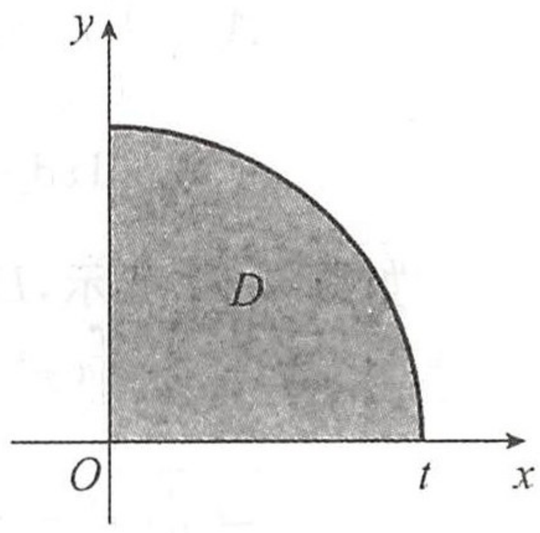


图 6-49

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant t^2\\x\geqslant0,y\geqslant0}}x\left[1-\frac{F(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^t r\cos\theta\left[1-\frac{F(r)}{r^2}\right]\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^t r^2\left[1-\frac{F(r)}{r^2}\right]\cdot\mathrm{d}r$$

$$=\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\int_0^t\left[r^2-F(r)\right]\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^t r^2\mathrm{d}r-\int_0^t F(r)\mathrm{d}r=\frac{1}{3}t^3-\int_0^t F(r)\mathrm{d}r,$$

即

$$F(t)=\frac{1}{3}t^3-\int_0^t F(r)\mathrm{d}r.\qquad①$$

① 式两边同时对 t 求导，得 $F'(t)=t^2-F(t)$，即 $F'(t)+F(t)=t^2$，该式为一阶线性微分方程，解得 $F(t)=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}t}\left[\int t^2\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right]=t^2-2t+2+C\mathrm{e}^{-t}$.

由已知 $F(0)=0$，得 $C=-2$，故 $F(t)=t^2-2t+2-2\mathrm{e}^{-t}$.

(7) 解　由已知，$f(0)=0$，$f(t)$ 是偶函数，只需讨论 $t>0$ 的情况. 用极坐标，有

$$f(t)=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r^3f(r)\mathrm{d}r+t^4=4\pi\int_0^t r^3f(r)\mathrm{d}r+t^4,$$

上式两边同时对 t 求导，得 $f'(t)=4\pi t^3f(t)+4t^3$，且 $f(0)=0$，解此一阶线性微分方程，得 $f(t)=\frac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi t^4}-1)$，$t\geqslant0$.

而 $f(t)$ 是偶函数，故在 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $f(t)=\frac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi t^4}-1)$.

(8) 解　交换积分顺序，如图 6-50 所示，

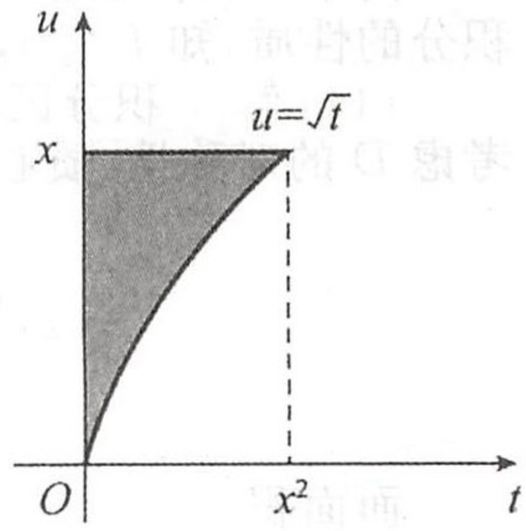


图 6-50

$$\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u=-\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\mathrm{d}t,$$

故

$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\mathrm{d}t}{\frac{1}{4}x^4}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t}{x^3}.$$

由积分中值定理，$\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t=f(\xi,x)x^2(0\leqslant\xi\leqslant x^2)$，

故　$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\frac{-f(\xi,x)x^2}{x^3}.$$

由 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则由可微的定义，有

$$f(\xi,x)=f(0,0)+f_x'(0,0)\xi+f_y'(0,0)x+o(\sqrt{x^2+\xi^2}),$$

又　$$\left|\frac{f_x'(0,0)\xi}{x}\right|\leqslant\left|\frac{f_x'(0,0)x^2}{x}\right|=|f_x'(0,0)x|,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

则 $$\lim_{x\to0^+}\frac{f'_x(0,0)\xi}{x}=0,\ \lim_{x\to0^+}\frac{o(\sqrt{x^2+\xi^2})}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{o(x)}{x}=0,$$

故 $$\lim_{x\to0^+}\frac{-f(\xi,x)x^2}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(0,0)+f'_x(0,0)\xi+f'_y(0,0)x+o(\sqrt{x^2+\xi^2})}{-x}$$
$$=-f'_y(0,0)=-1.$$

(9) 解 设$\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=A$($A$为一个数).在已知等式两边同时取二重积分,得

$$A=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(x^2+y^2-x+y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+A\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

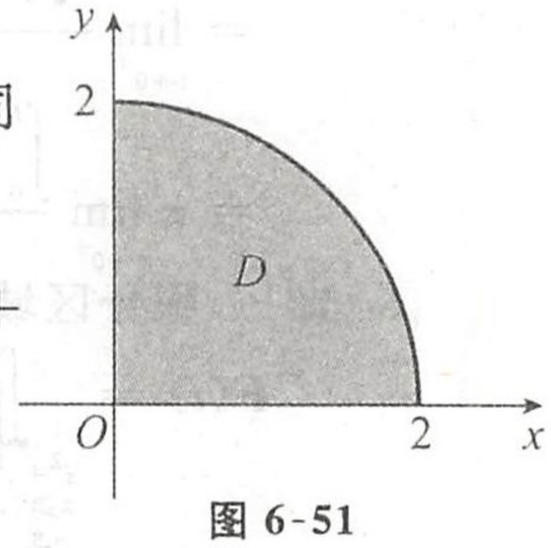


图 6-51

如图 6-51 所示,D 关于直线 $x=y$ 对称,则

$$A=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2-x+y-1+y^2+x^2-y+x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+A\cdot\frac{\pi}{4}\cdot2^2$$
$$=\iint_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\pi A$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2-1)r\mathrm{d}r+\pi A=\pi+\pi A,$$

故 $A=\frac{\pi}{1-\pi}$,所求函数为

$$f(x,y)=x^2+y^2-x+y-1+\frac{\pi}{1-\pi}.$$

(10) 证 所证不等式变形为

$$I=\int_0^1xf^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1xf(x)\mathrm{d}x\int_0^1f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant0,$$

由定积分的值与积分变量的字母无关,故

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1[xf^2(x)f(y)-xf(x)f^2(y)+yf^2(y)f(x)-yf(y)f^2(x)]\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\iint_D[f(x)f(y)(x-y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D:$0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1$ 为正方形.

由 $f(x)$ 单调减少,知$[f(x)-f(y)]$与$(x-y)$异号,而 $f(x)>0$,$f(y)>0$,根据二重积分的性质,知 $I\leqslant0$,即所证不等式成立.

(11) 解 积分区域 D 如图 6-52 所示,设其密度为常数 ρ,考虑 D 的对称性,质心在 $x=\pi$ 上,即$\overline{x}=\pi$,只需求

$$\overline{y}=\frac{\iint_D y\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

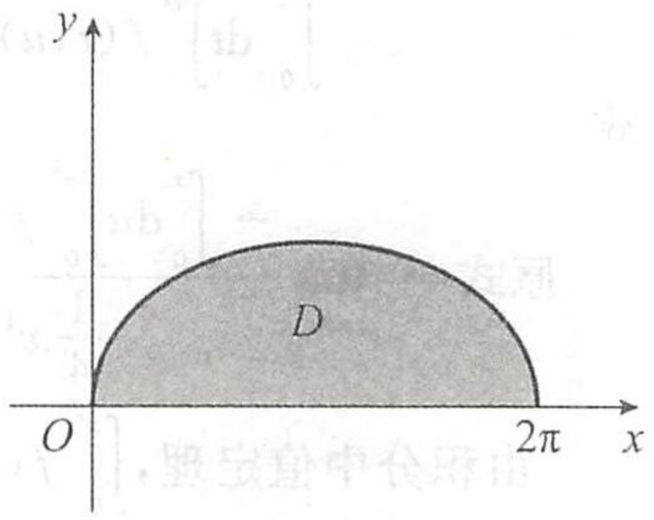


图 6-52

而面积

$$\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot(1-\cos t)\mathrm{d}t=3\pi,$$

故 $$\overline{y}=\frac{1}{3\pi}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}y\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi}[y(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=\frac{5}{6},$$

所以质心为$\left(\pi,\frac{5}{6}\right)$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(12) 解 考虑到被积函数 $3x^2+5y^2+7z^2$ 关于 z 是偶函数，对 V 补上下半球体得 $V_1: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$（如图 6-53），则 V_1 关于直线 $x=y=z$ 对称，故

$$\iiint_{V_1} x^2\,\mathrm{d}V = \iiint_{V_1} y^2\,\mathrm{d}V = \iiint_{V_1} z^2\,\mathrm{d}V = \frac{1}{3}\iiint_{V_1}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V,$$

于是

$$I = \iiint_{V}(3x^2+5y^2+7z^2)\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_{V_1}(3x^2+5y^2+7z^2)\,\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\iiint_{V_1} x^2\,\mathrm{d}V + 5\iiint_{V_1} y^2\,\mathrm{d}V + 7\iiint_{V_1} z^2\,\mathrm{d}V\right)$$

$$= \frac{15}{2}\iiint_{V_1} x^2\,\mathrm{d}V = \frac{15}{2}\cdot\frac{1}{3}\iiint_{V_1}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V$$

$$= \frac{5}{2}\iiint_{V_1}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V \xlongequal{\text{球坐标}} \frac{5}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R} r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{5}{2}\cdot 2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{R} r^4\,\mathrm{d}r = 2\pi R^5.$$

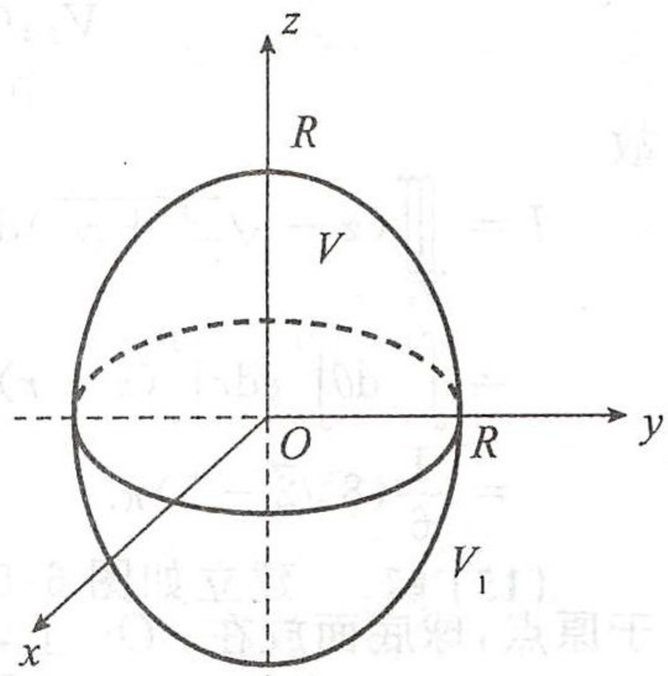


图 6-53

(13) 解 （Ⅰ）依题意，这是含参数 t 的三重积分，积分区域 V 是由圆柱面 $x^2+y^2=t^2$，平面 $z=0, z=h$ 所围，采用柱面坐标，则 $V: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant|t|, 0\leqslant z\leqslant h$.

$$F(t) = \iiint_{V}[z^2+f(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{|t|} r\,\mathrm{d}r\int_0^{h}[z^2+f(r^2)]\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\int_0^{|t|}\left[\frac{h^3}{3}+hf(r^2)\right]r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{3}h^3t^2 + 2\pi h\int_0^{|t|} f(r^2)r\,\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{r^2=u} \frac{\pi}{3}h^3t^2 + \pi h\int_0^{t^2} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

当 $t>0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{3}\pi h^3 t + 2\pi h t f(t^2)$；

当 $t<0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{3}\pi h^3 t + 2\pi h t f(t^2)$；

当 $t=0$ 时，由导数定义有

$$F_+'(0) = \lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)-F(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{\pi}{3}h^3t^2+2\pi h\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{2\pi}{3}h^3t+2\pi hf(t^2)t}{1} = 0,$$

$$F_-'(0) = \lim_{t\to 0^-}\frac{F(t)-F(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^-}\frac{\frac{\pi}{3}h^3t^2+2\pi h\int_0^{-t} f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\frac{\frac{2\pi}{3}h^3t+2\pi hf(t^2)t}{1} = 0,$$

故 $$F'(0) = F_+'(0) = F_-'(0) = 0.$$

（Ⅱ）利用洛必达法则，有

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{2}{3}\pi h^3 t + 2\pi h t f(t^2)}{2t} = \frac{\pi}{3}h^3 + \pi h f(0).$$

(14) 解 去绝对值. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 将 V 分成两部分（如图 6-54）. 利用柱面坐标，得

$$V_1:\begin{cases} z^2\geqslant x^2+y^2, \\ z=0, \\ z=1, \end{cases} \qquad V_2:\begin{cases} z^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 2, \\ z=0, \\ z=1, \end{cases}$$

即 $$V_1: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 1, r\leqslant z\leqslant 1,$$

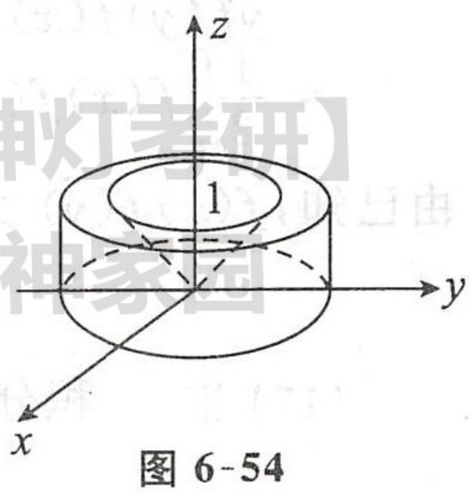


图 6-54

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

$$V_2:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant r\ 及$$
$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,1\leqslant r\leqslant\sqrt{2},0\leqslant z\leqslant 1,$$

故

$$\begin{aligned}I&=\iiint_{V_1}(z-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{V_2}(\sqrt{x^2+y^2}-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1(z-r)\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^r(r-z)\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\int_0^1(r-z)\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{6}(8\sqrt{2}-5)\pi.\end{aligned}$$

(15) 解 建立如图 6-55 所示的直角坐标系,将球心置于原点,球底面放在 xOy 上,则球面方程为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

又 AB 直线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{-3}=1,\\ x=0,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}z=\dfrac{3}{a}y-3,\\ x=0,\end{cases}$ 绕 z 轴旋转得到 $z=\dfrac{3}{a}\sqrt{x^2+y^2}-3$,即为圆锥面方程.

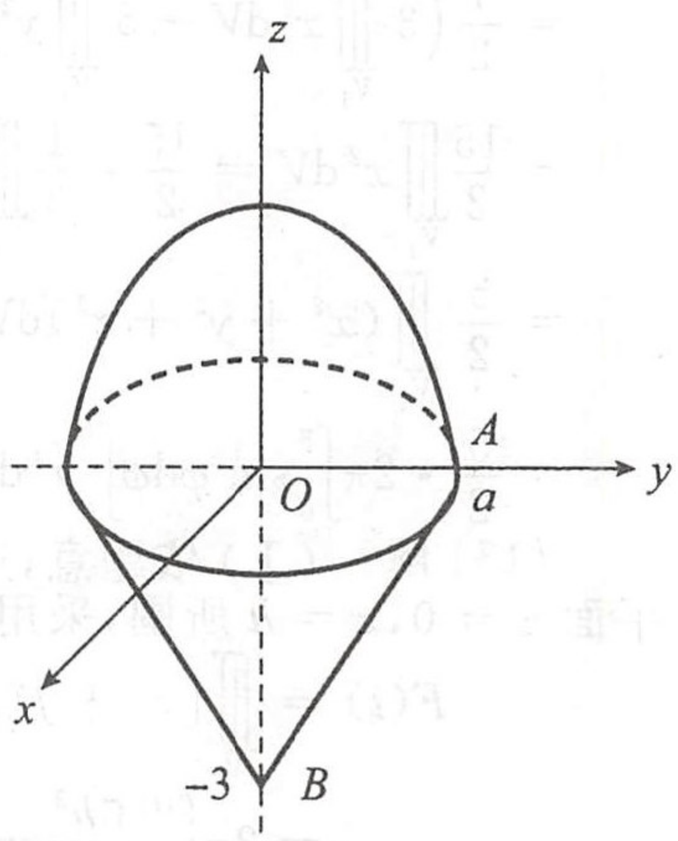


图 6-55

由已知条件,质心坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,0)$,故

$$\bar{z}=\frac{\iiint_V z\rho\mathrm{d}V}{\iiint_V\rho\mathrm{d}V}=\frac{\iiint_V z\mathrm{d}V}{\iiint_V\mathrm{d}V}=0(\text{常数}\rho\text{为物体的密度}),$$

从而有 $\iiint_V z\mathrm{d}V=0$.

考虑到上部分为半球体,下部分为圆锥体,故分别采用球坐标和柱坐标计算,

$$\begin{aligned}\iiint_V z\mathrm{d}V&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{\frac{3}{a}r-3}^0 z\mathrm{d}z\\&=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a^4}{4}-\pi\left(\frac{9}{4a^2}\cdot a^4-6a^2+\frac{9}{2}a^2\right)\\&=\frac{\pi}{4}a^2(a^2-3)=0,\end{aligned}$$

解得 $a=\sqrt{3}$.

(16) 证 积分区域 D 如图 6-56 所示,D 关于直线 $y=x$ 对称,由轮换对称性,得

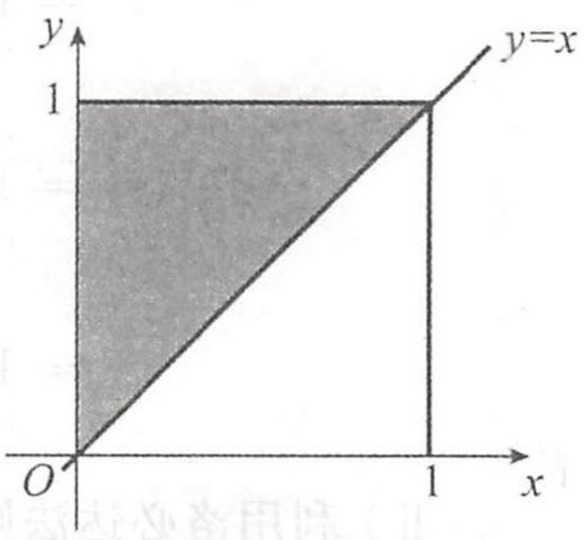


图 6-56

$$\begin{aligned}&\iint_D xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D yf(y)f(x)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint_D\{xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]+\\&\quad yf(y)f(x)[f(y)-f(x)]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint_D f(x)f(y)(x-y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

由已知,$f(x)f(y)>0$,考虑到 $f(x)$ 单调减少,故 $(x-y)[f(x)-f(y)]<0$,于是

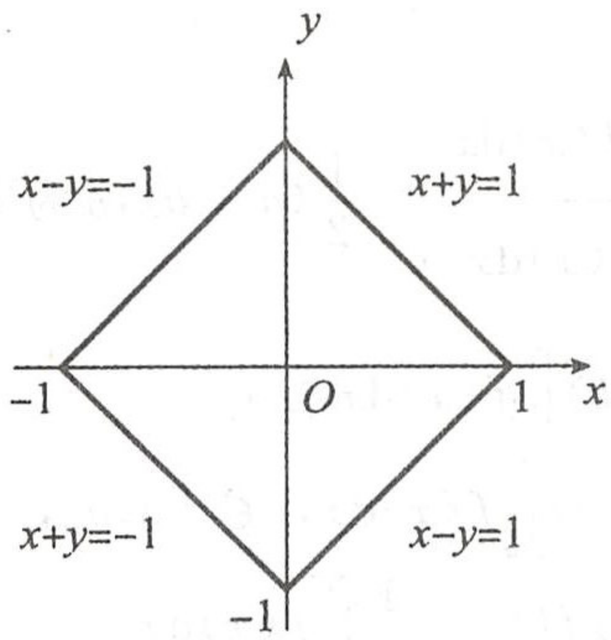
$$\iint_D xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 0.$$

(17) 证 积分区域如图 6-57(a) 所示,

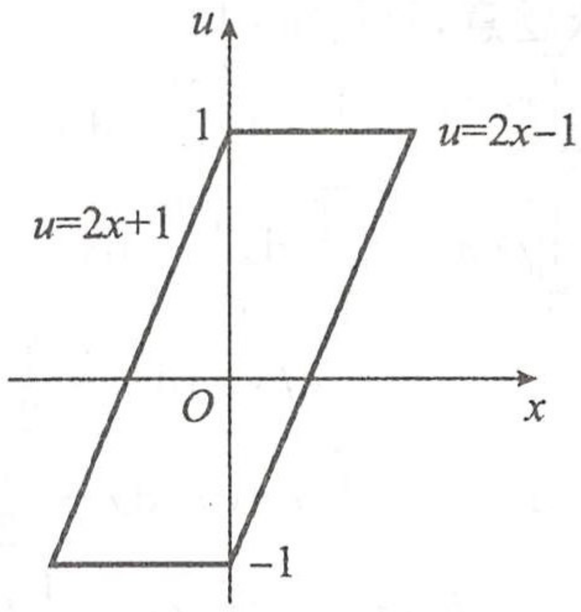
微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！



(a)



(b)

图 6-57

$$\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{x+1}f(x+y)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}f(x+y)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{x+y=u}\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1+2x}f(u)\mathrm{d}u+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{2x-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u.$$

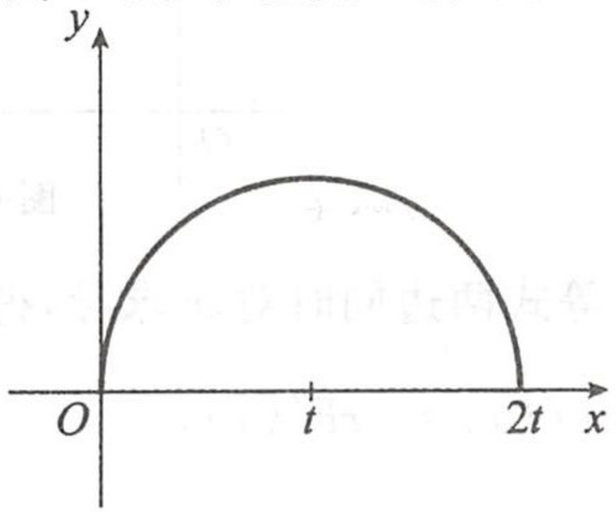
如图 6-57(b) 所示，在 xOu 坐标下，交换积分顺序，则

$$\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{\frac{u-1}{2}}^{\frac{u+1}{2}}f(u)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u.$$

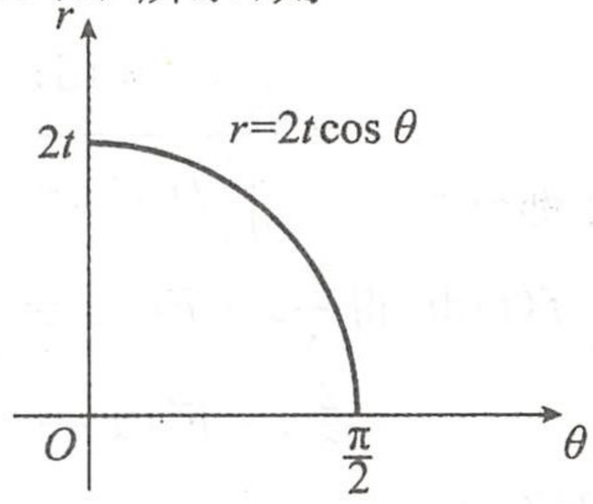
(18) 解　积分区域如图 6-58(a) 所示，用极坐标，有

$$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t\cos\theta}f(r)\cdot r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2t\cos\theta}f(r)r^2\mathrm{d}r.$$

交换积分顺序，可视在直角坐标下处理，如图 6-58(b) 所示，则



(a)



(b)

图 6-58

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2t\cos\theta}f(r)r^2\mathrm{d}r=\int_0^{2t}r^2f(r)\mathrm{d}r\int_0^{\arccos\frac{r}{2t}}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2t}r^2f(r)(-\cos\theta)\Big|_0^{\arccos\frac{r}{2t}}\mathrm{d}r=\int_0^{2t}r^2f(r)\left(1-\frac{r}{2t}\right)\mathrm{d}r,$$

故

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^4}\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t\int_0^{2t}r^2f(r)\mathrm{d}r-\frac{1}{2}\int_0^{2t}r^3f(r)\mathrm{d}r}{t^5}=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{2t}r^2f(r)\mathrm{d}r}{5t^4}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{2(2t)^2f(2t)}{20t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{4}{5}\frac{f(2t)-f(0)}{2t}=\frac{4}{5}f'(0).$$

【注】 ① 此题考虑极坐标下交换积分顺序，主要是由于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2t\cos\theta}f(r)r^2\mathrm{d}r$ 中对 r 积分的结果会有 θ，故不能先计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta$，即不能将其化为一元积分.

② 极坐标下交换积分顺序，可视 θ 为 x 轴，r 为 y 轴，在直角坐标 θOr 中画出积分区域，按直角坐标确定其积分限.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(19) 证 依题意，只需证明

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho\,\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_a^b x\,\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}{\int_a^b \mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}=\frac{\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}\geqslant\frac{1}{2}(a+b),\rho\text{为常数},$$

即证明 $$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(a+b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

令 $$F(t)=\int_a^t xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(a+t)\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x,t\in[a,b],$$

则 $$F'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}(a+t)f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$F''(t)=\frac{1}{2}(t-a)f'(t)\geqslant 0,$$

故 $F'(t)$ 单调增加，又 $F'(a)=0$，所以 $F'(t)\geqslant F'(a)=0$，即 $F(t)$ 单调增加.

又 $F(a)=0$，故 $F(t)\geqslant F(a)=0$，即 $\bar{x}\geqslant\frac{1}{2}(a+b)$.

拓展题

解答题

(1) 解 (Ⅰ) 如图 6-59 所示，

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}{\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2}{3}a,$$

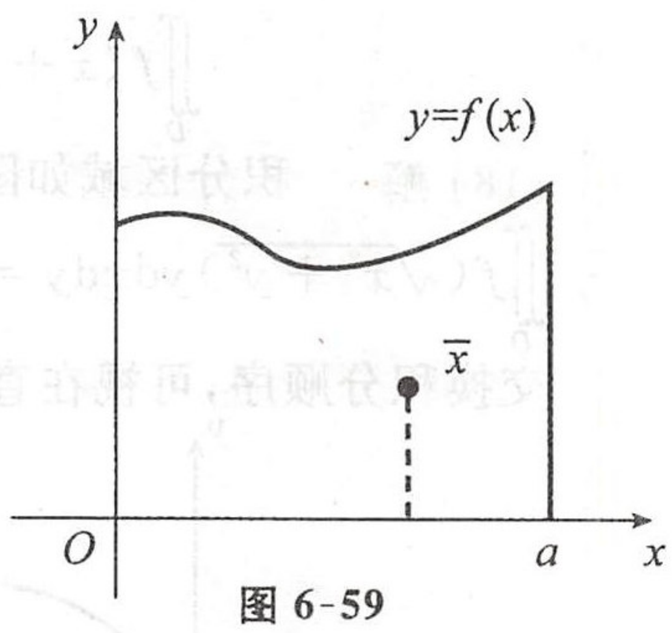


图 6-59

由 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，得 $\frac{2}{3}x\cdot F(x)=\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$，等式两边同时对 x 求导，得

$$\frac{2}{3}x\cdot F'(x)+\frac{2}{3}F(x)=xf(x)=xF'(x),$$

即 $F'(x)=\frac{2F(x)}{x}$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $F'(x)=\frac{2F(x)}{x}$，即

$$F'(x)-\frac{2}{x}F(x)=0,$$

解此一阶线性齐次微分方程，得通解为

$$F(x)=C_1\cdot \mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x}=C_1x^2(C_1\text{为任意常数}),$$

故 $f(x)=F'(x)=2C_1x=Cx(C\text{为任意常数})$.

(2) 解 积分区域 D 如图 6-60 所示，在直角坐标下，

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 2\pi,0\leqslant x\leqslant x(y)\}.$$

这里 $x=x(y)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1-\cos t,\\ y=t-\sin t\end{cases}$ 确定.

$$I=\iint\limits_D(2x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 2x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

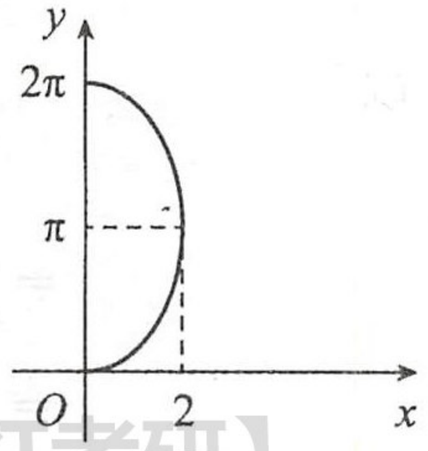


图 6-60

又

$$\iint\limits_D 2x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}y\int_0^{x(y)}2x\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}x^2(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\{x[y(t)]\}^2\cdot y'(t)\,\mathrm{d}t$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= \int_0^{2\pi} [x(t)]^2 \cdot y'(t)\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal[y=t-\sin t]{x=1-\cos t} \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \cdot (1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left(2\sin^2 \frac{t}{2}\right)^3 \mathrm{d}t$$

$$= 8\int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2}\mathrm{d}t \xlongequal{\frac{t}{2}=u} 16\int_0^{\pi} \sin^6 u\mathrm{d}u$$

$$= 16 \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u\mathrm{d}u = 32 \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 5\pi,$$

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} y\mathrm{d}y \int_0^{x(y)} \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} y \cdot x(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} y(t) \cdot x(t) \cdot y'(t)\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal[y=t-\sin t]{x=1-\cos t} \int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-\cos t)^2 \mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{t=u+\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (u+\pi+\sin u)(1+\cos u)^2 \mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (u+\sin u)(1+\cos u)^2 \mathrm{d}u + \pi\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos u)^2 \mathrm{d}u$$

$$= 0 + \pi\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos u)^2 \mathrm{d}u(\text{利用奇函数})$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} (1+\cos u)^2 \mathrm{d}u$$

$$= 8\pi\int_0^{\pi} \cos^4 \frac{u}{2}\mathrm{d}u \xlongequal{u=2s} 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 s\mathrm{d}s$$

$$= 16\pi \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 3\pi^2,$$

故 $I = 5\pi + 3\pi^2$.

【注】 由于 D 关于直线 $y=\pi$ 对称，故区域 D 的形心位于 $y=\pi$ 上，即形心的纵坐标 $\bar{y}=\pi$.

由形心公式，知 $\bar{y} = \dfrac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$，则

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \bar{y} \cdot \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\int_0^{2\pi} \mathrm{d}y\int_0^{x(y)} \mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^{2\pi} x(y)\mathrm{d}y = \pi\int_0^{2\pi} x(t) \cdot y'(t)\mathrm{d}t$$

$$= \pi\int_0^{2\pi} (1-\cos t) \cdot (1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= \pi\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \mathrm{d}t = 4\pi\int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\frac{t}{2}=u} 8\pi\int_0^{\pi} \sin^4 u\mathrm{d}u = 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u\mathrm{d}u$$

$$= 16\pi \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 3\pi^2.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

第七章 微分方程及其应用

基础题

一、选择题

(1)A.

解 $\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=0$ 为可分离变量方程,故 $ydy+xdx=0$,积分得 $x^2+y^2=C_1$,$C_1\geqslant 0$,即 $x^2+y^2=C^2$,故 A 正确.

(2)B.

解 将 $y=\cos 2x$ 代入 $y'+P(x)y=0$,解得 $P(x)=2\tan 2x$,故

$$y'+(2\tan 2x)y=0,$$

解此一阶线性齐次微分方程,得 $y=Ce^{-\int P(x)dx}=Ce^{-\int 2\tan 2xdx}=C\cos 2x$.

由 $y(0)=2$,得 $C=2$,故 $y=2\cos 2x$,B 正确.

(3)A.

解 $y''+2y'-3y=e^{-x}+x$ 的特解为两个微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-x}$ 与 $y''+2y'-3y=x\cdot e^{0\cdot x}$ 的两个特解之和.

特征方程为 $r^2+2r-3=0$,得 $r_1=1$,$r_2=-3$,$\lambda=-1$ 与 $\lambda=0$ 均不是特征根,故 $y''+2y'-3y=e^{-x}$ 有形如 ae^{-x} 的特解,$y''+2y'-3y=x$ 有形如 $bx+c$ 的特解,所以原方程的特解形式为 $ae^{-x}+bx+c$,A 正确.

(4)A.

解 依题意,$y_1(x)-y_2(x)$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解.

当 $P(x)$ 不恒为 0 时,非零常数不可能是 $y'+P(x)y=0$ 的解,故选 A.

D 选项正确,因为 $y'+P(x)y=0$ 的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$,所以任意两个解相差一个常数因子.

C 选项正确,因 $y'+P(x)y=0$ 两个不同的解不能满足相同的初始条件.

事实上,假设存在 x_0,使得 $y_1(x_0)=y_2(x_0)$,令 $y_0=y_1(x)-y_2(x)$,则 $y_0(x)$ 是该方程的解,且满足初始条件 $y_0(x_0)=0$,根据微分方程解的存在唯一性定理,知 $y_0(x)$ 恒为零,故 $y_1(x)=y_2(x)$,与已知条件矛盾.

(5)D.

解 由线性微分方程解的性质和结构,知该方程的通解为

$$C_1[y_1(x)-y_3(x)]+C_2[y_2(x)-y_3(x)]+y_3(x),$$

即

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+(1-C_1-C_2)y_3(x).$$

令 $C_3=1-C_1-C_2$,则 $C_1+C_2+C_3=1$,故 D 正确.

二、填空题

(1)$y=\frac{1}{x}(\sin x-x\cos x+C)$($C$ 为任意常数).

解 原方程变形为 $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\sin x$,为一阶线性微分方程,故通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\sin x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\ln|x|}\left(\int e^{\ln|x|}\sin xdx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\int x\sin xdx+C\right)=\frac{1}{x}(\sin x-x\cos x+C),$$

其中 C 为任意常数.

【注】 ① 若令 $P=y-x\sin x$,$Q=x$,则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=1$,所以该方程为全微分方程,故通解为 $\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy=C$,即

$$\int_0^x(0-x\sin x)dx+\int_0^y xdy=C,$$

故 $x\cos x-\sin x+xy=C$ 为通解.

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

②$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，当$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$时，该方程为全微分方程，有通解公式

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y=C.$$

(2)$(2x-1)(1+y^2)=C$(C为任意常数).

解　原方程可化为可分离变量方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{2x-1}+\dfrac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=0$，积分可得

$$\frac{1}{2}\ln|2x-1|+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln C,$$

故通解为$(2x-1)(1+y^2)=C$(C为任意常数).

(3)$\sin\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}x$.

解　原方程为齐次微分方程，令$u=\dfrac{y}{x}$，即$y=ux$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\tan u.$$

分离变量得$\cot u\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得$\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1$，故

$$\sin u=\pm\mathrm{e}^{C_1}\cdot x=Cx(C\neq 0),$$

即$\sin\dfrac{y}{x}=Cx(C\neq 0)$.

又$y=0$也是原方程的解($y=0$在分离变量过程中漏掉了)，故上面常数也可以为零，则原方程的通解为$\sin\dfrac{y}{x}=Cx$(C为任意常数).

由$y(1)=\dfrac{\pi}{6}$，得$C=\dfrac{1}{2}$，故所求特解为$\sin\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}x$.

(4)$\dfrac{1}{y}=\dfrac{C}{x^6}+\dfrac{x^2}{8}$($C$为任意常数).

解　方程变形为$y'-\dfrac{6}{x}y=-xy^2$，为$n=2$的伯努利方程.

令$y^{-1}=z$，则$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-y^{-2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入原方程，得$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\dfrac{6}{x}z=x$，为一阶线性微分方程，解得$z=\dfrac{C}{x^6}+\dfrac{x^2}{8}$，即$\dfrac{1}{y}=\dfrac{C}{x^6}+\dfrac{x^2}{8}$为通解，其中$C$为任意常数.

(5)$x+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=C$($C$为任意常数).

解　令$P=1+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$，$Q=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)$，则$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$，

故$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，原方程为全微分方程. 通过凑微分法，求通解.

原方程变形为$\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y}\right)=0$，即$\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}\right)=0$，

故$\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{y}\right)=0$，也即$\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y+y\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})=0$，故$\mathrm{d}(x+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})=0$，所以原方程的通解为$x+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=C$($C$为任意常数).

【注】　求全微分方程$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$共有三种方法：

① 利用公式，$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y=C$.

② 凑微分.

③ 利用积分，由$\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，知$\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$，通过积分求出$u(x,y)$，则通解为$u(x,y)=C$.

如本题，由$\dfrac{\partial u}{\partial x}=1+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)$，积分得

$$u=\int(1+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+\varphi(y)=x+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+\varphi(y).$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

又 $$\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}-\frac{x}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+\varphi'(y)=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right),$$

故 $\varphi'(y)=0$，所以 $\varphi(y)=C_1$，于是 $u(x,y)=x+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+C_1$，所以通解为

$$u(x,y)=x+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=C(C\text{ 为任意常数}).$$

(6) $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2(x>0)$ 和 $-y+\sqrt{x^2+y^2}=C(x<0)$，其中 C 为大于 0 的常数.

解　方程变形为 $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}+\dfrac{y}{x}$.

当 $x>0$ 时，方程化为 $y'=\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}+\dfrac{y}{x}$；

当 $x<0$ 时，方程化为 $y'=-\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}+\dfrac{y}{x}$.

令 $\dfrac{y}{x}=u$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，方程变为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\pm\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 两种情形，积分可得 $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2(x>0)$ 和 $-y+\sqrt{x^2+y^2}=C(x<0)$，为原方程通解，其中 C 为大于 0 的常数.

(7) $y=\dfrac{1}{4}[(x+1)\mathrm{e}^{-x}+(x-1)\mathrm{e}^{x}]$.

解　特征方程为 $r^2+2r+1=0$，$r_1=r_2=-1$，故对应齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}.$$

由非齐次项 $x\mathrm{e}^x$，知 $\lambda=1$ 不是特征根，故令特解为 $y^*=(ax+b)\mathrm{e}^x$，将 y^* 代入原方程，比较系数得 $a=\dfrac{1}{4}$，$b=-\dfrac{1}{4}$，故通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{4}(x-1)\mathrm{e}^x$.

由 $y(0)=0$，$y'(0)=0$，得 $C_1=\dfrac{1}{4}$，$C_2=\dfrac{1}{4}$，故所求特解为

$$y=\frac{1}{4}[(x+1)\mathrm{e}^{-x}+(x-1)\mathrm{e}^{x}].$$

(8) $y=\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x)$.

解　特征方程 $r^2-3r+2=0$ 的特征根为 $r_1=1$，$r_2=2$，故对应的齐次微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

由非齐次项 $10\mathrm{e}^{-x}\sin x$，知 $-1\pm\mathrm{i}$ 不是特征根，故令原方程的特解为 $y^*=\mathrm{e}^{-x}(A\sin x+B\cos x)$，将其代入原方程，可解得 $A=B=1$，所以原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x).$$

当 $x\to+\infty$ 时，$y(x)\to0$，而 $\mathrm{e}^x\to+\infty$，$\mathrm{e}^{2x}\to+\infty$，因此有 $C_1=C_2=0$，故所求特解为 $y=\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x)$.

(9) $y=\arcsin x(-1<x<1)$.

解　已知方程为不显含 y 的可降阶方程，令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程变为 $(1-x^2)p'-xp=0$，即 $p'-\dfrac{x}{1-x^2}p=0$ $(x\neq\pm1)$，为一阶线性微分方程，有 $p=C_1\mathrm{e}^{\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}$，即 $p=C_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}=\dfrac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}$.

由 $p(0)=y'(0)=1$，得 $C_1=1$，故 $y=\int p(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C_2$.

又由 $y(0)=0$，得 $C_2=0$，所以 $y=\arcsin x(-1<x<1)$.

【注】 $\int\dfrac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\ln|1-x^2|+C$，由已知 $y(0)=0$，$y'(0)=1$，意味着在 $(-1,1)$ 内求解，故 $\int\dfrac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)+C$.

微信公众号【神灯考研】

(10) $y=C_1(\mathrm{e}^x-x)+C_2(\mathrm{e}^{-x}-x)+x(C_1,C_2\text{ 为任意常数})$.

考研人的精神家园

解　由线性微分方程解的性质及通解结构，知 $y_1=\mathrm{e}^x-x$，$y_2=\mathrm{e}^{-x}-x$ 是对应齐次微分方程的两个线性无关的解，故通解为 $y=C_1(\mathrm{e}^x-x)+C_2(\mathrm{e}^{-x}-x)+x(C_1,C_2\text{ 为任意常数})$.

(11) $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x(C_1,C_2\text{ 为任意常数})$.

解　由特解 $y^*=\mathrm{e}^{-x}(1+x\mathrm{e}^{2x})=\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^x$，知该方程对应的齐次微分方程有特征根 $r_1=-1$，$r_2=1$，且 $x\mathrm{e}^x$ 是其特解，故该方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x(C_1,C_2$ 为任

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

意常数).

三、解答题

(1) 解　依题设,有 $y(1)=0, y'(1)=1$.

方程 $x^2y''-y'^2=0$ 不显含 y,令 $y'=p$, $y''=p'$,代入原方程,得 $x^2p'-p^2=0$,分离变量并积分,得

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{x}+C_1.$$

由 $y'(1)=1$,得 $C_1=0$,故 $p=\dfrac{dy}{dx}=x$,积分得,$y=\dfrac{1}{2}x^2+C_2$.

又由 $y(1)=0$,得 $C_2=-\dfrac{1}{2}$,故所求积分曲线为 $y=\dfrac{1}{2}(x^2-1)$.

(2) 解　方程变形为 $(\sin y-y\sin x)dx+(x\cos y+\cos x)dy=0$. 记

$$P=\sin y-y\sin x,\ Q=x\cos y+\cos x,$$

则有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\cos y-\sin x$,故为全微分方程.

由　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=\sin y-y\sin x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=x\cos y+\cos x$,

积分得
$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx+\varphi(y)=\int(\sin y-y\sin x)dx+\varphi(y)\\&=x\sin y+y\cos x+\varphi(y).\end{aligned}$$

由
$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos y+\cos x+\varphi'(y)=x\cos y+\cos x,$$

得 $\varphi'(y)=0$,从而 $\varphi(y)=C_1$,所以 $u(x,y)=x\sin y+y\cos x+C_1$,故原方程的通解为 $x\sin y+y\cos x=C$,其中 C 为任意常数.

(3) 解　已知等式变形为 $f(x)=\cos x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$,两边同时对 x 求导,得

$$f'(x)=-\sin x-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)=-\sin x-\int_0^x f(t)dt,\qquad①$$

再对 x 求导,得
$$f''(x)+f(x)=-\cos x.\qquad②$$

对应齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$,得 $r=\pm i$,故齐次方程的通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

由非齐次项 $-\cos x$,知 $0\pm i$ 是特征根,故令特解为 $f^*=x(A\cos x+B\sin x)$,将其代入 ② 式,得 $A=0, B=-\dfrac{1}{2}$,所以 ② 的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{2}x\sin x$.

又由已知等式及 ① 式,知 $f(0)=1, f'(0)=0$,故得 $C_1=1, C_2=0$,所以

$$f(x)=\cos x-\frac{1}{2}x\sin x.$$

(4) 解　由已知条件 $f(0)=0$,由导数定义,有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^xf(\Delta x)+f(x)(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}e^x\cdot\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to0}f(x)\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\\&=e^xf'(0)+f(x)=e^{x+1}+f(x),\end{aligned}$$

即 $f'(x)-f(x)=e^{x+1}$,为一阶线性微分方程,故 $f(x)=e^{\int dx}\left[\int e^{x+1}e^{-\int dx}dx+C\right]=xe^{x+1}+Ce^x$.

又由 $f(0)=0$,得 $C=0$,所以 $f(x)=xe^{x+1}$.

(5) 解　已知方程为不显含 x 的可降阶的二阶方程.

令 $y'=p$,则 $y''=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$,代入原方程,得 $p\dfrac{dp}{dy}+\dfrac{1}{2}p^2=2y$,即 $\dfrac{d(p^2)}{dy}+p^2=4y$,是关于 p^2 的一阶线性微分方程,其通解为

$$\begin{aligned}p^2&=e^{-\int dy}\left(\int4ye^{\int dy}dy+C_1\right)=e^{-y}\left(\int4ye^ydy+C_1\right)\\&=e^{-y}(4ye^y-4e^y+C_1)=4(y-1)+C_1e^{-y}.\end{aligned}$$

由 $y(0)=2$, $y'(0)=2$,得 $C_1=0$,故 $p^2=4(y-1)$, $p=\pm2\sqrt{y-1}$,取 $p=2\sqrt{y-1}$(因 $y'(0)=2>0$),故 $\dfrac{dy}{dx}=2\sqrt{y-1}$,分离变量,得 $\dfrac{dy}{\sqrt{y-1}}=2dx$,积分得

$$\sqrt{y-1}=x+C_2,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

即 $y=(x+C_2)^2+1$，又由 $y'(0)=2$，得 $C_2=1$，所求特解为 $y=(x+1)^2+1$.

(6) 解　依题意，$y(0)=0$，$y'(0)=2$，$y''(0)=0$.

$y'''-y'=0$ 的特征方程为 $r^3-r=0$，得特征根为 $r_1=0$，$r_2=1$，$r_3=-1$，故微分方程的通解为 $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}$，故

$$y'=C_2e^x-C_3e^{-x},\ y''=C_2e^x+C_3e^{-x}.$$

代入初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=2$，$y''(0)=0$，得

$$C_1+C_2+C_3=0,\ C_2-C_3=2,\ C_2+C_3=0,$$

解得 $C_1=0$，$C_2=1$，$C_3=-1$，故所求积分曲线为 $y=e^x-e^{-x}$.

(7) 解　令 $\sqrt{x^2+y^2}=u$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{u}f'(u),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{u-\frac{x^2}{u}}{u^2}f'(u)+\frac{x^2}{u^2}f''(u)=\frac{y^2}{u^3}f'(u)+\frac{x^2}{u^2}f''(u).$$

由 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 关于 x，y 具有轮换对称性，知 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{u^3}f'(u)+\frac{y^2}{u^2}f''(u)$，将其代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2+y^2$，得 $f''(u)+\frac{1}{u}f'(u)=u^2$，即 $uf''(u)+f'(u)=u^3$，$[uf'(u)]'=u^3$，积分得 $uf'(u)=\frac{1}{4}u^4+C_1$，故 $f'(u)=\frac{1}{4}u^3+\frac{C_1}{u}$，积分得 $f(u)=\frac{1}{16}u^4+C_1\ln u+C_2$，故

$$z=\frac{1}{16}(x^2+y^2)^2+C_1\ln\sqrt{x^2+y^2}+C_2(C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

(8) 解　由 $u=e^x$，知 $x=\ln u$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=u\frac{dy}{du},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(u\frac{dy}{du}\right)=\frac{d}{du}\left(u\frac{dy}{du}\right)\cdot\frac{du}{dx}=u\frac{dy}{du}+u^2\frac{d^2y}{du^2},$$

将其代入原方程，得

$$\frac{d^2y}{du^2}-2\frac{dy}{du}+y=u,\qquad ①$$

其对应齐次微分方程的特征方程为 $r^2-2r+1=0$，得 $r_1=r_2=1$.

令特解 $y^*=au+b$，代入 ① 可解得 $y^*=u+2$，故方程 ① 的通解为 $y=C_1e^u+C_2ue^u+u+2$，将 $u=e^x$ 代入得原微分方程的通解为 $y=(C_1+C_2e^x)e^{e^x}+e^x+2(C_1,C_2\text{ 为任意常数})$.

(9) 解　(Ⅰ) 依题设，曲线 L 过点 $P(x,y)$ 的切线为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $X=0$，则切线在 y 轴上的截距为 $y-xy'$.

由已知，$\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$，即 $y'=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$.

由 $x>0$，$y'=\frac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$，为齐次微分方程. 令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y'=u+xu'$，则 $u+xu'=u-\sqrt{1+u^2}$，为可分离变量的微分方程，$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}$，积分并代回 $\frac{y}{x}=u$，得 $y+\sqrt{x^2+y^2}=C$. 又 L 过 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，得 $C=\frac{1}{2}$，于是曲线 L 的方程为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$，即 $y=\frac{1}{4}-x^2$.

(Ⅱ) 在第一象限内，$y=\frac{1}{4}-x^2$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=-2x(X-x)$，即 $Y=-2x\cdot X+x^2+\frac{1}{4}\left(0<x\leqslant\frac{1}{2}\right)$，它与 x 轴、y 轴的交点分别为 $\left(\frac{x^2+\frac{1}{4}}{2x},0\right)$ 与 $\left(0,x^2+\frac{1}{4}\right)$，故所求面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{2x}-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)dx,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

则 $A'(x)=\frac{1}{4x^2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(3x^2-\frac{1}{4}\right)=0$，得 $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

当 $0<x<\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$A'(x)<0$；当 $x>\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$A'(x)>0$，故 $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 是 $A(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上唯一的极小值点，也是最小值点，所求切线为 $Y=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}X+\frac{3}{36}+\frac{1}{4}$，即 $Y=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}$.

(10) 解　设曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程为 $y=y(x)$，则 $\overset{\frown}{OP}$ 与 $\overline{OP}$ 所围面积为

$$\int_0^x\left[y(t)-\frac{y}{x}t\right]\mathrm{d}t=\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}xy.$$

依题意，$\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}xy=x^2(x>0)$，两边同时对 x 求导，得 $y-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}xy'=2x$，即 $y'-\frac{1}{x}y=-4$，为一阶线性微分方程，其通解为 $y=x(\ln x^{-4}+C)=x(C-4\ln x)$.

又由已知，有 $y(1)=1$，可得 $C=1$，故所求方程为 $y=\begin{cases}x-4x\ln x, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

【注】 ① $y=x-4x\ln x$ 在 $x=0$ 处无定义，但由于当 $x\to 0^+$ 时，$x-4x\ln x\to 0$，故 $x=0$ 是函数的可去间断点，若令 $y(0)=0$，则积分曲线过原点.

② 依题设，曲线过 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$，若将 $y(0)=0$ 作为初始条件，则从通解中不能确定常数 C.

综合题

一、选择题

(1) A.

解　由通解 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos x+C_3\sin x$，知其特征根为 $r_1=1$，$r_2=\mathrm{i}$，$r_3=-\mathrm{i}$，故对应的特征方程为 $(r-1)(r^2+1)=0$，即 $r^3-r^2+r-1=0$，故对应的微分方程为 $y'''-y''+y'-y=0$，A 正确.

(2) C.

解　由齐次微分方程通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$，知对应特征方程的根为 $r_1=r_2=1$，其特征方程为 $(r-1)^2=0$，即 $r^2-2r+1=0$，故 $p=-2$，$q=1$，所以非齐次微分方程为

$$y''-2y'+y=x. \tag{①}$$

令特解 $y^*=ax+b$，代入上式，得 $-2a+ax+b=x$，解得 $a=1$，$b=2$，故 ① 的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x+x+2.$$

由 $y(0)=2$，$y'(0)=0$，得 $C_1=0$，$C_2=-1$，故 $y=-x\mathrm{e}^x+x+2$，C 正确.

(3) A.

解　由 $y=\mathrm{e}^{Cx+x^2}$，有 $\ln y=x^2+Cx$，即 $\frac{\ln y}{x}-x=C$，两边同时对 x 求导，得

$$\frac{\frac{x}{y}\cdot y'-\ln y}{x^2}-1=0,$$

化简得 $xy'-y\ln y=x^2y$，A 正确.

(4) B.

解　由 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的解，知

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=Q(x),$$

即

$$\lambda[y_1'+P(x)y_1]+\mu[y_2'+P(x)y_2]=Q(x),$$

即 $(\lambda+\mu)Q(x)=Q(x)(Q(x)\neq 0)$，故 $\lambda+\mu=1$.

由 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解，知

$$(\lambda y_1-\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=0,$$

即

$$\lambda[y_1'+P(x)y_1]-\mu[y_2'+P(x)y_2]=0,$$

即 $(\lambda-\mu)Q(x)=0(Q(x)\neq 0)$，故 $\lambda-\mu=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{1}{2}$，故 B 正确.

【注】 设 y_1，y_2 是 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的解，则

① $k_1y_1+k_2y_2$ 是非齐次微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的解 $\Leftrightarrow k_1+k_2=1$；

② $k_1y_1+k_2y_2$ 是对应齐次微分方程 $y'+P(x)y=0$ 的解 $\Leftrightarrow k_1+k_2=0$.

对 n 阶线性微分方程有类似结果.

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

二、填空题

(1)$x=y\left(y+2\ln y-\frac{1}{y}+C\right)$($C$为任意常数).

解　原方程不是可分离变量方程,不是线性微分方程,也不是齐次微分方程,需要变形为$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}x=\frac{(y+1)^2}{y}$,为一阶线性微分方程,通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int\frac{(y+1)^2}{y}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=y\left(y+2\ln|y|-\frac{1}{y}+C\right)(C\text{为任意常数}).$$

(2)$y=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$.

解　特征方程为$r^2-1=0$,$r=\pm1$.又$\sin x=\mathrm{e}^{0x}\cdot\sin x$,$0\pm\mathrm{i}$不是特征根,故令原方程的特解为$y^*=a\sin x+b\cos x$,则$(y^*)'=a\cos x-b\sin x$,$(y^*)''=-a\sin x-b\cos x$,代入原方程,得$-a\sin x-b\cos x-(a\sin x+b\cos x)=\sin x$,即$-2a\sin x-2b\cos x=\sin x$,比较$\sin x$与$\cos x$的两边系数,得$-2a=1$,$-2b=0$,即$a=-\frac{1}{2}$,$b=0$,所以原方程的通解为$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$.

由$y(0)=0$,$y'(0)=\frac{3}{2}$,得$C_1+C_2=0$,$C_1-C_2=2$,解得$C_1=1$,$C_2=-1$,所以特解为$y=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$.

(3)$y^2=C(x+1)-(x+1)\ln|x+1|-1$($C$为任意常数).

解　原方程变形为$2yy'-\frac{1}{1+x}y^2=-\frac{x}{1+x}$.

由$2yy'=(y^2)'$,令$u=y^2$,则方程变为$u'-\frac{1}{1+x}u=-\frac{x}{1+x}$,为一阶线性微分方程,其通解为

$$y^2=u=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x}\left[\int\left(-\frac{x}{1+x}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=(1+x)\left[-\int\frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x+C\right]$$
$$=C(x+1)-(x+1)\ln|x+1|-1(C\text{为任意常数}).$$

(4)$\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right]+\arctan\frac{y}{x}+\ln x=0$.

解　已知方程变形为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$,为一阶齐次微分方程.

令$\frac{y}{x}=u$,则$y=ux$,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$,故$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u-1}{u+1}$,分离变量得

$$\frac{u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得
$$\frac{1}{2}\ln(u^2+1)+\arctan u=-\ln|x|+C.$$

由$y(1)=0$,得$C=0$,故所求特解为$\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right]+\arctan\frac{y}{x}+\ln x=0$.

(5)$\tan y=\frac{1}{3}\left(1+x^2-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

解　由$(\tan y)'=y'\sec^2 y$,令$u=\tan y$,则原方程为$u'+\frac{x}{1+x^2}u=x$,为一阶线性微分方程,故通解为

$$\tan y=u=\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\left(\int x\mathrm{e}^{\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{3}(1+x^2).$$

由$y(0)=0$,得$C=-\frac{1}{3}$,故所求特解为$\tan y=\frac{1}{3}\left(1+x^2-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

【注】　这类利用导数去“找变量替换”的方法,值得注意.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(6)$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x$($C_1$,$C_2$ 为任意常数).

解　特征方程为 $r^2+1=0$,得 $r=\pm\mathrm{i}$,故对应齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

令 $y''+y=x$ 的特解为 $y_1^*=Ax$,则 $(y_1^*)'=A$,$(y_1^*)''=0$,故

$$0+Ax=x,\ A=1.$$

令 $y''+y=\cos x$ 的特解为 $y_2^*=x(B\cos x+C\sin x)$,代入方程解得 $B=0$,$C=\frac{1}{2}$,故其特解为 $y_2^*=\frac{1}{2}x\sin x$,所以原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x(C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

(7)$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{10}$($C_1$,$C_2$ 为任意常数).

解　特征方程为 $r^2-1=0$,$r=\pm1$,故对应齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

又非齐次项为　　$\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{-\cos 2x}{2}$,

方程 $y''-y=\frac{1}{2}$ 和 $y''-y=-\frac{\cos 2x}{2}$ 的特解分别令为

$$y_1^*=A,\ y_2^*=B\cos 2x+C\sin 2x,$$

将其分别代入上两个方程,可求得 $A=-\frac{1}{2}$,$B=\frac{1}{10}$,$C=0$,所以 $y_1^*=-\frac{1}{2}$ 和 $y_2^*=\frac{\cos 2x}{10}$,故原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{10}$($C_1$,$C_2$ 为任意常数).

(8)$\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2+1)$.

解　将 $x=0$ 代入已知等式,有 $f(a)=\int_0^a\frac{t(t^2+1)}{f(t)}\mathrm{d}t+f(0)$.

上式两边同时对 a 求导,得 $f'(a)=\frac{a(a^2+1)}{f(a)}$,故 $2f(a)f'(a)=2a+2a^3$,积分得 $\int 2f(a)f'(a)\mathrm{d}a=\int(2a+2a^3)\mathrm{d}a$,故 $[f(a)]^2=a^2+\frac{1}{2}a^4+C$.

由 $f(1)=\sqrt{2}$,得 $C=\frac{1}{2}$,故 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2+1)$(由 $f(1)=\sqrt{2}$,知开方取正).

(9)$\cos x+\frac{\cos 1}{1-\sin 1}\sin x$.

解　已知方程两边同时对 x 求导,得 $f'(x)=f(1-x)$,　①

两边再同时对 x 求导,得 $f''(x)=-f'(1-x)$.　②

由 ① 式,得 $f'(1-x)=f[1-(1-x)]=f(x)$,代入 ② 式,得 $f''(x)=-f(x)$.

由原方程,有 $f(0)=1$,在 ① 式中令 $x=0$,得 $f'(0)=f(1)$.

解初值问题:$\begin{cases}f''(x)+f(x)=0,\\ f(0)=1,f'(0)=f(1),\end{cases}$ 可得通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$.

由 $f(0)=1$,得 $C_1=1$,即 $f(x)=\cos x+C_2\sin x$,故 $f'(x)=-\sin x+C_2\cos x$.

再由 $f'(0)=f(1)$,得 $C_2=\frac{\cos 1}{1-\sin 1}$,故 $f(x)=\cos x+\frac{\cos 1}{1-\sin 1}\sin x$.

三、解答题

(1) 解　已知等式中,令 $x=y=0$,得 $f(0)=0$.由导数的定义,有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\dfrac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)f(\Delta x)}-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)[1+f^2(x)]}{\Delta x[1-f(x)f(\Delta x)]}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\dfrac{f(\Delta x)[1+f^2(x)]}{\Delta x}}{1-f(x)f(\Delta x)}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= \lim_{\Delta x\to 0}[1+f^2(x)]\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{1-f(x)f(\Delta x)}$$
$$= [1+f^2(x)]f'(0),$$

即

$$f'(x) = [1+f^2(x)]f'(0). \qquad ①$$

① 式变形为$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = f'(0)$，两边同时积分，得 $\arctan f(x) = f'(0)x + C$，由 $f(0) = 0$，得 $C = 0$，故 $\arctan f(x) = f'(0)x$，即 $f(x) = \tan[f'(0)x]$.

(2) 解　由 $x = \sin t, y = y(t)$ 及复合函数求导法则，有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t}\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos t}\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$= \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\cos t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{1}{\cos t} = \frac{1}{\cos^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\sin t}{\cos^3 t}\frac{dy}{dt}.$$

将$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 代入原方程化简为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y = 0, \qquad ①$$

特征方程为 $r^2+1 = 0, r = \pm i$，故 ① 的通解为 $y = C_1\cos t + C_2\sin t$.

由 $x = \sin t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，知 $\cos t = \sqrt{1-x^2}$，所以原方程的通解为

$$y = C_1\sqrt{1-x^2}+C_2x(C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

(3) 解　(Ⅰ) 由互为反函数的导数关系式，有 $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$，两边同时对 x 求导，得

$$y''(x) = \left[\frac{1}{x'(y)}\right]'\cdot\frac{1}{x'(y)} = -\frac{x''(y)}{[x'(y)]^3}\ (x'(y)\neq 0),$$

故原方程为 $-\frac{x''(y)}{[x'(y)]^3}+(4x+e^{2y})\frac{1}{[x'(y)]^3} = 0$，即 $x''(y)-4x(y) = e^{2y}$. ①

(Ⅱ) ① 式为二阶常系数非齐次线性微分方程，特征方程为 $r^2-4 = 0$，解得

$$r_1 = -2,\ r_2 = 2.$$

又由 e^{2y} 知 $\lambda = 2$ 是单特征根，令特解为 $x^* = y\cdot A\cdot e^{2y}$，代入 ① 式，可求得 $A = \frac{1}{4}$，故方程 ① 的通解为 $x(y) = C_1e^{-2y}+C_2e^{2y}+\frac{1}{4}ye^{2y}(C_1, C_2 \text{ 为任意常数})$.

(4) 解　令 $P = -6yf(x)$，$Q = x^2f'(x)-4xf(x)$，依题意，有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，即

$$x^2f''(x)-2xf'(x)+2f(x) = 0,$$

为欧拉方程.

令 $x = e^t$，则上面方程化为 $f''(t)-3f'(t)+2f(t) = 0$， ①

为二阶常系数线性齐次微分方程，其特征方程为 $r^2-3r+2 = 0$，解得 $r_1 = 1, r_2 = 2$，故 ① 的通解为 $f(t) = C_1e^t+C_2e^{2t}$，所以 $f(x) = C_1x+C_2x^2$.

由 $f(1) = 1, f'(1) = 2$，得 $C_1 = 0, C_2 = 1$，故 $f(x) = x^2, f'(x) = 2x$，从而

$$du = -6x^2ydx-2x^3dy.$$

利用公式，有　$u(x,y) = \int_0^x -6x^2ydx+\int_0^y 0dy = -2x^3y,$

所求 $u(x,y) = -2x^3y+C(C \text{ 为任意常数})$.

(5) 解　令 $x^2+y^2 = u$，则 $z = uf(u)$，$u'_x = 2x$，$u'_y = 2y$，于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(u)u'_x+uf'(u)u'_x = 2x[f(u)+uf'(u)],$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2[f(u)+uf'(u)]+2x[f'(u)u'_x+f'(u)u'_x+uf''(u)u'_x]$$
$$= 2f(u)+(10x^2+2y^2)f'(u)+4x^2uf''(u).$$

由 $z = (x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 关于 x 与 y 具有轮换对称性，知

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f(u)+(10y^2+2x^2)f'(u)+4y^2uf''(u),$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

将其代入到$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，得 $u^2 f''(u)+3uf'(u)+f(u)=0$，　①

① 为二阶欧拉方程，令 $e^t=u$，则

$$uf'(u)=\frac{d[f(t)]}{dt},\ u^2 f''(u)=\frac{d^2[f(t)]}{dt^2}-\frac{d[f(t)]}{dt},$$

将其代入 ① 式，得$\frac{d^2[f(t)]}{dt^2}+2\frac{d[f(t)]}{dt}+f(t)=0$，　②

特征方程为 $r^2+2r+1=0$，得 $r_1=r_2=-1$，故 ② 的通解为

$$f(u)=f(t)=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}=\frac{1}{u}(C_1+C_2\ln u).$$

由 $f(1)=0,f'(1)=1$，得 $C_1=0,C_2=1$，所以 $f(u)=\frac{\ln u}{u}$，即 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

由 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，得 $x=e$，且当 $1\leqslant x<e$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(e)=\frac{1}{e}$ 为所求最大值.

(6) 解　方程的通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$，　①

其中 $y_1(x),y_2(x)$ 是对应齐次微分方程的两个线性无关的解，$y^*(x)$ 是非齐次微分方程的特解.

若 $y^*(x)=(Ax+B)e^{2x}$，则 $\lambda=2$ 不是特征根；

若 $y^*(x)=x(Ax+B)e^{2x}$，则 $\lambda=2$ 是单特征根.

由已知特解 $y=2e^x+(x^2-1)e^{2x}=2e^x-e^{2x}+x^2e^{2x}$，应为 ① 式中取定常数所得，从而可知

$$y_1(x)=e^x,\ y_2(x)=e^{2x},\ y^*(x)=x^2e^{2x},$$

因此 $r=1,r=2$ 为特征根，由根与系数的关系，知 $a=-(1+2)=-3$，$b=1\times2=2$，所以原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x^2e^{2x}$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

将 $y^*=x^2e^{2x}$ 代入原方程，可得

$$e^{2x}(4x^2+8x+2)-3e^{2x}(2x^2+2x)+2x^2e^{2x}=(cx+d)e^{2x},$$

即 $2x+2=cx+d$，得 $c=2,d=2$.

综上可得，$a=-3,b=2,c=2,d=2$.

(7) 解　令 $y'(x)+y(x)=f(x)$，则由一阶线性微分方程的通解公式，得

$$y(x)=e^{-x}\left[\int_{x_0}^{x}e^tf(t)dt+C\right],$$

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{x_0}^{x}e^tf(t)dt+C}{e^x}.$$

当 $x\to+\infty$ 时，若$\int_{x_0}^{x}e^tf(t)dt\to\infty$，则由洛必达法则，知

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=k;$$

当 $x\to+\infty$ 时，若$\int_{x_0}^{x}e^tf(t)dt$ 不趋于 ∞，则必有 $k=0$，故

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\left[\int_{x_0}^{x}e^tf(t)dt+C\right]=0=k.$$

(8) 解　由已知，有 $f''(x)=g'(x)=1-f(x)$，$f'(0)=g(0)=1$，

故
$$\begin{cases}f''(x)+f(x)=1,\\ f(0)=f'(0)=1,\end{cases}$$

解上述方程，得 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+1$.

由 $f(0)=f'(0)=1$，得 $C_1=0$，$C_2=1$，故 $f(x)=\sin x+1$，所以

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}[g(x)-f(x)]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}[f'(x)-f(x)]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d[e^{-x}f(x)]=e^{-x}f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2e^{-\frac{\pi}{2}}-1.$$

(9) 解

$$\int_0^1y(xu)du\xlongequal{xu=t}\int_0^xy(t)\frac{1}{x}dt=\frac{1}{x}\int_0^xy(t)dt,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

故原方程化为 $$y'(x)+3\int_0^x y'(t)\mathrm{d}t+2\int_0^x y(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}=0, \quad ①$$

① 式两边同时对 x 求导，得 $y''(x)+3y'(x)+2y(x)=\mathrm{e}^{-x}$， ②

且 $y(0)=1$，$y'(0)=-1$，特征方程为 $r^2+3r+2=0$，得 $r_1=-1$，$r_2=-2$，令特解 $y^*=Ax\mathrm{e}^{-x}$，代入 ② 式可得 $A=1$，故方程 ② 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^{-x}$.

又由 $y(0)=1$，$y'(0)=-1$，得 $C_1=0$，$C_2=1$，故 $y=y(x)=\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^{-x}$.

(10) 解 由已知，$y''<0$，于是曲率为 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{-y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，

化简得 $y''=-(1+y'^2)$.

由已知，$y(0)=1$，$y'(0)=1$，令 $y'=p$，$y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，代入上方程，得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=-\mathrm{d}x$，

积分得 $p=\tan(C_1-x)$，由 $y'(0)=1$，得 $C_1=\dfrac{\pi}{4}$，故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left(-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}\right),$$

积分得，$y=\ln\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right|+C_2$，再由 $y(0)=1$，得 $C_2=1+\dfrac{1}{2}\ln 2$，故所求曲线为

$$y=\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]+1+\frac{1}{2}\ln 2,\ -\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}.$$

(11) 证 （Ⅰ）$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a(t)x=0$ 的通解可表示为 $x(t)=C\mathrm{e}^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}$，当且仅当 $\int_0^{+\infty}a(t)\mathrm{d}t$ 发散时，

$$-\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\to-\infty(t\to+\infty),$$

故有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$.

（Ⅱ）该方程的通解为 $x(t)=\mathrm{e}^{-at}\left[C+\int_0^t \mathrm{e}^{as}f(s)\mathrm{d}s\right](t>0)$，满足 $x(0)=x_0$ 的解为

$$x_0(t)=\mathrm{e}^{-at}\left[x_0+\int_0^t \mathrm{e}^{as}f(s)\mathrm{d}s\right](t>0).$$

当 $t\in[0,+\infty)$ 时，由已知，设 $|f(t)|\leqslant M(M>0)$，则可得

$$|x_0(t)|\leqslant|x_0|+\left|\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}f(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant|x_0|+M\left|\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}\mathrm{d}s\right|\leqslant|x_0|+\frac{M}{a}.$$

(12) 解 $y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，它与 x 轴的交点为 $\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$. 由 $y(0)=1$，$y'(x)>0$，知 $y(x)>y(0)=1>0(x>0)$，于是

$$S_1=\frac{1}{2}|y|\left|x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=\frac{y^2}{2y'},\ S_2=\int_0^x y(t)\mathrm{d}t,$$

由 $2S_1-S_2=1$，得 $$\frac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=1.$$

由此知，$y'(0)=1$，上式两边同时对 x 求导并化简，得 $yy''=y'^2$. 令 $y'=p$，$y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，

则方程为 $$py\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^2.$$

由 $y'>0$，即 $p>0$，故 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$，积分得 $p=C_1y$，由 $y=1$，$p=1$，得 $C_1=1$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$，

于是 $y=C_2\mathrm{e}^x$，再由 $y(0)=1$，得 $C_2=1$，所求曲线为 $y=\mathrm{e}^x$.

(13) 解 由牛顿第二定律，$F_{阻}=ma$，故由已知条件，有 $-kv=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. 又

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x\text{ 表示位移}),$$

故 $-kv=m\cdot v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，即 $\mathrm{d}v=-\dfrac{k}{m}\mathrm{d}x$，积分得

$$v=v_0-\frac{k}{m}x, \quad ①$$

故 $k=\dfrac{m(v_0-v)}{x}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

将 $m = 4\ 500\ \text{kg}, v_0 = 600\ \text{km/h}, v = 100\ \text{km/h}, x = 0.5\ \text{km}$ 代入上式，得 $k = 4.5 \times 10^6\ \text{kg/h}$.

由 ① 有 $v = 600 - \dfrac{4.5 \times 10^6}{4\ 500} \cdot x$，令 $v = 0$，解得 $x = 0.6\ \text{km}$，即跑道至少应为 600 m.

拓展题

解答题

(1) 解　依题意，设该物体温度为 $T(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = -k[T(t) - 20](k > 0),$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} + kT(t) = 20k$.

解一阶线性微分方程，得通解为 $T(t) = 20 + Ce^{-kt}$.

由初始条件 $T(0) = 100$，得 $C = 80$，故 $T(t) = 20 + 80e^{-kt}$.

又由 $T(10) = 20 + 80e^{-10k} = 60$，解得 $k = \dfrac{1}{10}\ln 2$，故

$$T(t) = 20 + 80 \cdot 2^{-0.1t}.$$

由 $T(t) = 25$，即 $2^{-0.1t} = \dfrac{1}{16}$，解得 $t = 40$，故物体从 100℃ 降到 25℃ 需要 40 秒.

(2) 解　已知方程为全微分方程，记

$$P = xy(x + y) - f(x)y, Q = x^2 y + f'(x),$$

则由 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$，得

$$f''(x) + f(x) = x^2. \qquad ①$$

由齐次方程 $f''(x) + f(x) = 0$，得特征方程为 $r^2 + 1 = 0$，解得 $r = \pm \mathrm{i}$，故其通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

由于 $x^2 e^{0 \cdot x}$，且 $\lambda = 0$ 不是特征根，故令方程 ① 的特解为

$$y^* = x^0 \cdot (ax^2 + bx + c),$$

代入 ① 式，可求得 $a = 1, b = 0, c = -2$，故 $y^* = x^2 - 2$，从而方程 ① 的通解为

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2.$$

由 $f(0) = 0, f'(0) = 1$，得 $C_1 = 2, C_2 = 1$，故

$$f(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2. \qquad ②$$

由 ② 式，可知全微分方程为

$$[xy^2 - (2\cos x + \sin x)y + 2y]\mathrm{d}x + (-2\sin x + \cos x + 2x + x^2 y)\mathrm{d}y = 0.$$

由于

$$\begin{aligned}
&[xy^2 - (2\cos x + \sin x)y + 2y]\mathrm{d}x + (-2\sin x + \cos x + 2x + x^2 y)\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{d}\left(\frac{x^2 y^2}{2}\right) + \mathrm{d}(2xy) - \mathrm{d}(2y\sin x) + \mathrm{d}(y\cos x) \\
&= \mathrm{d}\left(\frac{x^2 y^2}{2} + 2xy - 2y\sin x + y\cos x\right) = 0,
\end{aligned}$$

故全微分方程通解为

$$\frac{x^2 y^2}{2} + 2xy - 2y\sin x + y\cos x = C\ (C \text{ 为任意常数}).$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

第八章 无穷级数

基础题

一、选择题

(1) C.

解 由$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，知$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散(否则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散矛盾).

同理，由$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，知$\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$发散，于是$\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$必发散.

A选项：当$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$至少有一个不是正项级数时，若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$不一定发散，如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$均发散，但$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}0$收敛.

B选项：如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$均发散，但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛.

D选项：如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$均发散，但$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\left(-\frac{1}{n}\right)^2\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$收敛.

(2) B.

解 由

$$0\leqslant(u_n+v_n)^2=u_n^2+v_n^2+2u_nv_n\leqslant 2(u_n^2+v_n^2),$$

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$都收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}2(u_n^2+v_n^2)$收敛. 由比较审敛法，知$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$收敛.

A选项：不一定成立.

C选项：缺正项级数条件，不一定成立.

D选项：如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散，但$\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}$.

【注】 常用不等式$|u_nv_n|\leqslant\frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2)$.

(3) D.

解 由$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，知$\lim_{n\to\infty}u_n=0$(级数收敛的必要条件). 又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_nv_n|}{v_n}=\lim_{n\to\infty}|u_n|=0,$$

由比较审敛法的极限形式，知$\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$收敛.

对于A：取$u_n=v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都(条件)收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

对于B：取$u_n=\frac{1}{n}$，$v_n=-\frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，但$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

对于C：取$u_n=\frac{1}{n^2}$，$v_n=\frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，但$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛.

(4) B.

解 由$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，知$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$收敛，根据收敛级数的运算性质，知$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

取 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{u_n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n+1)}$ 发散，排除 C.

取 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n}\right)$ 发散，排除 D.

【注】 ① 当正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则当 n 充分大时，$|u_n|=u_n<1$（有界），故 $u_n^2<u_n$，由比较审敛法，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

② 若条件改为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛（收敛级数加括号后仍收敛）.

③ 若条件改为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{u_n}{n}$ 绝对收敛，因 $\left|(-1)^{n-1}\dfrac{u_n}{n}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\left(u_n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，由比较审敛法，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{u_n}{n}$ 绝对收敛.

(5) A.

解　由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n>0)$ 收敛，知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，故当 n 充分大时，$|u_n|=u_n<1$（有界性），则 $u_n^2<u_n$，由比较审敛法，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

B 选项：取 $u_n=\dfrac{1}{n^2}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

C 与 D 不正确是由于比值法和根值法的条件是充分非必要的.

(6) C.

解　由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$ 条件收敛，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散（否则与已知条件收敛矛盾）.

对于 A：由正项级数的比较审敛法的条件是充分非必要的，知错误. 对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n>0)$，有

$$\lim_{n\to\infty}n^2u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}=0\not\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{ 收敛.}$$

B 显然不一定成立（缺正项级数条件）. D 缺正项级数条件.

(7) A.

解　已知级数为任意项级数，

$$\left|\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}\sin(n+k)\right|\leqslant\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n},$$

而 $$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}=\frac{2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}=\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)},$$

故 $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}\sim\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(n\to\infty)$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，所以原级数绝对收敛，A 正确.

(8) C.

解　令 $x-1=t$，当 $x=-1$ 时，有 $t=-2$.

依题意，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$ 在 $t=-2$ 处条件收敛，故 $t=-2$ 是其收敛区间的端点，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$ 的收敛区间为 $(-2,2)$，故 $-2<x-1<2$，即 $-1<x<3$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 时为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，显然 $x=2\in(-1,3)$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】 获取更多考研资源!

二、填空题

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$, $|x|<1$.

解 由于 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$, $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$,

故 $$F(x)=\frac{xf(x)}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^2}=xf'(x)=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} nx^n,\ |x|<1.$$

(2) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

解 由 $-1\leqslant x\leqslant 3$,知 $-2\leqslant x-1\leqslant 2$,故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛域为$[-2,2]$,令 $t=x^2$,于是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

(3) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

解 由 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$, $x\in(-\infty,+\infty)$,知

$$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x\left[1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}+\cdots\right]dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) $\frac{1}{2}\pi^2$.

解 根据收敛定理,得 $S(\pi)=\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]=\frac{1}{2}\pi^2$.

(5) $\frac{3}{4}$,0.

解 根据收敛定理,由已知,$f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处间断,故

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}-0\right)+f\left(\frac{1}{2}+0\right)\right]=\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4}.$$

由已知,可视 $f(x)$ 是以 $2\times1=2$ 为周期的偶函数(作偶延拓),故

$$S(99)=S(99-2\times50)=S(99-100)=S(-1)=S(1)=0.$$

三、解答题

(1) 解 (Ⅰ)由 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot\sqrt[n]{n}}{n^n\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}=1\neq0,$$

故级数发散(根据级数收敛的必要条件).

(Ⅱ)用比值法, $$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)^p}\cdot\frac{n^p}{a^n}=a.$$

当 $0<a<1$ 时,级数收敛;当 $a>1$ 时,级数发散;当 $a=1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 为 p 级数. 当 $0<p\leqslant1$ 时,级数发散;当 $p>1$ 时,级数收敛.

(Ⅲ)用比较审敛法,

$$\frac{1}{\int_0^n\sqrt{1+x^3}dx}<\frac{1}{\int_0^n\sqrt{x^3}dx}=\frac{1}{\frac{2}{5}n^{\frac{5}{2}}},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ 收敛,故级数收敛.

(Ⅳ)$a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=a^{\frac{1}{n+1}}(a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1)=a^{\frac{1}{n+1}}[a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1]\sim\frac{\ln a}{n(n+1)}\sim\frac{\ln a}{n^2}(n\to\infty)$,

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园
微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln a}{n^2}$ 收敛，由比较审敛法，知原级数收敛.

（Ⅴ）由泰勒公式，得

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2n^2}}=1$，由比较审敛法，知原级数收敛.

【注】　比较审敛法的极限形式：设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l,\begin{cases}0<l<+\infty,\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{ 与 }\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n\text{ 的敛散性相同},\\ l=0,\text{当 }\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n\text{ 收敛时，}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{ 也收敛},\\ l=+\infty,\text{当 }\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n\text{ 发散时，}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{ 也发散}.\end{cases}$$

利用其判别级数的敛散性，关键是找同阶或等价无穷小.

（Ⅵ）由泰勒公式，得

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{n}}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{1}{n}\ln a+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\ln^2 a+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=\left(\ln a-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2}\ln^2 a+\frac{1}{8}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

当 $\ln a-\dfrac{1}{2}=0$，即 $a=\sqrt{\mathrm{e}}$ 时，级数收敛；

当 $\ln a-\dfrac{1}{2}\neq 0$，即 $a\neq\sqrt{\mathrm{e}}$ 时，级数发散.

(2) 解　（Ⅰ）由已知条件，知 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}a_n\mathrm{e}^n=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\mathrm{e}^n=0$，故当 n 充分大时，

$$|a_n\mathrm{e}^n|\leqslant M(M>0),$$

所以 $|a_n|\leqslant\dfrac{M}{\mathrm{e}^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M}{\mathrm{e}^n}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

（Ⅱ）　$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(1+n)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)},$$

由 $\dfrac{1}{\ln(1+n)}>\dfrac{1}{n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，由比较审敛法，知原级数不绝对收敛.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(1+n)}=0$，$\left\{\dfrac{1}{\ln(1+n)}\right\}$ 单调减少，由莱布尼茨定理，知原级数条件收敛.

（Ⅲ）由 $\dfrac{1}{\sqrt{n}-\ln n}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\ln n}$ 不绝对收敛.

令 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-\ln x}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}-\ln x}=0$，

$$f'(x)=\frac{-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)}{(\sqrt{x}-\ln x)^2}=\frac{-(\sqrt{x}-2)}{2x(\sqrt{x}-\ln x)^2}<0(x>4),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}-\ln n}=0$，且 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}-\ln n}\right\}(n>4)$ 单调减少，由莱布尼茨定理，知原级数条件收敛.

（Ⅳ）　$$\sqrt[n]{3}-1=\mathrm{e}^{\frac{\ln 3}{n}}-1\sim\frac{\ln 3}{n}(n\to\infty),$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 3}{n}$发散，由比较审敛法，知$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{3}-1)$发散，即原级数不绝对收敛.

又$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{3}-1)=0$，且$\{\sqrt[n]{3}-1\}$单调减少，由莱布尼茨定理，知原级数条件收敛.

(3) 解 （Ⅰ）利用公式$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{2}=\rho$，故$R=\frac{1}{\rho}=2$.

当$x=2$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$条件收敛(根据莱布尼茨定理)；

当$x=-2$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，所以级数的收敛域为$(-2,2]$.

（Ⅱ）记$a_n=\frac{1}{n3^n}$，$x-3=t$，则$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\frac{1}{3}$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n3^n}$的收敛半径为3.

当$|x-3|<3$时，即$0<x<6$，级数收敛.

当$x=0$时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$条件收敛；当$x=6$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故收敛域为$[0,6)$.

（Ⅲ）$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)(1+\frac{1}{n})^n=+\infty$，

故$R=0$，所以级数仅在$x=0$处收敛.

（Ⅳ）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{3^n}$只含$x$的奇次幂项，简称缺项，不能直接利用公式，用比值法，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)-1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{x^{2n-1}}\right|=\frac{x^2}{3}.$$

当$\frac{x^2}{3}<1$时，即$|x|<\sqrt{3}$，级数收敛；当$\frac{x^2}{3}>1$时，即$|x|>\sqrt{3}$，级数发散，故收敛半径为$R=\sqrt{3}$.

当$x=\sqrt{3}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}$发散(一般项不趋于0)；

当$x=-\sqrt{3}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{3}}$发散，故收敛域为$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

(4) 解 （Ⅰ）缺项，用比值法，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)^2}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{x^{n^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{2}.$$

当$|x|<1$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{2}=0<1$，级数收敛；

当$|x|>1$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{2}=+\infty$，级数发散；

当$|x|=1$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{2}=\frac{1}{2}<1$，级数收敛，故收敛域为$[-1,1]$.

（Ⅱ）缺项，用比值法，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)+1}}{3^{n+1}+(n+1)^2}\cdot\frac{3^n+n^2}{x^{2n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+n^2}{3^{n+1}+(n+1)^2}\cdot x^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n^2}{3^n}}{1+\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}\cdot\frac{x^2}{3}=\frac{x^2}{3}.$$

当$\frac{x^2}{3}<1$时，即$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$，级数收敛. 当$x=\sqrt{3}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot\sqrt{3}}{3^n+n^2}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot\sqrt{3}}{3^n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{1+\frac{n^2}{3^n}}=\sqrt{3}\neq 0,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

故级数发散，同理 $x=-\sqrt{3}$ 时，级数发散，所以收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

（Ⅲ）不缺项，用公式，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}=\mathrm{e}^{-1}$，收敛半径 $R=\mathrm{e}$.

当 $x=\mathrm{e}$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}\cdot\mathrm{e}^n$，记 $b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}\mathrm{e}^n=\left[\dfrac{\mathrm{e}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\right]^n$，

由于 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$，故 $b_n>1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$，所以级数发散，同理 $x=-\mathrm{e}$ 也是发散点，故收敛域为 $(-\mathrm{e},\mathrm{e})$.

（Ⅳ） $$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}+\frac{1}{2^n}\right)x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}.$$

对 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\ln n}$，用公式，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}=1$，收敛半径 $R_1=1$.

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散；当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$ 是交错级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\ln n}=0$，$\left\{\dfrac{1}{n\ln n}\right\}(n\geqslant 2)$ 单调减少，故收敛，所以收敛域为 $[-1,1)$.

对 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1}{2}$，收敛半径 $R_2=2$. 当 $x=\pm 2$ 时，级数发散，收敛域为 $(-2,2)$.

综上所述，所求级数收敛域为 $[-1,1)$.

【注】 ① $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 用积分判别法：由于 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，反常积分发散，故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散.

② 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，则当 $R_1\neq R_2$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径 $R=\min\{R_1,R_2\}$.

(5) 解 （Ⅰ）易求得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛半径 $R=2$，收敛域为 $[-2,2)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n2^n}$，则 $xS(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n2^n}$，

$$[xS(x)]'=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x},$$

两边同时积分，得 $xS(x)-0S(0)=\int_0^x\dfrac{\mathrm{d}t}{2-t}=-\ln(2-x)+\ln 2$.

当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=-\dfrac{1}{x}\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$；当 $x=0$ 时，$S(0)=\dfrac{1}{2}$，故

$$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right), & -2\leqslant x<0,\ 0<x<2,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

（Ⅱ）先求收敛半径，用公式

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1-1)^2}{n+1+1}\cdot\frac{n+1}{(n-1)^2}=1,$$

故收敛半径 $R=1$，当 $x=\pm 1$ 时，由于一般式不趋于零，所以发散，故收敛域为 $(-1,1)$.

令
$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1-2)^2}{n+1}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-4\sum_{n=0}^{\infty}x^n+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1},$$

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

记 $S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $S_2(x)=4\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $S_3=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$,

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\Big)'=\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'=\frac{1}{(1-x)^2},\ |x|<1,$$

$$S_2(x)=4\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{4}{1-x},\ |x|<1,\ xS_3(x)=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

则$[xS_3(x)]'=4\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{4}{1-x}$,积分得 $xS_3(x)-0=-4\ln(1-x)(-1<x<1)$,

故
$$S(x)=S_1(x)-S_2(x)+S_3(x)=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{4}{1-x}-\frac{4}{x}\ln(1-x)$$
$$=\frac{4x-3}{(1-x)^2}-\frac{4}{x}\ln(1-x)(|x|<1\text{ 且 }x\neq 0).$$

当 $x=0$ 时,$S(0)=1$.

(Ⅲ) 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$,知收敛半径 $R=+\infty$,故收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}x^n$,则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^n+e^x$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}x^n+e^x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}+e^x$$
$$=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+e^x=x^2e^x+xe^x+e^x,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

【注】 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(Ⅳ) 级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n}$,缺项,用比值法,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+2)x^{2(n+1)}}{[2(n+1)+3]!}\cdot\frac{(2n+3)!}{(-1)^n(n+1)x^{2n}}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2(n+1)(2n+5)}=0(\text{对任意 }x),$$

故收敛域为$(-\infty,+\infty)$.考虑到分母为$(2n+3)!$,用 $\sin x$ 的展开式,

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!}x^{2n+3},$$

故$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!}x^{2n+3}=x-\sin x$,即$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!}x^{2n+2}=1-\frac{\sin x}{x}$ $(x\neq 0)$,

上式两边同时对 x 求导,得$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n+1)(-1)^n}{(2n+3)!}x^{2n+1}=-\frac{1}{x^2}(x\cos x-\sin x)$,故

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n}=\frac{1}{2x^3}(\sin x-x\cos x),\ x\neq 0,$$

当 $x=0$ 时,$S(0)=\frac{1}{6}$,所以 $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x^3}(\sin x-x\cos x), & x\neq 0,\\ \frac{1}{6}, & x=0.\end{cases}$

微信公众号【神灯考研】

(6) 解 (Ⅰ) $f_1(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}$,

考研人的精神家园

由于$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $|x|<1$,则

微信公众号: 神灯考研 客服微信: KYFT104 QQ群: 118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}},\ |x|<2,$$

所以 $$f_1(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n,\ x\in(-1,1).$$

（Ⅱ）由 $\ln(1-x-2x^2)=\ln[(1-2x)(1+x)]=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$，且

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\ -1<x\leqslant 1,$$

$$\ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-2x)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\right),$$

故 $$f_2(x)=\ln(1-x-2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^n}{n}x^n,\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

（Ⅲ）由 $f_3(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，得 $f_3'(x)=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，而

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\times3}{2\times4}x^4-\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}x^6+\cdots\quad(-1\leqslant x\leqslant1),$$

故
$$\begin{aligned}\ln(x+\sqrt{1+x^2})&=\int_0^x f_3'(t)\mathrm{d}t+f_3(0)\\&=x-\frac{1}{2\times3}x^3+\frac{1\times3}{2\times4\times5}x^5-\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6\times7}x^7+\cdots\\&=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1},\ |x|\leqslant1.\end{aligned}$$

【注】 由 $f_3(x)-f_3(0)=\int_0^x f_3'(t)\mathrm{d}t$，其中 $f_3(0)=0$，知

$$f_3(x)=f_3(0)+\int_0^x f_3'(t)\mathrm{d}t.$$

（Ⅳ） $$f_4(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}=\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t,$$

而 $$\arctan t=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1}+\cdots,\ |t|\leqslant1,$$

故
$$\begin{aligned}f_4(x)=&\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3\times4}x^4+\frac{1}{5\times6}x^6-\frac{1}{7\times8}x^8+\cdots+\\&\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}+\cdots,\ |x|\leqslant1.\end{aligned}$$

【注】 此题也可以分别将 $x\arctan x$ 和 $\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开为 x 的幂级数.

$$\ln\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+2},\ |x|\leqslant1,$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n},$$

积分得 $$\int_0^x(\arctan t)'\mathrm{d}t=\arctan x-\arctan0=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

故 $x\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+2}}{2n+1},\ |x|\leqslant1$，所以

$$\begin{aligned}x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)x^{2n+2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)},\ |x|\leqslant1.\end{aligned}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(7) 解
$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{x-3}-\frac{2}{x-2}$$
$$=\frac{3}{2+(x-5)}-\frac{2}{3+(x-5)}$$
$$=\frac{3}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{2}(x-5)}-\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}(x-5)}$$
$$=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-5}{2}\right)^n-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-5}{3}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)(x-5)^n,$$
收敛域取 $-1<\frac{x-5}{2}<1$ 与 $-1<\frac{x-5}{3}<1$ 的交集，即 $3<x<7$.

(8) 解
$$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x=\sin\frac{\pi}{2}(x+2-2)$$
$$=-\sin\left[\pi-\frac{\pi}{2}(x+2)\right]=-\sin\frac{\pi}{2}(x+2)$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\left[\frac{\pi}{2}(x+2)\right]^{2n+1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}(x+2)^{2n+1}(-\infty<x<+\infty).$$

【注】 将函数 $f(x)$ 展开为幂级数，常用两种方法：

① 直接法：求泰勒系数 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$，证明余项 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，则
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,x\in(a,b),$$
其中 (a,b) 为级数的收敛域.

② 间接法：利用函数展开为幂级数的唯一性和常用函数的幂级数，借助于幂级数的四则运算、逐项求导、逐项积分以及变量代换等方法，求得函数的幂级数展开式.

一般简单函数采用直接法.

(9) 解 (Ⅰ) 所求级数的和为幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$ 的和函数 $S(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的值.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}(|x|<1)$，则
$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\frac{1}{2}x\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\right)(x\neq0),$$
而
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ \frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}(x\neq0),$$
令 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，则 $g'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，$|x|<1$，故
$$g(x)=g(x)-g(0)=\int_0^x g'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln(1-x),$$
从而
$$S(x)=\frac{x}{2}\left\{-\ln(1-x)-\frac{1}{x^2}\left[-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right]\right\}$$
$$=\frac{x+2}{4}+\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x),|x|<1,x\neq0,$$
故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln2.$

【注】 也可将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),|x|<1$ 视为常用结果.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

（Ⅱ）构造幂级数，令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$，易求得其收敛域为$(-\infty,+\infty)$，则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n+1}}{n!}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}\right)'=\left[x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}\right]'=(x\cdot e^{x^2})'$$
$$=(1+2x^2)e^{x^2},\ x\in(-\infty,+\infty),$$

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}=S(1)=3e.$

(10) 解 （Ⅰ） $y(x)=1+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^9}{9!}+\cdots+\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots,$

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,$$
$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

故 $y''+y'+y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x.$

（Ⅱ）由（Ⅰ），解初值问题：

$$\begin{cases}y''+y'+y=e^x,\\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\end{cases}$$

可得 $y(x)=\dfrac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{3}e^x$ 为所求和函数.

(11) 解 依题意，$b_n=0$，且

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos nx\,dx-\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx\right]$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[0-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}x^2\,d(\sin nx)\right]$$
$$=-\frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2x\sin nx\,dx\right]=-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\,d(\cos nx)$$
$$=-\frac{4}{n^2\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right]$$
$$=-\frac{4}{n^2\pi}\cdot\pi\cdot(-1)^n=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 4}{n^2},$$
$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right).$$

由 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续，根据收敛定理，有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 4}{n^2}\cos nx.$$

当 $x=0$ 时，$f(0)=1-\dfrac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}.$

(12) 解 $a_0=\dfrac{1}{1}\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 dx+\int_2^3(3-x)dx=\dfrac{3}{2},$

$$a_n=\frac{1}{1}\int_1^3 f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx=\int_1^2\cos n\pi x dx+\int_2^3(3-x)\cos n\pi x dx$$
$$=\frac{1}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{2}{n^2\pi^2}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$
$$b_n=\frac{1}{1}\int_1^3 f(x)\sin\frac{n\pi x}{1}dx=\int_1^2\sin n\pi x dx+\int_2^3(3-x)\sin n\pi x dx=\frac{(-1)^n}{n\pi},$$

故
$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sin n\pi x,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

由收敛定理，其和函数为 $S(x)=\begin{cases}1, & 1<x\leqslant 2,\\ 3-x, & 2<x<3,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,x=3.\end{cases}$

综合题

一、选择题

(1)A.

解 由 $\left|\dfrac{\sin kn\pi}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin kn\pi}{n^2}$ 绝对收敛. 由

$$\left|(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{n}},$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 不绝对收敛.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=0$，且 $\left\{\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$ 单调减少，由交错级数的莱布尼茨定理，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 条件收敛，所以原级数条件收敛，A 正确.

(2)D.

解 记 $u_n=\dfrac{a^n n!}{n^n}$，用比值法，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{\mathrm{e}},$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}$ 当 $a<\mathrm{e}$ 时收敛，当 $a>\mathrm{e}$ 时发散，当 $a=\mathrm{e}$ 时，比值法失效.

又由 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$，知 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，从而当 $a=\mathrm{e}$ 时级数发散.

$$\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}=\frac{4}{n^a\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)}=\frac{4}{n^{a+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{n}}\right)},$$

即 $\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}\sim\dfrac{2}{n^{a+\frac{1}{2}}}(n\to\infty)$. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^{a+\frac{1}{2}}}$，当 $0<a+\dfrac{1}{2}\leqslant 1$ 时发散，由 $0<a+\dfrac{1}{2}\leqslant 1$ 与 $a<\mathrm{e}$ 及 $a>0$(已知)，得 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$，故 D 正确.

【注】 常见不等式：$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$（$n$ 为正整数）.

(3)B.

解 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 由

$$0\leqslant u_n=\frac{|a_n|+a_n}{2}\leqslant|a_n|,\ 0\leqslant v_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}\leqslant|a_n|,$$

由比较审敛法，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛.

(4)B.

解 对于 B：由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，知 $\{b_n\}$ 有界，即存在 $M>0$，使得 $|b_n|\leqslant M$，故 $|a_nb_n|\leqslant M|a_n|$. 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，所以由比较审敛法，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛，B 正确.

对于 A：若取 $a_n=b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，排除 A.

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

对于 C,D:若取 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$,则可排除 C,D.

(5)B.

解　对于 B:由级数的性质,知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 添加括号后仍收敛.其逆否命题成立,即添加括号后的级数发散,原级数也发散,故 B 正确.

对于 A:级数一般项不单调,不能用莱布尼茨定理,排除 A.

对于 C:$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 可能条件收敛,不一定有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,排除 C.

对于 D:$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件,不是充分条件,排除 D.

(6)A.

解
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2(n+1)}{(2n+1)!}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}\right] = \frac{1}{2}(\sin 1 + \cos 1).$$

【注】 $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

(7)A.

解　令 $f(x) = \frac{1}{x\ln^p x}$,$x \in [2,+\infty)$,则 $f(x)$ 单调减少且非负,用积分判别法,可知

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^p x} = \begin{cases} +\infty, & \text{发散},p \leqslant 1, \\ \frac{1}{(p-1)\ln^{p-1}2}, & \text{收敛},p > 1. \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(p^2-4)x}dx = \frac{1}{p^2-4}\int_0^{+\infty} e^{(p^2-4)x}d[(p^2-4)x] = \frac{1}{p^2-4}e^{(p^2-4)x}\Big|_0^{+\infty}.$$

当 $p^2-4<0$,即当 $-2<p<2$ 时,收敛,故 $1<p<2$. A 正确.

二、填空题

(1)$(-4,2)$.

解　根据逐项求导收敛半径不变,即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 收敛半径相同.令 $x+1=t$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1}$ 与 $t^2\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ 收敛半径相同,故由 $|x+1|<3$,得 $-4<x<2$,收敛区间为 $(-4,2)$.

(2)$(-\infty,+\infty)$.

解　由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=1$,知 $\forall x_0 \in (-1,1)$,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 绝对收敛(阿贝尔定理),故存在 $M>0$,使得当 n 充分大时,有 $|a_n x_0^n| \leqslant M$,因此 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$,有

$$\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right| = \left|\frac{a_n x_0^n}{n!}\cdot\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leqslant \frac{1}{n!}\frac{M}{|x_0|^n}\cdot|x|^n,$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!|x_0|^n}\cdot|x|^n$ 对任何 $x \in (-\infty,+\infty)$ 都收敛,故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 对任何 $x \in (-\infty,+\infty)$ 都收敛,即收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】 获取更多考研资源!

【注】 对 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!\,|x_0|^n}\cdot|x|^n$,用比值法,对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!\,|x_0|^{n+1}}\cdot\frac{n!\,|x_0|^n}{M|x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)|x_0|}=0,$$

故其收敛半径为 $R=+\infty$.

以下解法是错误的:

由 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=1$ 推出 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$,故

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0=\rho,$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛半径 $R=+\infty$.

错误的原因是求收敛半径的公式 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$,则 $R=\frac{1}{\rho}(\rho\neq0)$,条件是充分非必要的,其实证明收敛半径公式用的是正项级数的比值法,而正项级数的比值法(根值法、比较法)的条件是充分非必要的.

例如:求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$ 的收敛半径.

用根值公式, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\frac{1}{2}$,

故收敛半径 $R=2$.

但 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2+(-1)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}=\begin{cases}\frac{1}{6}, & n\text{ 为偶数},\\ \frac{3}{2}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

故 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 不存在,即 $R=2$ 不能保证 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 存在.

(3)0.

解 由级数和的定义,$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$.

判别级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ 是否收敛,若收敛,则 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}=S$ 为常数.

用根值法, $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\right]^{\frac{1}{k}}=\frac{e}{3}<1$,

故级数收敛,又 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,所以原极限 $=0$.

(4) $\frac{a}{(1-a)^2}$.

解 依题意,问题转化为求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}$ 的和.构造幂级数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$,则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},\ |x|<1,$$

令 $x=\frac{1}{a}$,则 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)=S\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\frac{1}{a}}{\left(1-\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{a}{(1-a)^2}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

(5)8.

解 利用收敛级数的定义.令

微信公众号: 神灯考研 客服微信: KYFT104 QQ群: 118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k,\ \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}u_{2k-1},\ S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,$$

则 $S_{2n}=-(u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+u_{2n-1}-u_{2n})+2(u_1+u_3+\cdots+u_{2n-1})=-\tau_{2n}+2\sigma_n$，

故 $$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=-\lim_{n\to\infty}\tau_{2n}+2\lim_{n\to\infty}\sigma_n=-2+2\times5=8.$$

又 $S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}+\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n+1}=8$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=8$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=8$.

【注】 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=S$ 收敛，根据收敛级数的必要条件，知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n+1}=0$.

(6) $\dfrac{1}{u_1}$.

解 由正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$. 记 S_n' 为所求级数的部分和，则

$$S_n'=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n'=\dfrac{1}{S_1}=\dfrac{1}{u_1}$.

三、解答题

(1) 解 由 $y'=x+y$，得 $y''=1+y'$，又 $y(0)=1$，知 $y'(0)=1$，$y''(0)=2$，根据麦克劳林公式，有 $y\left(\dfrac{1}{n}\right)=y(0)+y'(0)\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2}y''(0)\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$，所以 $\left|y\left(\dfrac{1}{n}\right)-1-\dfrac{1}{n}\right|$ 与 $\dfrac{1}{n^2}$ 是等价无穷小（$n\to\infty$）. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，由比较审敛法，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\dfrac{1}{n}\right)-1-\dfrac{1}{n}\right]$ 绝对收敛.

【注】 此题也可先解微分方程 $\begin{cases}y'-y=x,\\ y(0)=1,\end{cases}$ 得 $y=y(x)$，再用麦克劳林公式展开 $y\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(2) 解 先用公式求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n[3^n+(-2)^n]}{(n+1)[3^{n+1}+(-2)^{n+1}]}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{3\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}=\frac{1}{3},$$

故收敛半径 $R=3$，收敛区间为 $(-3,3)$.

当 $x=3$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n[3^n+(-2)^n]}$，

$$\frac{3^n}{n[3^n+(-2)^n]}=\frac{1}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\cdot\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2n},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散，由比较审敛法，知级数发散.

当 $x=-3$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{n[3^n+(-2)^n]}$，拆成两个级数，

$$\frac{(-3)^n}{n[3^n+(-2)^n]}=\frac{(-1)^n[3^n+(-2)^n]-2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=(-1)^n\frac{1}{n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 条件收敛，对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}$，用比值法，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{[3^n+(-2)^n]\cdot n}{2^n}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = \frac{2}{3}<1,$$

故级数收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n[3^n+(-2)^n]}$ 在 $x=-3$ 处收敛.

(3) 解 (Ⅰ)令 $g(x)=kx-(1+k^2x^2)\arctan kx$,则

$$g'(x)=k-(1+k^2x^2)\frac{k}{1+k^2x^2}-2k^2x\arctan kx=-2k^2x\arctan kx<0,$$

故 $g(x)$ 单调减少.

又 $g(0)=0$,所以 $g(x)<g(0)=0$,所证不等式成立.

(Ⅱ)由 $\left|\frac{(-1)^n\arctan kn}{n}\right|\sim\frac{\pi}{2n}(n\to\infty)$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ 发散,故级数不绝对收敛.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arctan kn}{n}=0$,令 $f(x)=\frac{\arctan kx}{x}$,则

$$f'(x)=\frac{kx-(1+k^2x^2)\arctan kx}{x^2(1+k^2x^2)}<0(\text{由(Ⅰ)}),$$

所以 $f(n)$ 单调减少.由莱布尼茨定理,知级数条件收敛.

(4) 解 (Ⅰ)利用公式求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_0+(n+1)d}{a_0+nd}\right|=1,$$

故 $R=1$,收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=\pm1$ 时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\pm1)^n\cdot a_n$ 发散(由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$),故收敛域为 $(-1,1)$.

(Ⅱ)求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+nd)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_0x^n+d\sum_{n=0}^{\infty}nx^n\xlongequal{\text{记}}S_1(x)+S_2(x),$$

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_0x^n=\frac{a_0}{1-x},$$

$$S_2(x)=d\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=dx\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=dx\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=dx\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=dx\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{dx}{(1-x)^2},$$

故 $S(x)=\frac{a_0}{1-x}+\frac{dx}{(1-x)^2}$.令 $x=\frac{1}{2}$,得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=2a_0+2d$.

(5) 解 (Ⅰ)由 $\frac{1}{1-x-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,得 $(1-x-x^2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1$,即

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=1,$$

变形为 $(a_0+a_1x+\sum a_{n+2}x^{n+2})-(a_0x+\sum a_{n+1}x^{n+2})-\sum a_nx^{n+2}=1.$

比较上式两边同次幂系数,得

$$a_0=1,\ a_1-a_0=0,\ a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots),$$

故 $a_0=1,\ a_1=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n=0,1,2,\cdots)$.

(Ⅱ)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$,又其前 n 项的和为

$$S_n=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}},$$

由 $a_0=a_1=1,\ a_2=a_0+a_1=2,\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$,

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{3}{2}$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}=\dfrac{3}{2}$.

(6) 证 （Ⅰ）$$\begin{aligned}|u_{n+1}-u_n|&=|f(u_n)-f(u_{n-1})|=|f'(\xi_n)||u_n-u_{n-1}|\\&\leqslant k|u_n-u_{n-1}|\leqslant k^2|u_{n-1}-u_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant k^n|u_1-u_0|,\end{aligned}$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}k^n|u_1-u_0|$收敛(等比级数$k<1$)，由比较审敛法，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$绝对收敛.

（Ⅱ）由（Ⅰ），知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$绝对收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$收敛，故其部分和的极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_1)$存在，从而$\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}$存在($u_1$是一个数)，即$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$存在.

(7) 解 由$$\begin{aligned}\sin\sqrt{n^2+1}\pi&=\sin\left[n\pi+(\sqrt{n^2+1}-n)\pi\right]=(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi\\&=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},\end{aligned}$$

且$\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}>0$，知原级数是交错级数.

由$|\sin\sqrt{n^2+1}\pi|=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\dfrac{\pi}{2n}\ (n\to\infty)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2n}$发散，知原级数不绝对收敛. 又$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$，且$\left\{\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}$单调减少，由莱布尼茨定理，知原级数条件收敛.

(8) 证 先利用分部积分法求a_n，

$$\begin{aligned}a_n&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n}e^{-nx^2}dx=-\frac{1}{2n}x^{2n-1}e^{-nx^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2n-1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n-2}e^{-nx^2}dx\\&=\frac{2n-1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n-2}e^{-nx^2}dx\\&=-\frac{2n-1}{(2n)^2}x^{2n-3}e^{-nx^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n-4}e^{-nx^2}dx\\&=\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n-4}e^{-nx^2}dx\\&=\cdots=\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot3\cdot1}{(2n)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-nx^2}dx.\end{aligned}$$

而$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-nx^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$，则$a_n=\dfrac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot3\cdot1}{(2n)^n}\cdot\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$，用比值法，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n-1)\cdots1}{(2n+2)^{n+1}}\cdot\frac{(2n)^n}{(2n-1)(2n-3)\cdots1}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{e}<1,\end{aligned}$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(9) 解 （Ⅰ）用单调有界准则，由$a_0=0$，$a_1=\sqrt{2+0}=\sqrt{2}>a_0$，设$0\leqslant a_{n-1}<a_n$，则$2+a_{n-1}<2+a_n$，故$\sqrt{2+a_{n-1}}<\sqrt{2+a_n}$，即$a_n<a_{n+1}$，由归纳法，知$\{a_n\}$单调增加.

又$a_1=\sqrt{2}<2$，设$a_n<2$，则$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<2$，由归纳法，知$\{a_n\}$有上界，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$a=\sqrt{2+a}$，解得$a=2$，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

（Ⅱ）设$u_n=\sqrt{2-a_n}$，用比值法，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-a_{n+1}}}{\sqrt{2-a_n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+a_n}}{2-a_n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4-(2+a_n)}{(2-a_n)(2+\sqrt{2+a_n})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+a_n}}}=\frac{1}{2}<1,\end{aligned}$$

故原级数绝对收敛.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

(10) 解
$$f(x)=xe^x=(x-2+2)e^{x-2+2}=e^2[(x-2)+2]e^{x-2}$$
$$=e^2[(x-2)+2]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}$$
$$=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{n+1}}{n!}+2e^2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}\right]$$
$$=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{n+1}}{n!}+2e^2\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)!}\right]$$
$$=2e^2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2(n+3)}{(n+1)!}(x-2)^{n+1},x\in(-\infty,+\infty).$$

由 $a_{n+1}=\dfrac{e^2(n+3)}{(n+1)!}$,可知 $a_n=\dfrac{e^2(n+2)}{n!}$,故
$$f^{(n)}(2)=n!a_n=e^2(n+2).$$

(11) 解
$$f(x)=\frac{x-1}{3-x}=(x-1)\cdot\frac{1}{3-x}=(x-1)\cdot\frac{1}{2-(x-1)}$$
$$=\frac{1}{2}(x-1)\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}(x-1)\left[1+\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{2^2}+\cdots+\frac{(x-1)^{n+1}}{2^n}+\cdots\right],$$
其中 $|x-1|<2$.
$$f^{(n)}(1)=n!a_n=\frac{n!}{2^n}.$$

(12) 解
$$f(x)=\sin x+x\cos x$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n+1)!}+\frac{1}{(2n)!}\right]x^{2n+1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2(n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1},x\in(-\infty,+\infty).$$

令 $x=1$,则 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}(\sin 1+\cos 1)$.

【注】 $\dfrac{1}{(2n+1)!}+\dfrac{1}{(2n)!}=\dfrac{2(n+1)}{(2n+1)!}$.

(13) 解 直接展开较为复杂,考虑到
$$\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'.$$

令 $g(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$,则
$$g(x)=\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{x}(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots-1)(|x|<\infty,x\neq 0)$$
$$=1+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots,$$

故
$$f(x)=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}+\cdots,$$

所以
$$\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1},|x|<\infty,x\neq 0.$$

令 $x=1$,得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$.

(14) 解 所给级数不是幂级数.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x\mathrm{e}^{-nx} = x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{-x})^n$，令 $\mathrm{e}^{-x} = t$，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \dfrac{1}{1-t}$，$t \in (-1,1)$，故当 $-1 < \mathrm{e}^{-x} < 1$（$\mathrm{e}^{-x} > 0$ 恒成立），即 $x > 0$ 时，原级数收敛，且

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\mathrm{e}^{-nx} = \frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1}, x \in (0,+\infty).$$

当 $x = 0$，级数和为 0，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x\mathrm{e}^{-nx} = \begin{cases} \dfrac{x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(15) 解 由 $na_n = \dfrac{2}{3}a_{n-1} - (n-1)a_{n-1}$，可知 $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{2}{3} - n\right)a_n$.

因为 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{3}-n\right)a_n}{a_n}\right| \cdot |x| = |x| < 1,$$

所以当 $|x| < 1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛.

令 $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\ &= 5 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}a_n - na_n\right)x^n = 5 + \frac{2}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0\right) - x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \\ &= 5 + \frac{2}{3}y(x) - \frac{2}{3}\times 3 - xy'(x) = 3 + \frac{2}{3}y(x) - xy'(x), \end{aligned}$$

故 $(x+1)y'(x) - \dfrac{2}{3}y(x) = 3$，即

$$y' - \frac{2}{3(x+1)}y = \frac{3}{x+1}.$$

解一阶线性微分方程，得 $y = C(x+1)^{\frac{2}{3}} - \dfrac{9}{2}$，由 $y(0) = a_0 = 3$，得 $C = \dfrac{15}{2}$，故

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{15}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{2}.$$

(16) 证 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ 的收敛域为 $[-1,1]$，所以 $f(1-x)$ 的定义域为 $[0,2]$.

令 $F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x\ln(1-x)$，定义域为 $x \in (0,1)$，由于

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\right)'\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{x}\ln(1-x), \end{aligned}$$

$$f'(1-x) = \frac{1}{x-1}\ln x,$$

$$[\ln x\ln(1-x)]' = \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln x,$$

所以 $F'(x) = f'(x) - f'(1-x) + [\ln x\ln(1-x)]' = 0, x \in (0,1)$，

故 $F(x) \equiv C$. 又由于

$$C = \lim_{x\to 1^-}F(x) = f(1) + f(0) + \lim_{x\to 1^-}\ln[1+(x-1)]\ln(1-x) = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

所以

$$f(x) + f(1-x) + \ln x\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, x \in (0,1).$$

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

(17) 解 特征方程为 $r^2-r-2=0$,得 $r_1=-1,r_2=2$,故通解为

$$f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}.$$

由 $f(0)=0,f'(0)=1$,得 $C_1+C_2=0,-C_1+2C_2=1$,解得 $C_1=-\frac{1}{3},C_2=\frac{1}{3}$,故

$$f(x)=-\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}.$$

将 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数,

$$f(x)=-\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n!}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)(-1)^n+\frac{2^n}{3}\right]\frac{x^n}{n!},$$

故 $a_n=\frac{1}{3}[(-1)^{n+1}+2^n]$.

(18) 解 将 $\frac{1}{2}(\pi-x)$ 展开为傅里叶级数,其系数即为 b_n.

先定义一个以 2π 为周期的函数 $f(x)$,它在 $(-\pi,\pi)$ 内的定义如下:

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(\pi+x), & -\pi<x<0,\\ 0, & x=0,\\ \frac{1}{2}(\pi-x), & 0<x<\pi.\end{cases}$$

$f(x)$ 为奇函数,其傅里叶级数为正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$,其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{1}{n}.$$

$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内连续,由收敛定理,知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx=\frac{1}{2}(\pi-x),x\in(0,\pi),$$

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$.

拓展题

解答题

(1) 解 $a_n=\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^nt\cdot\cos^2t\,dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^nt(1-\sin^2t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^nt\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,dt=b_n-b_{n+2}.$$

又 $b_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}t\,d(\cos t)$

$$=-\left[\cos t\cdot\sin^{n+1}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot(n+1)\sin^nt\cdot\cos t\,dt\right]$$

$$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^nt(1-\sin^2t)\,dt=(n+1)b_n-(n+1)b_{n+2},$$

移项得 $b_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}b_n$,所以 $a_n=b_n-b_{n+2}=b_n-\frac{n+1}{n+2}b_n=\frac{b_n}{n+2}$,故 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{n+2}$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+2}.$$

构造幂级数,令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+2}\cdot x^{n+2}$,则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n+1}=\frac{x^2}{1+x},|x|<1,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

积分得 $S(x)-S(0)=\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1),-1<x\leqslant 1.$

$S(0)=0$，令 $x=1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+2}=\ln 2-\frac{1}{2}.$

(2) 解 （Ⅰ）由已知递推关系 $(n+1)a_{n+1}=na_n+a_{n-1}$，得

$$a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})=-\frac{1}{n+1}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)(a_{n-1}-a_{n-2})$$
$$=\cdots=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}(a_1-a_0)=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

故 $a_{n+1}=a_0+\sum\limits_{k=1}^{n+1}(a_k-a_{k-1})=1+\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!}=\sum\limits_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!},$

即 $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. 注意到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}=\mathrm{e}^{-x}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\mathrm{e}^{-1}$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}^{-1}}=1$，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径 $R=1$.

（Ⅱ）由 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，有 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$，则 $xS'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n x^n$，将 $na_n=(n+1)a_{n+1}-a_{n-1}$ 代入，得

$$xS'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-a_{n-1}]x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$
$$=-a_1+\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}-x\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0+\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}-x\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$
$$=S'(x)-xS(x),$$

即 $(1-x)S'(x)=xS(x)$，变形为 $\frac{S'(x)}{S(x)}=\frac{x}{1-x}$，积分得

$$\ln|S(x)|=\int\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x=-x-\ln(1-x)+C.$$

由 $x=0,S(0)=1$ 得 $C=0$，考虑到 $S(0)=1>0$，故 $\ln S(x)=-x-\ln(1-x)$，即

$$S(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x},x\in(-1,1).$$

(3) 解 （Ⅰ）已知方程的特征方程为 $r^2+2r+1=0$，得特征根为 $r_1=r_2=-1$，故通解为

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}.$$

由 $f(0)=1,f'(0)=0$，得 $C_1=C_2=1$. 所以

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}=(1+x)\mathrm{e}^{-x}.$$
$$a_n=\int_n^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_n^{+\infty}(1+x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_n^{+\infty}(1+x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$
$$=-\left[(1+x)\mathrm{e}^{-x}\Big|_n^{+\infty}-\int_n^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right]$$
$$=(1+n)\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-n}=n\mathrm{e}^{-n}+2\mathrm{e}^{-n}.$$

（Ⅱ）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-n}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{1}{\mathrm{e}-1}$. 令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}=-\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{-nx})'=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}\right)'$$
$$=-\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right)'=\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2},x>0.$$

令 $x=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-n}=S(1)=\frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}+\frac{2}{\mathrm{e}-1}=\frac{3\mathrm{e}-2}{(\mathrm{e}-1)^2}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

第九章 曲线积分与曲面积分

基础题

一、选择题

(1)A.

解 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t+1,\\ y=\sin t,\end{cases}$ 则 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}t$,故

$$I=\int_L x\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\,\mathrm{d}t=2\pi.$$

【注】 也可利用质心(形心)坐标 $\bar{x}=1$,则

$$\int_L x\,\mathrm{d}x=\bar{x}\cdot\int_L \mathrm{d}s=1\times 2\pi=2\pi\left(\int_L \mathrm{d}s \text{ 表示圆周长}\right).$$

(2)B.

解 注意到 S 分别关于平面 $x=a,y=b,z=c$ 对称,则

$$I=\iint_S(x+y+z)\,\mathrm{d}S=\iint_S[(x-a)+(y-b)+(z-c)]\,\mathrm{d}S+\iint_S(a+b+c)\,\mathrm{d}S$$

$$=0+(a+b+c)\iint_S \mathrm{d}S=4\pi(a+b+c).$$

【注】 $\iint_S \mathrm{d}S$ 表示球面的表面积.

(3)C.

解 由 $z=zx^0y^0$,知 z 关于 x,y 均为偶函数,故 $\iint_S z\,\mathrm{d}S=4\iint_{S_1} z\,\mathrm{d}S$.

由 S 关于 xOz 面,yOz 面均对称,知 $\iint_S x\,\mathrm{d}S=0$,$\iint_S y\,\mathrm{d}S=0$,$\iint_S xyz\,\mathrm{d}S=0$,而 $\iint_{S_1} x\,\mathrm{d}S>0$,$\iint_{S_1} y\,\mathrm{d}S>0$,$\iint_{S_1} xyz\,\mathrm{d}S>0$,故排除 A,B,D,所以 C 正确.

二、填空题

(1)$4\sqrt{3}\pi$.

解 由 $S:z=4-x-y$,得 $z_x'=-1,z_y'=-1$,则 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_y'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,故

$$\iint_S z\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(4-x-y)\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(4-r\cos\theta-r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r=4\sqrt{3}\pi\ (D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1).$$

(2)$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}R^2,\dfrac{3\pi+2}{8}R^2$.

解 弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的图形如图 9-1 所示,取 x 为参数,则弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为

$$\begin{cases}x=x,\\ y=\sqrt{R^2-x^2}\end{cases}\left(-\frac{R}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant R\right).$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_L y\,\mathrm{d}s=\int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)R^2=\frac{2+\sqrt{2}}{2}R^2,$$

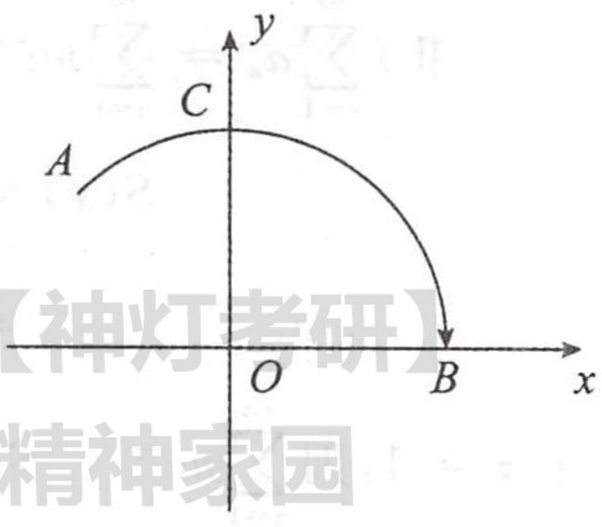


图 9-1

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\int_L y\mathrm{d}x=\int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=R\cos t}-R^2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{0}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=R^2\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)R^2=\frac{3\pi+2}{8}R^2.$$

【注】本题若取 y 为参数，由图知，曲线上的点与 y 不是一一对应的，则应将曲线 L 分为 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{CB}$ 两段分别积分.

(3) $\dfrac{2\pi R^3}{3}$.

解　由于曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x+y+z=0\end{cases}$，关于直线 $x=y=z$ 对称，所以

$$\oint_L x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L R^2\mathrm{d}s,$$

$$\oint_L z\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L(x+y+z)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L 0\mathrm{d}s=0,$$

故
$$I=\oint_L(z+x^2)\mathrm{d}s=0+\frac{1}{3}\oint_L R^2\mathrm{d}s=\frac{R^2}{3}\cdot 2\pi R=\frac{2\pi R^3}{3}.$$

(4) 18π.

解　将 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2}$ 代入被积函数，得 $I=\oint_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\dfrac{9}{2}\oint_L\mathrm{d}s$.

交线 L 的弧长不易直接计算，考虑写出 L 的参数式，将 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2},\\ x+z=1\end{cases}$ 变形为

$$\begin{cases}\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ x+z=1.\end{cases}$$

令 $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\cos t,\dfrac{y}{2}=\sin t$，则 $z=1-x=\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\cos t$，即

$$x=\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cos t,y=2\sin t,z=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos t(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t=\sqrt{(-\sqrt{2}\sin t)^2+(2\cos t)^2+(\sqrt{2}\sin t)^2}\,\mathrm{d}t=2\mathrm{d}t,$$

故
$$I=\oint_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}2\mathrm{d}t=18\pi.$$

(5) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

解　由 S 关于 yOz 面，xOy 面对称，x 与 y 是奇函数，故

$$\iint_S x\mathrm{d}S=\iint_S y\mathrm{d}S=0.$$

又 S 关于直线 $x=y=z$ 对称，由轮换性，知

$$I=\iint_S(x+y+|z|)\mathrm{d}S=0+0+\frac{1}{3}\iint_S(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\iint_S\mathrm{d}S.$$

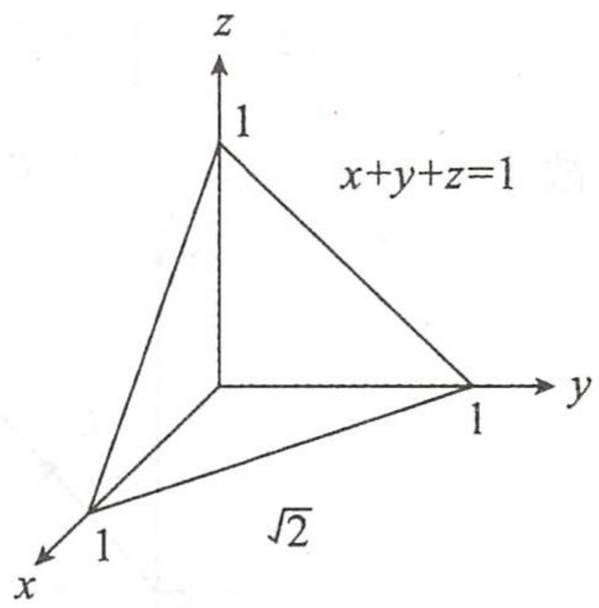


图 9-2

S 由八块等边三角形组成，等边三角形边长为 $\sqrt{2}$（如图 9-2），故 S 的面积为 $8\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$，所以 $I=\dfrac{1}{3}\times 4\sqrt{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

(6) $9\sqrt{6}$.

解　两点连线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(1,2,1)$，故 L 的方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1},1\leqslant x\leqslant 2,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

其参数方程为$\begin{cases}x=1+t,\\ y=-1+2t,\\ z=2+t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 1)$，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t=\sqrt{6}\,\mathrm{d}t$，故

$$I=\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int_0^1\sqrt{6}[(1+t)^2+(-1+2t)^2+(2+t)^2]\mathrm{d}t$$
$$=\sqrt{6}\int_0^1(6+2t+6t^2)\mathrm{d}t=9\sqrt{6}.$$

三、解答题

(1) 解 计算第一类曲线积分时要化为定积分，关键是正确写出积分曲线的参数方程.

L 由如图 9-3 所示中 L_1,L_2,L_3 三条曲线构成.

$L_1:\begin{cases}y=0,\\ x=x,\end{cases}\quad \mathrm{d}s=\mathrm{d}x$，则$\int_{L_1}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^a\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-1$；

$L_2:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}$，则

$$\int_{L_2}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^a\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a;$$

$L_3:\begin{cases}y=x,\\ x=x,\end{cases}\quad \mathrm{d}s=\sqrt{1^2+1^2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\mathrm{d}x$，则

$$\int_{L_3}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-1,$$

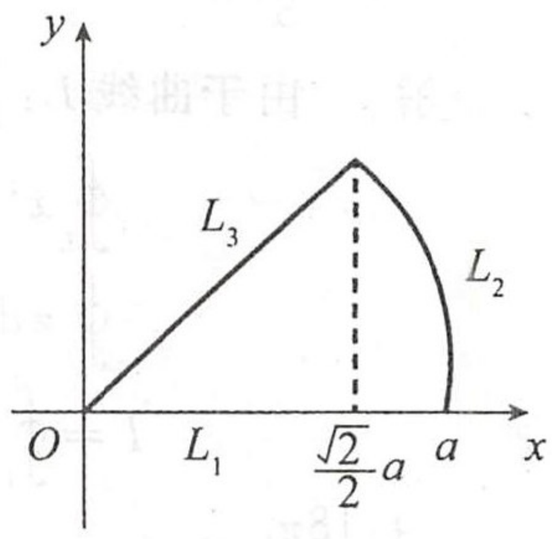


图 9-3

故 $$I=\mathrm{e}^a-1+\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^a-1=\left(\frac{\pi}{4}a+2\right)\mathrm{e}^a-2.$$

【注】 计算第一类曲线积分$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$应掌握：

① 计算公式，写出 L 的参数方程，化为定积分计算，即“变量参数化，计算定积分，上限大于下限”；

② 将 L 的方程代入被积函数化简；

③ 对称性包括奇偶性和轮换对称性(与二重积分、三重积分对称性类似).

(2) 解 L 由 $L_1:y=x$ 和 $L_2:y=2-x$ 构成(如图 9-4).

在 L_1 上，$y=x$，则 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$，故

$$\int_{L_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=\int_{L_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+0=2\int_0^1x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3};$$

在 L_2 上，$y=2-x$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}y$，故

$$\int_{L_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=0-2\int_1^0y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3},$$

故 $$\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

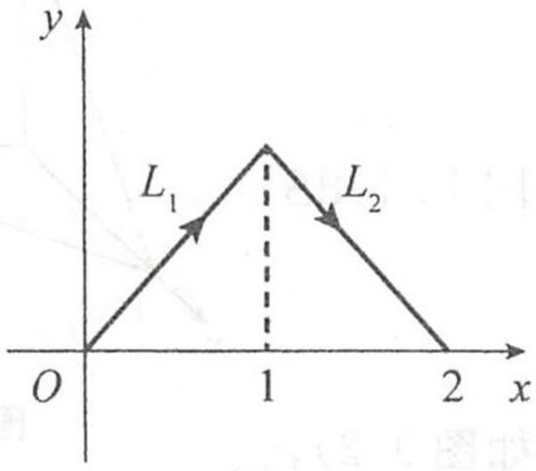


图 9-4

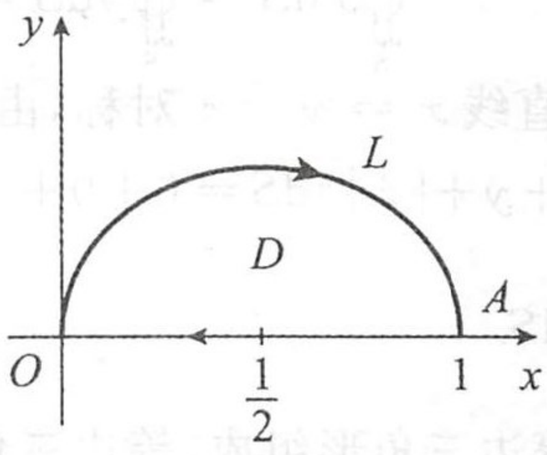


图 9-5

【注】 在 $L_1:y=x$ 上，显然$\int_{L_1}(x^2-y^2)\mathrm{d}y=0$.

(3) 解 记 $P=3+(2-\sqrt{2})y+\mathrm{e}^x\sin y,Q=\sqrt{2}x+\mathrm{e}^x\cos y$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2\sqrt{2}-2.$$

加线段$\overline{AO}:\begin{cases}y=0,\\ x=x,\end{cases}$如图 9-5 所示，$L$ 与线段$\overline{AO}$构成闭区域 D. 利用格林公式，得

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$I=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\overline{AO}}[3+(2-\sqrt{2})y+\mathrm{e}^x\sin y]\mathrm{d}x+(\sqrt{2}x+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D(2\sqrt{2}-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^1 3\mathrm{d}x=(2-2\sqrt{2})\times\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3=\frac{(1-\sqrt{2})\pi}{4}+3.$$

【注】 此题利用格林公式时，由于 $L+\overline{AO}$ 是顺时针方向，所以应取“－”号.

(4) 解 （Ⅰ）记 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，则 P 与 Q 在 $D_1:(x+2)^2+(y-2)^2\leqslant 1$ 上有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

由格林公式，得 $I=\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_1}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

（Ⅱ）由于 P 与 Q 及 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在 $x^2+y^2<1$ 内的点 $(0,0)$ 处没有定义，所以不能直接利用格林公式，直接利用 L 的参数方程 $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$ 计算，得

$$I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{1}\mathrm{d}t=2\pi.$$

（Ⅲ）由于 P 与 Q 及 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1$ 内的点 $(0,0)$ 处没有定义，故不能直接利用格林公式. 考虑在 $L:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内作一个半径充分小的圆 $L_r^-:\begin{cases}x=r\cos t,\\ y=r\sin t,\end{cases}$ 取顺时针方向，$|r|<<1(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，挖去点 $(0,0)$，在 $L+L_r^-$ 所围的区域 D_2 上用格林公式，得

$$\oint_{L+L_r^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

故 $$I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_{L_r}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}{r^2}\mathrm{d}t=2\pi,$$

其中 L_r 为逆时针方向.

(5) 解 记 $P=\dfrac{-y}{4x^2+9y^2}$，$Q=\dfrac{x}{4x^2+9y^2}$，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{9y^2-4x^2}{(4x^2+9y^2)^2}$.

由于 P 与 Q 及 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在 $x^2+y^2<R^2$ 内的点 $(0,0)$ 处没有定义，不能直接利用格林公式，考虑到被积表达式的分母为 $4x^2+9y^2$，在 $x^2+y^2=R^2$ 内部作一个小的椭圆

$$L_r^-:\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}r\cos t,\\ y=\dfrac{1}{3}r\sin t,\end{cases}$$

r 充分小，取顺时针方向，则在 $L+L_r^-$ 所围区域 D 上用格林公式，有

$$\oint_{L+L_r^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+9y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

故 $$I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+9y^2}=\oint_{L_r}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+9y^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}\oint_{L_r}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\frac{1}{6}(\cos^2 t+\sin^2 t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{3},$$

其中 L_r 为逆时针方向.

(6) 解 L 为闭曲线，利用格林公式，记 $P=y^3$，$Q=3x-x^3$，

$$I(R)=\oint_L y^3\mathrm{d}x+(3x-x^3)\mathrm{d}y=\iint_D(3-3x^2-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\iint_D(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R(1-r^2)r\mathrm{d}r$$

$$=6\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^R=3\pi\left(R^2-\frac{R^4}{2}\right).$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

由$\frac{\mathrm{d}[I(R)]}{\mathrm{d}R}=6\pi(R-R^3)=0$,得$R=1$,且

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2[I(R)]}{\mathrm{d}R^2}\right|_{R=1}=\left.6\pi(1-3R^2)\right|_{R=1}=-12\pi<0,$$

故$R=1$是唯一极大值点,也是最大值点,最大值为$I(1)=\frac{3}{2}\pi$.

(7)解　记$P=[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y, Q=-f(x)\cos y$. 依题意,有$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,即

$$-f'(x)\cos y=[f(x)-\mathrm{e}^x]\cos y,$$

又$\cos y$不恒为零,故

$$\begin{cases}f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^x,\\ f(0)=0.\end{cases}$$

一阶线性微分方程的通解为$f(x)=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^x\cdot \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C\right)$.

由$f(0)=0$,得$C=-\frac{1}{2}$,故$f(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$.

(8)解　依题意,有

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_L (2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y.$$

选取y为参数,则$L:\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}y^2,\\ y=y,\end{cases}$$y$从0到1,故

$$W=\int_0^1\left[\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot y^2\cdot y^3-y^2\cdot\cos\frac{\pi}{2}y^2\right)\pi y+1-2y\sin\frac{\pi}{2}y^2+3\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y^4\cdot y^2\right]\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{4}.$$

(9)解法1　因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,所以在不含点(0,0)的区域内,积分与路径无关. 如图9-6所示,取

$$\overline{AD}:\begin{cases}y=1,\\ x=x,\end{cases}\quad \overline{DB}:\begin{cases}x=-1,\\ y=y,\end{cases}\quad \overset{\frown}{BEC}:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}$$

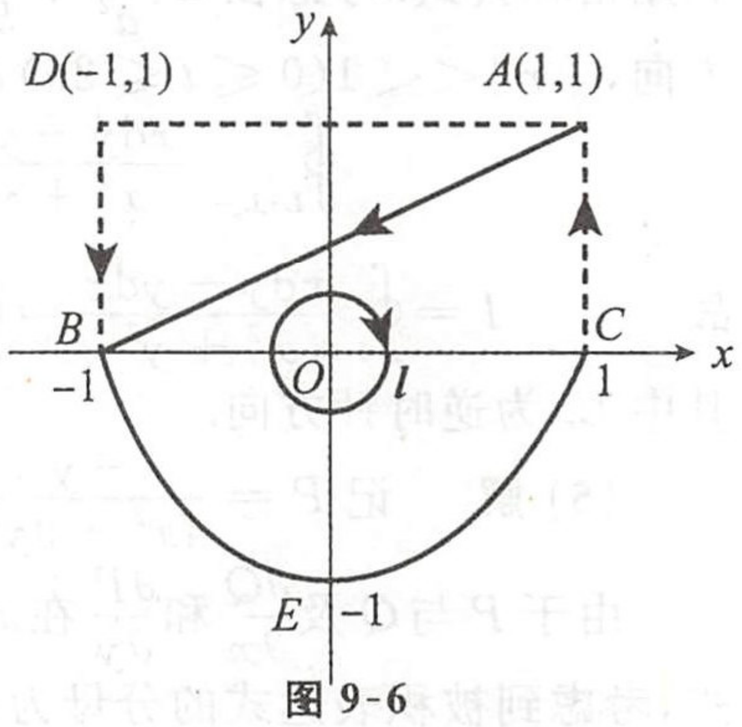


图9-6

故
$$I=\int_1^{-1}\frac{-\mathrm{d}x}{1+x^2}+\int_1^0\frac{-\mathrm{d}y}{1+y^2}+\int_\pi^{2\pi}\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{1}\mathrm{d}t$$
$$=-\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)-\left(0-\frac{\pi}{4}\right)+(2\pi-\pi)=\frac{7\pi}{4}.$$

解法2　用格林公式.

连接$\overline{CA}:\begin{cases}x=1,\\ y=y,\end{cases}$　$l:\begin{cases}x=\delta\cos t,\\ y=\delta\sin t\end{cases}$($\delta$充分小)取顺时针方向,则

$$I=\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_{\overset{\frown}{ABECA}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\int_{\overline{CA}}-\oint_{l_{顺}},$$

$$\oint_{\overset{\frown}{ABECA}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

故
$$I=\oint_{l_{逆}}-\int_{\overline{CA}}=\int_0^{2\pi}\frac{\delta^2}{\delta^2}\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}.$$

【注】　解法1利用积分与路径无关,不能取$\overline{CA}$的原因是闭曲线$\overset{\frown}{ABEC}+\overline{CA}$中含(0,0),而$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$在点(0,0)处没有意义.

(10)解　(Ⅰ)由于D是单连通区域,且$P(x,y), Q(x,y)$在D内有连续偏导数,故

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\text{在}D\text{内与路径无关}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

即
$$-\frac{2x}{y^2}(\sqrt{x^2+y^2})^k-\frac{x^2}{y^2}k(\sqrt{x^2+y^2})^{k-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=-\frac{x}{y^2}(\sqrt{x^2+y^2})^k+\frac{x}{y}k(\sqrt{x^2+y^2})^{k-1}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

等式两边同时除以$\frac{x}{y^2}(\sqrt{x^2+y^2})^{k-2}$,得$-2(x^2+y^2)-kx^2=-(x^2+y^2)+ky^2$,

即$(k+1)(x^2+y^2)=0$,解得$k=-1$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $k=-1$ 时，存在 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

用积分求 $u(x,y)$.

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=\dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$，可知

$$u(x,y)=\int\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x+\varphi_1(y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}+\varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)=\varphi_1(y)+C_1$. 又因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{1}{y^2}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\varphi'(y)\\&=\frac{-(x^2+y^2)+y^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}+\varphi'(y)\\&=\frac{-x^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}+\varphi'(y)=Q(x,y),\end{aligned}$$

所以 $\varphi'(y)=0$，即 $\varphi(y)=C$，从而有

$$u(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}+C(C\text{ 为任意常数}).$$

$$I=\int_{(1,1)}^{(2,2)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=u(x,y)\Big|_{(1,1)}^{(2,2)}=\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}+C\right)\Big|_{(1,1)}^{(2,2)}=0.$$

(11) 解法 1　如图 9-7 所示，曲线 $L:\begin{cases}z=4-x^2-y^2,\\z=3,\end{cases}$ 消去 z，得 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=3,\end{cases}$

故其参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t,\\y=\sin t,\\z=3\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$

$$\begin{aligned}I&=\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}[\cos^2t\sin^3t(-\sin t)+3\cos t+0]\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

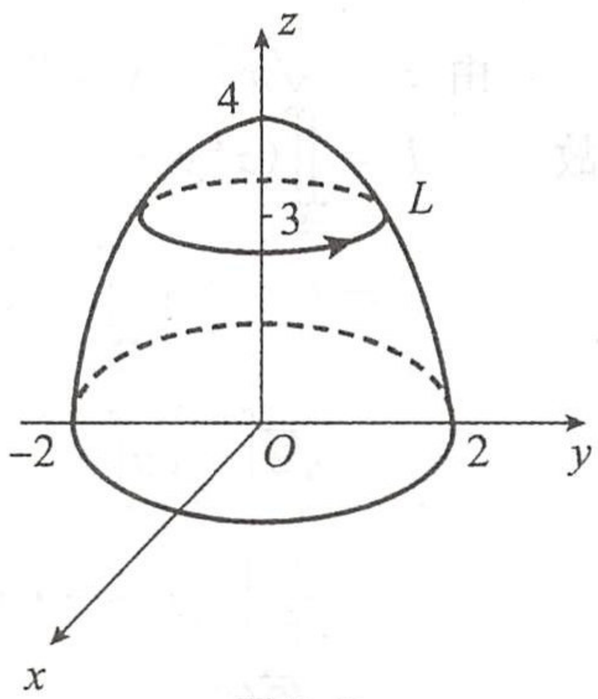


图 9-7

解法 2　利用斯托克斯公式，考虑 L 在平面 $z=3$ 上，则

$$I=\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2y^3 & z & y\end{vmatrix}\mathrm{d}S.$$

由 $z=3$，知单位法向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(0,0,1)$，故

$$I=\iint_S\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2y^3 & z & y\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\iint_S 3x^2y^2\mathrm{d}S.$$

对 $S:z=3$，有 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故

$$\begin{aligned}I&=-\iint_{D_{xy}}3x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin^2\theta\cdot r\mathrm{d}r\\&=-3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\mathrm{d}r=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta-\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta\right)=-\frac{\pi}{8},\end{aligned}$$

其中 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1$.

【注】　① 计算空间曲线积分常有两种方法：

（ⅰ）利用参数方程化为定积分计算；

（ⅱ）对于空间闭曲线 L，可利用斯托克斯公式.

② 结论：$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta$，

如 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$（见《李林考研数学系列高等数学辅导讲义》）.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

③ 此题也可将 $z=3$ 代入被积表达式，消去 $\mathrm{d}z$，化为平面曲线积分：

$$I=\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\oint_{L_1}x^2y^3\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y\ (L_1:x^2+y^2=1).$$

由格林公式，知 $I=\oint_{L_1}x^2y^3\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}3x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{8}$.

(12) 解　如图 9-8 所示.

$$I=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{极坐标}}{=\!=\!=}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r$$

$$\overset{r=\sin t}{=\!=\!=}2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 t}{\cos t}\cdot\cos t\mathrm{d}t=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 t\mathrm{d}t$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\cdot\mathrm{d}(-\cos t)=\frac{8-5\sqrt{2}}{6}\pi.$$

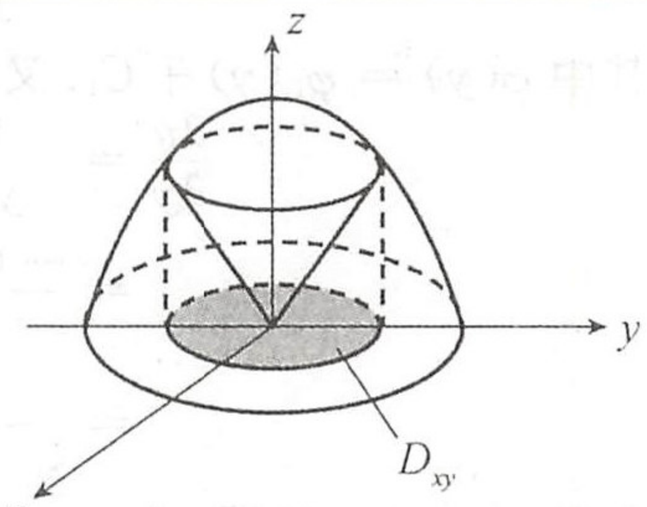


图 9-8

(13) 解　如图 9-9 所示，曲面 S 关于 xOz 面对称，x^2y 和 yz^2 关于 y 是奇函数，故 $\iint_S x^2y\mathrm{d}S=\iint_S yz^2\mathrm{d}S=0$.

由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，得 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

故 $I=\iint_S(x^2y+yz^2+z^2x)\mathrm{d}S$

$$=0+0+\iint_S z^2x\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}x(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\cos\theta\cdot r^2\cdot r\mathrm{d}r=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^4\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot(2a)^5\cdot\cos^5\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}\cdot(2a)^5}{5}\cdot2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}(2a)^5}{5}\cdot2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=2\sqrt{2}a^5\pi.$$

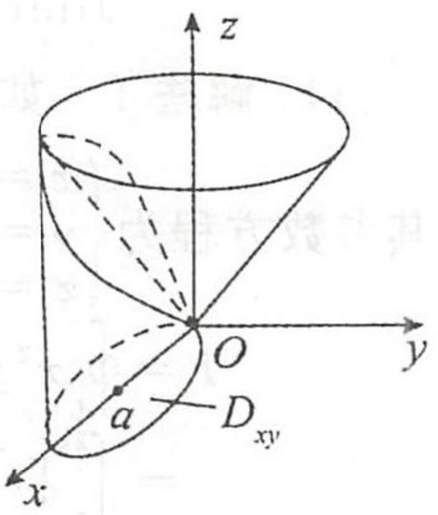


图 9-9

(14) 解法 1　如图 9-10 所示，利用高斯公式.

添加曲面 $S_1:z=1\ (x^2+y^2\leqslant1)$，取上侧，有

$$I=\oiint_{S+S_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{S_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 $\oiint_{S+S_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V(2x+1)\mathrm{d}V$

$$\overset{\text{柱面坐标}}{=\!=\!=}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1(2r\cos\theta+1)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2},$$

$$\iint_{S_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r=\pi,$$

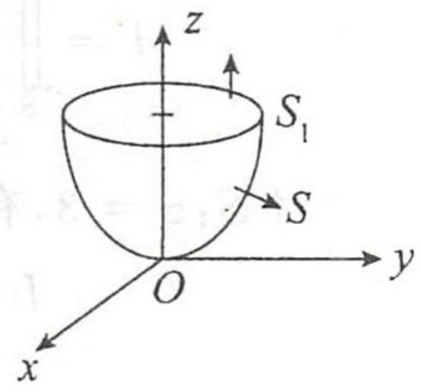


图 9-10

其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$，故 $I=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$.

解法 2　投影法. $S:z=x^2+y^2$ 下侧的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2x,2y,-1)$，方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2x}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(-1)^2}},\ \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(-1)^2}}.$$

由 $\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\cos\alpha}=\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos\beta}=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\gamma}=\mathrm{d}S$(转换公式)，可知

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

故 $I=\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S[x^2\cdot(-2x)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}(-2x^3+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，$x^3$ 为奇函数，从而

$$I=2\iint\limits_{D_{xy}}x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{2}.$$

【注】 此题若取 $S:z=x^2+y^2$ 上侧，则法向量取 $\boldsymbol{n}=(-2x,-2y,1)$.

(15) 解法 1 （投影法）如图 9-11 所示.

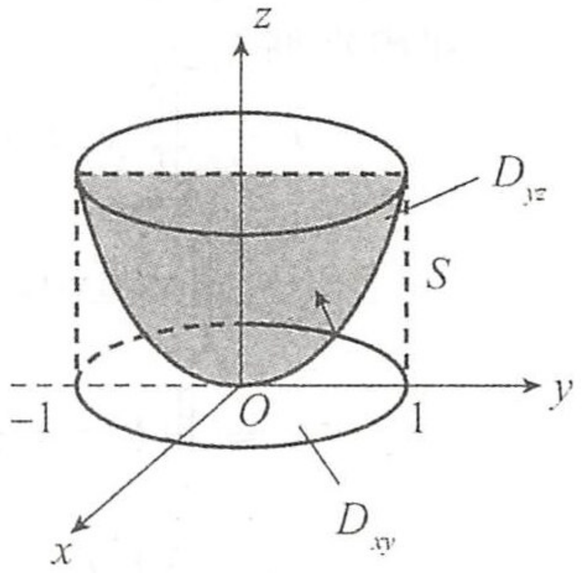


图 9-11

$$I=\iint\limits_S(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{记}}I_1+I_2.$$

$$I_1=\iint\limits_S(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{S_{前}}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{S_{后}}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{yz}}(-\sqrt{z-y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-2\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^1\sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}z$$

$$=-2\int_{-1}^1\frac{2}{3}(z-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y^2}^1\mathrm{d}y=-2\int_{-1}^1\frac{2}{3}\cdot(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{4}{3}\cdot 2\int_0^1(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y\xlongequal{y=\sin t}\frac{4}{3}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{4}{3}\times 2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2},$$

$$I_2=\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2},$$

故 $I=I_1+I_2=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=0.$

解法 2 （转换公式法） $\dfrac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\cos\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos\beta}=\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\gamma}=\mathrm{d}S.$

曲面 $S:z=x^2+y^2$ 上侧的法向量为 $\boldsymbol{n}=(-2x,-2y,1)$，故

$$\cos\alpha=\frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\ \cos\beta=\frac{-2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

所以 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故

$$I=\iint\limits_S(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_S[(x+1)\cdot(-2x)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S(-2x^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}[-2x^2+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2\sin^2\theta-r^2\cos^2\theta)r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=-\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{4}=0.$$

解法 3 （高斯公式法）

添加辅助面 $S_1:\begin{cases}z=1,\\ x^2+y^2\leqslant 1,\end{cases}$ 取下侧，则 $I=\oiint\limits_{S+S_1}-\iint\limits_{S_1}$. 又

$$\oiint\limits_{S+S_1}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint\limits_V(1+0+1)\mathrm{d}V\xlongequal{\text{柱坐标}}-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z=-\pi.$$

$$\iint\limits_{S_1}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\iint\limits_{S_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r=-\pi,$$

故 $I=-\pi-(-\pi)=0.$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】 获取更多考研资源!

【注】 计算第二类曲面积分有三种方法:
法1:投影法;法2:转换公式法;法3:高斯公式(见《李林考研数学系列高等数学辅导讲义》).
以上三种解法中,高斯公式法较简单.

(16)解 如图9-12所示,添加辅助面 $S_1:\begin{cases}y=0,\\x^2+z^2\leqslant 4,\end{cases}$ 取左侧,在 S_1 上,$\iint\limits_{S_1} yz\,dydz+(x^2+z^2)ydzdx+xy\,dxdy=0.$

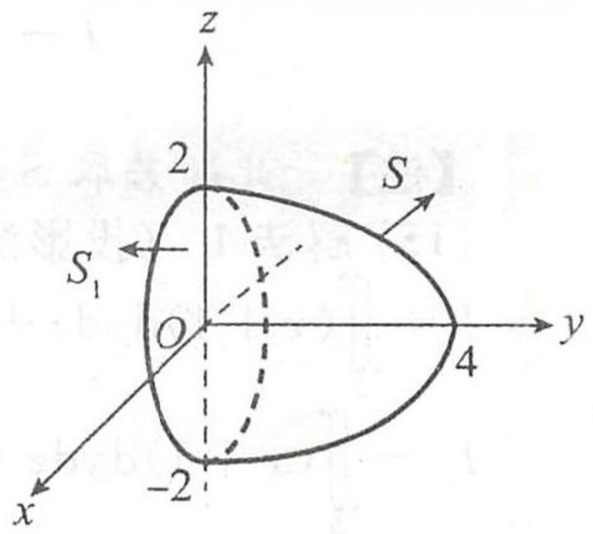


图 9-12

利用高斯公式,有

$$I=\oiint\limits_{S+S_1} yz\,dydz+(x^2+z^2)ydzdx+xy\,dxdy-\iint\limits_{S_1} yz\,dydz+(x^2+z^2)ydzdx+xy\,dxdy$$

$$=\iiint\limits_{V}(x^2+z^2)\,dV\xlongequal{\text{先二后一}}\int_0^4 dy\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{4-y}} r^2\cdot r\,dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^4(4-y)^2\,dy=\frac{32}{3}\pi.$$

(17)解 如图9-13所示,为了利用高斯公式,添加辅助面 $S_1:\begin{cases}z=2,\\x^2+y^2\leqslant 4,\end{cases}$ 取下侧;$S_2:\begin{cases}z=1,\\x^2+y^2\leqslant 1,\end{cases}$ 取上侧,则

$$I=\oiint\limits_{S+S_1+S_2}-\iint\limits_{S_1}-\iint\limits_{S_2}.$$

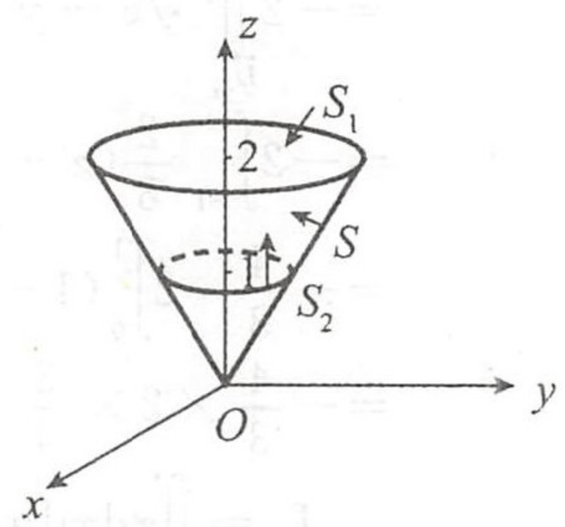


图 9-13

而 $\oiint xz^2\,dydz+y^2\,dzdx+zx\,dxdy$

$$=-\iiint\limits_{V}(z^2+2y+x)\,dxdydz=-\int_1^2 z^2\,dz\iint\limits_{D_z}dxdy$$

$$=-\int_1^2 z^2\cdot\pi z^2\,dz=-\frac{31\pi}{5}(\text{这里利用了 }2y\text{ 与 }x\text{ 是奇函数}).$$

又 $\iint\limits_{S_1} xz^2\,dydz+y^2\,dzdx+zx\,dxdy=0+0+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}2x\,dxdy=0+0+0=0,$

$\iint\limits_{S_2} xz^2\,dydz+y^2\,dzdx+zx\,dxdy=0+0+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}x\,dxdy=0+0+0=0,$

故 $I=-\frac{31\pi}{5}.$

【注】 $\iint\limits_{S_1} xz^2\,dydz+y^2\,dzdx+zx\,dxdy=\iint\limits_{S_1} xz^2\,dydz+\iint\limits_{S_1} y^2\,dzdx+\iint\limits_{S_1} zx\,dxdy\xlongequal{\text{记}}I_1+I_2+I_3.$

计算 I_1,$I_1=\iint\limits_{S_1} xz^2\,dydz=\iint\limits_{D_{yz}} x\cdot z^2\,dydz,$

由于 S_1 投影到 yOz 面是一条线段,故 $I_1=0$,同理 $I_2=\iint\limits_{S_1} y^2\,dzdx=0.$

(18)解 因为原点包含在 S 的内部,所以不能直接用高斯公式,用投影法(公式),由于 $S_{外}=S_1+S_2+S_3$(如图9-14),则

$$I=\oiint\limits_{S_{外}}=\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}+\iint\limits_{S_3}.$$

分别计算如下:

(Ⅰ)$\iint\limits_{S_1}\frac{x\,dydz}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{S_2}\frac{x\,dydz}{x^2+y^2+z^2}=0;$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$(\text{Ⅱ})\quad \iint\limits_{S_1}\frac{z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{S_2}\frac{z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+1}+\left(-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+1}\right)=0,$$

其中 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1$；

$$(\text{Ⅲ})\iint\limits_{S_3}\frac{z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=0;$$

$$(\text{Ⅳ})\iint\limits_{S_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{S_{3\text{前}}}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{S_{3\text{后}}}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\iint\limits_{D_3}\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_3}\left(-\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+z^2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\iint\limits_{D_3}\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{2}(D_3:-1\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant z\leqslant 1).$$

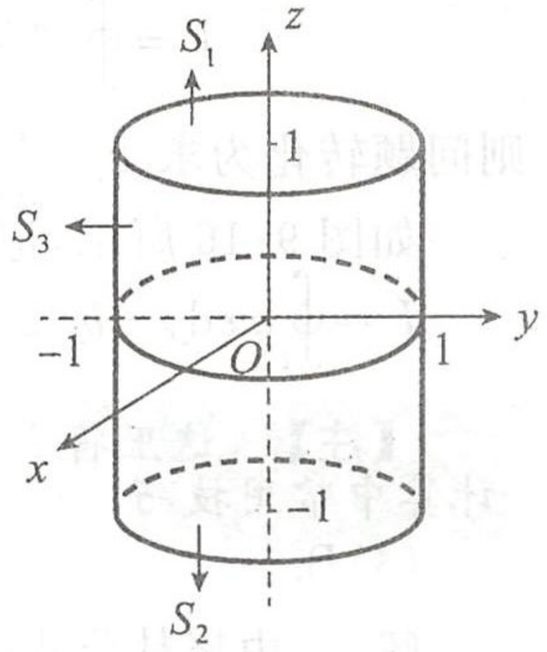


图 9-14

综上所述，$I=\dfrac{\pi^2}{2}$.

(19) 解　当雪堆的高度为 h 时，其体积为 $V=\int_0^h\pi(h^2-hz)\mathrm{d}z=\dfrac{\pi h^3}{2}$.

其表面积为

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\sqrt{1+\frac{4x^2}{h^2}+\frac{4y^2}{h^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\frac{\sqrt{h^2+4x^2+4y^2}}{h}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\sqrt{h^2+4r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{\pi h^2}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

将 V 和 S 的表达式代入 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-aS$，得 $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{a}{9}(5\sqrt{5}-1)$，积分得

$$h=-\frac{a}{9}(5\sqrt{5}-1)t+C.$$

由 $h\Big|_{t=0}=h_0$，得 $C=h_0$，故 $h=-\dfrac{a}{9}(5\sqrt{5}-1)t+h_0$.

雪堆全部融化，即 $h=0$，所需时间为 $t=\dfrac{9h_0}{a(5\sqrt{5}-1)}=\dfrac{9h_0(5\sqrt{5}+1)}{124a}$.

综合题

一、选择题

(1) B.

解　如图 9-15 所示，由曲线积分的定义，知

$$I_1=\int_{L_1}f(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i<0(\text{因 }f(\xi_i,\eta_i)>0,$$

$\Delta x_i<0)$，

$$I_3=\int_{L_3}f(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i>0(\text{因 }f(\xi_i,\eta_i)>0,$$

$\Delta x_i>0)$，

$$I_2=\int_{L_2}f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i>I_3(\text{因 }\Delta s_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}\geqslant|\Delta x_i|),$$

故 $I_2>I_3>I_1$.

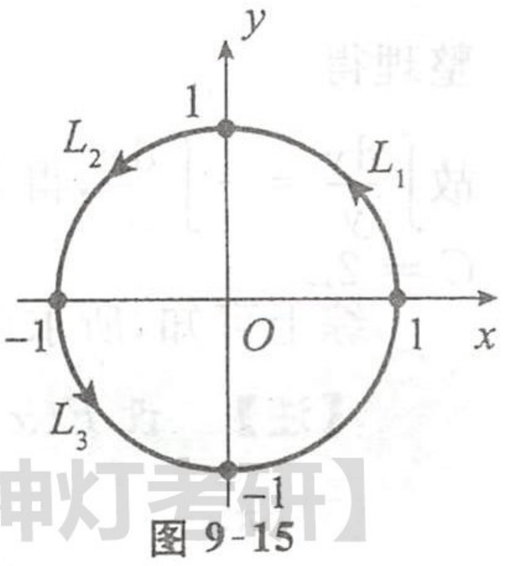


图 9-15

(2) B.

解　由 $L:|x|+|y|=1$，知

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

$$I=\oint_L \frac{ax\,dy-by\,dx}{|x|+|y|}=\oint_L ax\,dy-by\,dx,$$

则问题转化为求 $I=\oint_L ax\,dy-by\,dx$.

如图 9-16 所示,记 D 为 $|x|+|y|\leqslant 1$,应用格林公式,得

$$I=\oint_L ax\,dy-by\,dx=\iint_D (a+b)\,dx\,dy=(a+b)\cdot(\sqrt{2})^2=2(a+b).$$

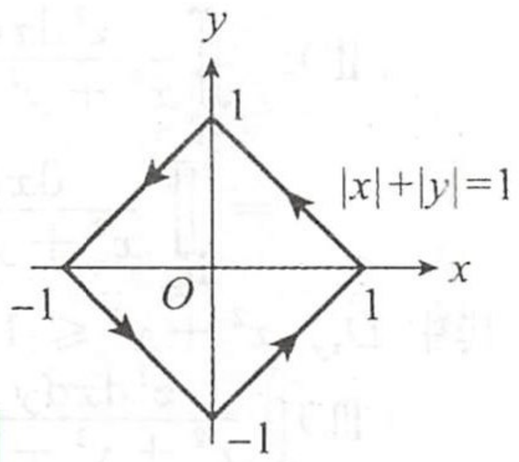


图 9-16

【注】 这里将 $L:|x|+|y|=1$ 代入被积表达式是曲线积分计算中常用技巧.

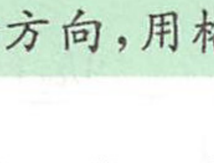
(3) B.

解 由格林公式,知 $\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_L P\,dx+Q\,dy.$

取 $P=-y,Q=x$,则 $2\iint_D dx\,dy=\oint_L x\,dy-y\,dx$,即面积为

$$S=\iint_D dx\,dy=\frac{1}{2}\oint_L x\,dy-y\,dx.$$

【注】 简单闭曲线表示无重点的闭曲线,如



简单闭曲线

不是简单闭曲线

二、填空题

(1) $-\frac{\pi R^2}{2}$.

解 沿闭曲线 L 的积分,考虑利用格林公式. 先将 $L:x^2+y^2=R^2$ 代入被积函数,去掉被积函数中无定义的点(0,0),则

$$I=\frac{1}{R^2}\oint_L (e^{x^2}-x^2y)\,dx+(xy^2-e^{y^2})\,dy$$
$$\xlongequal{\text{格林公式}}-\frac{1}{R^2}\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$
$$=-\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R r^2\cdot r\,dr=-\frac{\pi R^2}{2}.$$

【注】 L 为顺时针方向,用格林公式需加一个负号.

(2) $xy=2$.

解 依题设,记 $P(x,y)=F(x,y)y,Q(x,y)=F(x,y)x$,则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,即

$$F(x,y)+xF'_x(x,y)=F(x,y)+yF'_y(x,y),$$

整理得

$$-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{y}{x}=\frac{dy}{dx},$$

故 $\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$,得 $\ln|y|=-\ln|x|+\ln e^{C_1}$,所以 $xy=C(C=\pm e^{C_1})$,又过(1,2)点,得 $C=2$.

综上可知,所求函数为 $xy=2$.

【注】 设 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数为 $y=y(x)$,则 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

(3) 8π.

解
$$m=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS=\iint_S 2x\,dS$$
$$=\iint_S 2(x-1)\,dS+\iint_S 2\,dS=0+2\times 4\pi\times 1^2=8\pi(\text{利用球面面积}).$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

【注】　①$S:x^2+y^2+z^2=2x$，即$(x-1)^2+y^2+z^2=1$关于平面$x=1$对称，$2(x-1)$关于$(x-1)$是奇函数，故$\iint\limits_S 2(x-1)\mathrm{d}S=0$.

②计算$\iint\limits_S x\mathrm{d}S$(被积函数为一次函数).

应注意利用奇偶性(包括“平移”，如上例)，有时还可利用质心(形心)坐标：

$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_S x\rho\mathrm{d}S}{\iint\rho\mathrm{d}S}=\frac{\iint\limits_S x\mathrm{d}S}{\iint\mathrm{d}S},$$

则$\iint\limits_S x\mathrm{d}S=\overline{x}\cdot\iint\limits_S\mathrm{d}S$.

对二重积分、三重积分、第一型曲线积分、第一型曲面积分都有类似解决方法.

(4)0.

解　$\mathbf{grad}\ \sin(x+y+z)=(\cos(x+y+z),\cos(x+y+z),\cos(x+y+z))$.

由斯托克斯公式，有

$$I=\oint_L\cos(x+y+z)\mathrm{d}x+\cos(x+y+z)\mathrm{d}y+\cos(x+y+z)\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \cos(x+y+z) & \cos(x+y+z) & \cos(x+y+z)\end{vmatrix}=0.$$

(5)j，3.

解　$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+y+z & xy & z\end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{j}+(y-1)\boldsymbol{k},$$

在点$P(1,1,1)$处，有$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{j}$.

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+x+1=2+x,$$

故在点$P(1,1,1)$处，$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}=2+1=3$.

(6)4π.

解　令$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$，则外法向量为

$$(F'_x,F'_y,F'_z)=(2x,2y,2z),$$

故外单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{2x}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}},\frac{2y}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}},\frac{2z}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}}\right)$$

$$=(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

从而　$$\iint\limits_S\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint\limits_S(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_S 1\mathrm{d}S=4\pi\times1^2=4\pi,$$

这里$x^2+y^2+z^2=1$，$\iint\limits_S\mathrm{d}S$表示球面$S$的表面积.

三、解答题

(1)解　记$P=[x\mathrm{e}^{2x}-6f(x)]\sin y$，$Q=-[5f(x)-f'(x)]\cdot\cos y$，

依题意，有$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，且$\cos y\neq0$，故$f''(x)-5f'(x)+6f(x)=x\mathrm{e}^{2x}$.　①

①式对应齐次微分方程的特征方程为$r^2-5r+6=0$，解得$r_1=2$，$r_2=3$.令非齐次微分方程的特解为

$$f^*=x(a_0x+a_1)\mathrm{e}^{2x},$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

代入①式可解得 $a_0=-\frac{1}{2}, a_1=-1$,故方程①的通解为

$$f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{2}x(x+2)e^{2x}.$$

又由 $f(0)=0, f'(0)=1$,得 $C_1=-2, C_2=2$,故

$$f(x)=-2e^{2x}+2e^{3x}-\frac{x}{2}(x+2)e^{2x}.$$

(2) 证　由格林公式,有

$$\oint_L xe^{y^2}dy-ye^{-x^2}dx=\iint_D(e^{y^2}+e^{-x^2})dxdy.$$

又 D 关于直线 $y=x$ 对称(如图 9-17),则

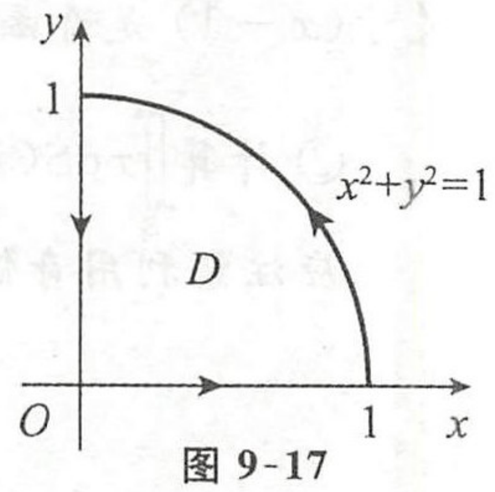


图 9-17

$$\begin{aligned}\iint_D(e^{y^2}+e^{-x^2})dxdy&=\iint_D e^{y^2}dxdy+\iint_D e^{-x^2}dxdy=\iint_D e^{x^2}dxdy+\iint_D e^{-x^2}dxdy\\&=\iint_D(e^{x^2}+e^{-x^2})dxdy\geqslant\iint_D 2\sqrt{e^{x^2}\cdot e^{-x^2}}dxdy\\&=2\iint_D dxdy=2\times\frac{1}{4}\pi\times1^2=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

【注】　这里分开利用轮换对称性.

(3) 解　设 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}$ 则

$$\begin{aligned}I&=\oint_L-3ydx+\oint_L f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy\\&=-\int_0^{2\pi}(-3\sin t)d(2\cos t)+\oint_L d[f(x,y)]\\&=-6\pi+0=-6\pi.\end{aligned}$$

【注】　$\oint_L d[f(x,y)]=0$ 是利用了积分与路径无关的等价命题.

(4) 解法 1　记 $P=\frac{x+y}{x^2+y^2}, Q=-\frac{x-y}{x^2+y^2}$,则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

故在不含(0,0)在内的单连通区域积分与路径无关.

选择折线 $ACDB$,如图 9-18 所示,其中

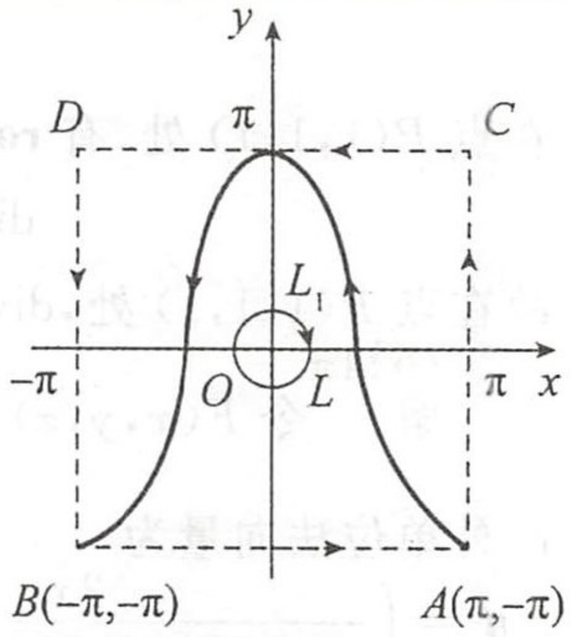


图 9-18

$$\overline{AC}:\begin{cases}x=\pi,\\ y=y,\end{cases}\quad\overline{CD}:\begin{cases}y=\pi,\\ x=x,\end{cases}\quad\overline{DB}:\begin{cases}x=-\pi,\\ y=y,\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}I&=\int_{\overline{AC}}+\int_{\overline{CD}}+\int_{\overline{DB}}\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-(\pi-y)dy}{\pi^2+y^2}+\int_{\pi}^{-\pi}\frac{(\pi+x)dx}{\pi^2+x^2}+\int_{\pi}^{-\pi}\frac{-(-\pi-y)}{\pi^2+y^2}dy\\&=-\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

解法 2　利用格林公式求解.

如图 9-18 所示,作辅助线 $\overline{BA}:\begin{cases}y=-\pi,\\ x=x,\end{cases}$ $L_1:\begin{cases}x=\delta\cos t,\\ y=\delta\sin t,\end{cases}$ δ 充分小,取顺时针方向,则

$$I=\oint_{L+\overline{BA}+L_1}-\int_{\overline{BA}}-\int_{L_1},$$

$$\oint_{L+\overline{BA}+L_1}\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}\xlongequal{\text{格林公式}}\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0,$$

其中 D 为 $L+\overline{BA}+L_1$ 构成的复连通区域.

$$\int_{\overline{BA}}\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资料

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(x-\pi)\mathrm{d}x}{x^2+\pi^2} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}(x^2+\pi^2)}{x^2+\pi^2} - \pi\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\pi^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+\pi^2)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \pi \cdot \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{L_1} \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$= \int_{2\pi}^{0} \frac{(\delta\cos t+\delta\sin t)(-\delta\sin t)-(\delta\cos t-\delta\sin t)\delta\cos t}{\delta^2\cos^2 t+\delta^2\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$= -\int_{2\pi}^{0} \mathrm{d}t = 2\pi,$$

故 $I = 0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)-2\pi = -\frac{3\pi}{2}$.

【注】 如下解法是错误的：

由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，连接 $\overline{AB}$：$\begin{cases} y=-\pi, \\ x=x, \end{cases}$ 则

$$I = \int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{(x-\pi)}{x^2+\pi^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

因为 $\overline{AB}$ 与 $y=\pi\cos x$ 所围区域 D 内含奇点 $(0,0)$，所以 D 不是单连通区域，不能说明积分与路径无关.

(5) 解　利用格林公式求解.

记 $P = f'(x)\sin y, Q = f(x)\cos y - \pi x$，则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\pi$.

如图 9-19 所示，添加线段 $\overline{OA}$：$\begin{cases} y=\pi x, \\ x=x, \end{cases}$ 则

$$I = \oint_{L+\overline{OA}} f'(x)\sin y\mathrm{d}x + [f(x)\cos y - \pi x]\mathrm{d}y -$$

$$\int_{\overline{OA}} f'(x)\sin y\mathrm{d}x + [f(x)\cos y - \pi x]\mathrm{d}y.$$

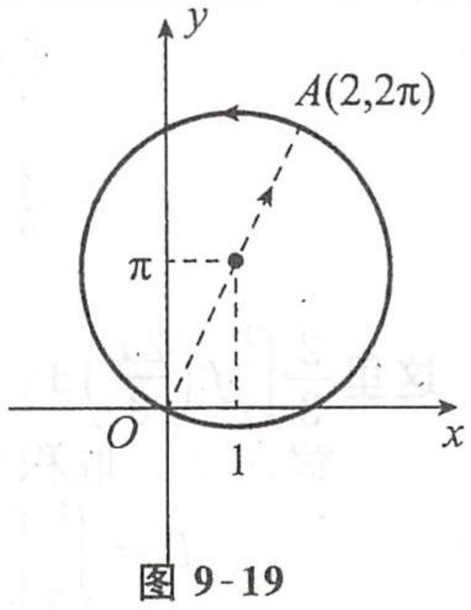


图 9-19

而 $\oint_{L+\overline{OA}} f'(x)\sin y\mathrm{d}x + [f(x)\cos y - \pi x]\mathrm{d}y$

$$= \iint_{D} (-\pi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi\iint_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi(1+\pi^2) = -\frac{\pi^2}{2}(1+\pi^2),$$

其中 D 为 $\overset{\frown}{AO}$ 与 $\overline{OA}$ 所围半圆区域. 又

$$\int_{\overline{OA}} f'(x)\sin y\mathrm{d}x + [f(x)\cos y - \pi x]\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\overline{OA}} f'(x)\sin y\mathrm{d}x + f(x)\cos y\mathrm{d}y - \int_{\overline{OA}} \pi x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\overline{OA}} \mathrm{d}[f(x)\sin y] - \int_0^2 \pi\cdot x\mathrm{d}(\pi x)$$

$$= \int_0^2 \mathrm{d}[f(x)\sin \pi x] - 2\pi^2 = f(x)\sin \pi x\Big|_0^2 - 2\pi^2$$

$$= 0 - 2\pi^2 = -2\pi^2,$$

故 $I = -\frac{\pi^2}{2}(1+\pi^2) + 2\pi^2 = \frac{\pi^2}{2}(3-\pi^2)$.

(6) 解　记 $P = f(y)\mathrm{e}^x - \pi y, Q = f'(y)\mathrm{e}^x - \pi$，则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \pi$.

设曲线 $\overset{\frown}{OA}$ 与线段 $\overline{AO}$ 所围区域为 D，如图 9-20 所示，

$$\overline{AO}: \begin{cases} y=0, \\ x=x \end{cases} (-2a \leqslant x \leqslant 0).$$

利用格林公式，得

$$\oint_{\overset{\frown}{OA}+\overline{AO}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} r^2\mathrm{d}\theta = \frac{a^2\pi}{2}\int_0^{\pi} (1-\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

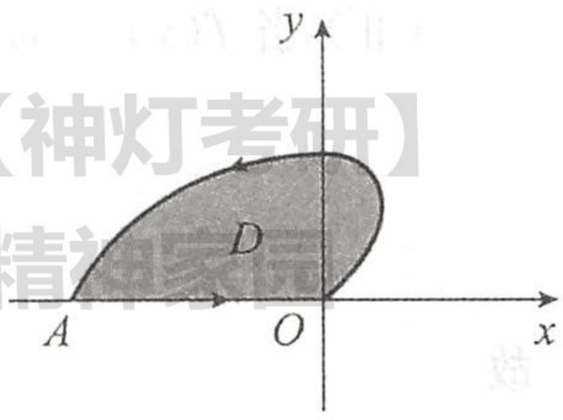


图 9-20

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

【更多考研资源】

$$= \frac{a^2\pi}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi^2 a^2}{4}.$$

又 $$\int_{\overline{AO}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{-2a}^{0} P(x,0)\,\mathrm{d}x = \int_{-2a}^{0} f(0)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 0,$$

故 $I = \frac{3}{4}\pi^2 a^2$.

(7) 解法 1 记 $P = \frac{1+y^2 f(xy)}{y}$, $Q = \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1]$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = f(xy) + xyf'(xy) - \frac{1}{y^2}(y \neq 0),$$

故当 $y \neq 0$ 时, 积分与路径无关.

取折线 $\overline{AC} + \overline{CB}$, $A\left(3, \frac{2}{3}\right)$, $C\left(1, \frac{2}{3}\right)$, $B(1,2)$, 如图 9-21 所示,

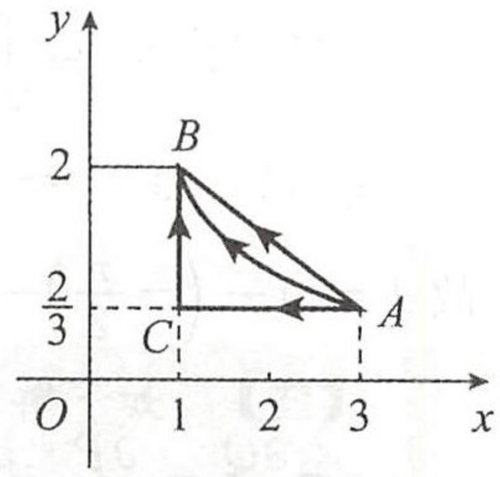


图 9-21

$$\overline{AC}: \begin{cases} y = \frac{2}{3}, \\ x = x, \end{cases} \quad \overline{CB}: \begin{cases} x = 1, \\ y = y, \end{cases}$$

故
$$\begin{aligned} I &= \int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y}\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1]\mathrm{d}y \\ &= \int_3^1 \frac{3}{2}\left[1 + \frac{4}{9}f\left(\frac{2}{3}x\right)\right]\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^2 \left[f(y) - \frac{1}{y^2}\right]\mathrm{d}y \\ &= \frac{3}{2}\int_3^1 \mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_3^1 f\left(\frac{2x}{3}\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{3}{2}(1-3) + \int_2^{\frac{2}{3}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -4, \end{aligned}$$

这里 $\frac{2}{3}\int_3^1 f\left(\frac{2x}{3}\right)\mathrm{d}x \xlongequal{\frac{2x}{3} = t} \int_2^{\frac{2}{3}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

解法 2 取积分路径为 $xy = 2$, 则

$$I = \int_{\frac{2}{3}}^2 \left[\frac{1+y^2 f(2)}{y}\left(-\frac{2}{y^2}\right) + \frac{2}{y^3}[y^2 f(2) - 1]\right]\mathrm{d}y = \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{-4}{y^3}\mathrm{d}y = -4.$$

【注】 第二类曲线积分(平面), 当积分与路径无关时, 可选简单路径积分, 如折线、圆周等.

(8) 解 (Ⅰ) 由 $\mathrm{d}u = V$, $f(x)$, $g(x)$ 有连续导数, 得

$$\frac{\partial}{\partial y}[yf(xy)] = \frac{\partial}{\partial x}[xg(xy)],$$

即 $$f(xy) + yf'(xy)\cdot x = g(xy) + xg'(xy)\cdot y.$$

令 $xy = t > 0$, 得 $$f(t) + t\frac{\mathrm{d}[f(t)]}{\mathrm{d}t} = g(t) + t\frac{\mathrm{d}[g(t)]}{\mathrm{d}t},$$

即 $t\frac{\mathrm{d}[f(t) - g(t)]}{\mathrm{d}t} = -[f(t) - g(t)]$, 当 $f(t) \neq g(t)$ 时, 变形为 $\frac{\mathrm{d}[f(t) - g(t)]}{f(t) - g(t)} = -\frac{\mathrm{d}t}{t}$,

积分得 $f(t) - g(t) = \frac{C_0}{t}(C_0 \neq 0)$,

当 $f(t) \equiv g(t)$ 时, 即 $f(t) - g(t) = \frac{0}{t}$ 也成立, 故

$$f(xy) - g(xy) = \frac{C}{xy}(C \text{ 为任意常数}).$$

(Ⅱ) 当 $f(x) = \varphi'(x)$, 由(Ⅰ)有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= y\varphi'(xy)\mathrm{d}x + x\left[\varphi'(xy) - \frac{C}{xy}\right]\mathrm{d}y \\ &= y\varphi'(xy)\mathrm{d}x + x\varphi'(xy)\mathrm{d}y - \frac{C}{y}\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{d}[\varphi(xy)] - C\mathrm{d}(\ln|y|) = \mathrm{d}[\varphi(xy) - C\ln|y|], \end{aligned}$$

故

$$u(x,y) = \varphi(xy) - C\ln|y| + C_0(C_0, C \text{ 为任意常数}).$$

(9) 解 将 L 满足的微分方程 $y' = f(x,y)$ 代入被积表达式, 得

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号: 神灯考研 客服微信: KYFT104 QQ群: 118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$I=\oint_L xf(x,y)\mathrm{d}x-\frac{y}{f(x,y)}\mathrm{d}y$$
$$=\oint_L x\cdot y'\mathrm{d}x-\frac{y}{f(x,y)}\cdot f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.$$

由格林公式，得$\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\iint_D[1-(-1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2A.$

【注】 将曲线 L 的方程代入曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$化简积分，是值得重视的技巧.

(10) 证 令 $P=\frac{y}{f(x,y)}$，$Q=-\frac{x}{f(x,y)}$，依题意，有

$$\oint_L\frac{y}{f(x,y)}\mathrm{d}x-\frac{x}{f(x,y)}\mathrm{d}y=0\Leftrightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

即
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{x}{f(x,y)}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{f(x,y)}\right],$$

则
$$\frac{xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)-2f(x,y)}{[f(x,y)]^2}=0,$$

从而
$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)-2f(x,y)=0, \qquad ①$$

故原问题转化为证 ① 式成立.

在已知等式 $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$ 两边同时对 t 求导，得

$$xf'_1(tx,ty)+yf'_2(tx,ty)=2tf(x,y),$$

令 $t=1$，得
$$xf'_1(x,y)+yf'_2(x,y)=2f(x,y),$$

即
$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)-2f(x,y)=0.$$

故所证结论成立.

【注】 满足 $f(tx,ty)=t^kf(x,y)$ 的函数 $f(x,y)$，称为 k 次齐次函数，本题若条件为 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 则有$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$(本题为数学一真题).

(11) 解 依题设，曲面 S 可分成三个曲面(如图 9-22)

$S_1:z-x=R$，$S_2:z=0$，$S_3:x^2+y^2=R^2$，

则
$$I=\oiint_S z\mathrm{d}S=\iint_{S_1}z\mathrm{d}S+\iint_{S_2}z\mathrm{d}S+\iint_{S_3}z\mathrm{d}S.$$

$$\iint_{S_1}z\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(R+x)\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(R+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R(R+r\cos\theta)r\mathrm{d}r$$
$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}R^3+\frac{1}{3}R^3\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta$$
$$=\sqrt{2}\pi R^3\ (D_{xy}:x^2+y^2\leqslant R^2).$$

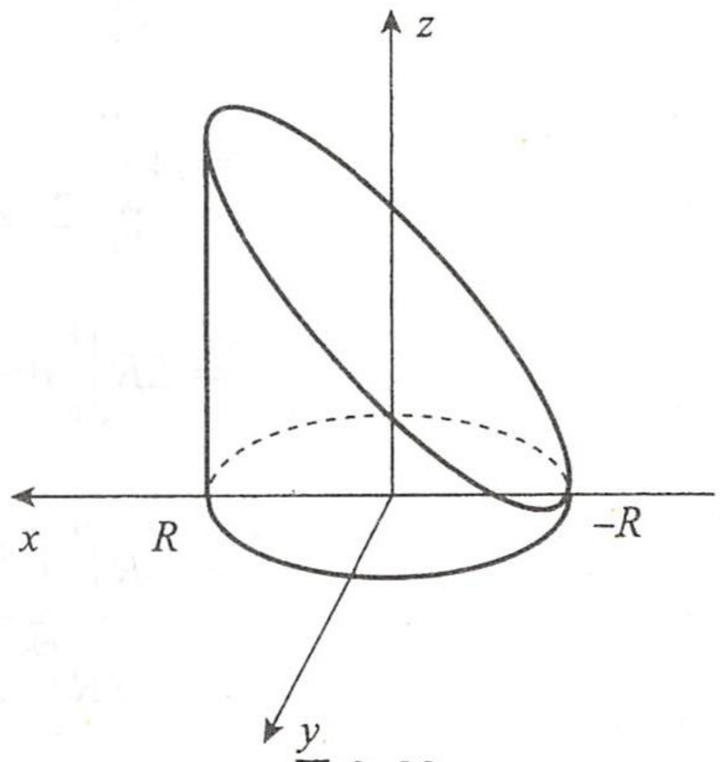


图 9-22

对 S_3 分两块，其方程分别为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$，$y=-\sqrt{R^2-x^2}$，将其投影到 xOz 面上，D_{xz} 为三角形的区域，又 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$，由对称性，知

$$\iint_{S_3}z\mathrm{d}S=2\iint_{D_{xz}}z\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=2\int_{-R}^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\int_0^{R+x}z\mathrm{d}z$$
$$=\int_{-R}^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}(R+x)^2\mathrm{d}x\xlongequal{x=R\sin t}R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)^2\mathrm{d}t$$
$$=\frac{3\pi R^3}{2}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

显然在平面 $S_2: z=0$ 上，$\iint\limits_{S_2} z\mathrm{d}S=0$，

故 $$I=\sqrt{2}\pi R^3+0+\frac{3\pi R^3}{2}=\pi R^3\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right).$$

(12) 解 由对称性，知求 S_1 只需考虑 $z\geqslant 0$ 的部分(如图 9-23).

由 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S&=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

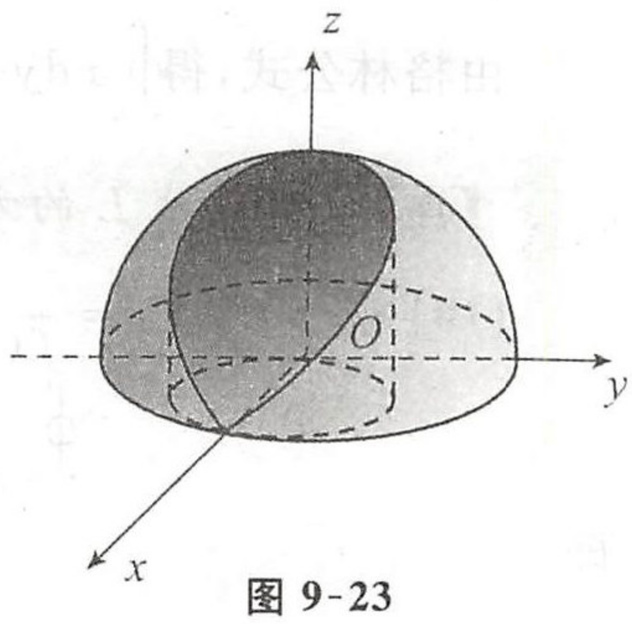


图 9-23

故 $$S_1=2\iint\limits_{S_1^+}\mathrm{d}S=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}r\mathrm{d}r=2R^2(\pi-2),$$

其中 S_1^+ 为球面在柱体内且 $z\geqslant 0$ 的曲面.

求 S_2 只需考虑 $y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的部分，由 $x^2+y^2=Rx$，知 $y=\sqrt{Rx-x^2}$. 又

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\sqrt{1+\left(\frac{R-2x}{2\sqrt{Rx-x^2}}\right)^2+0^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$=\frac{R}{2\sqrt{Rx-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

故 $$S_2=4\iint\limits_{S_2^+}\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_2^+}\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$=4\iint\limits_{D_{xz}}\frac{R}{2\sqrt{Rx-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=2\int_0^R\mathrm{d}z\int_0^{\frac{R^2-z^2}{R}}\frac{R}{\sqrt{Rx-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=2R\int_0^R\mathrm{d}z\int_0^{\frac{R^2-z^2}{R}}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{2}{R}x-1\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{R}x-1\right)^2}}$$

$$=2R\int_0^R\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(1-\frac{2z^2}{R^2}\right)\right]\mathrm{d}z$$

$$=-2R\int_0^R z\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2z^2}{R^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{-4z}{R^2}\right)\mathrm{d}z$$

$$=4R\int_0^R\frac{z}{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}z=4R^2,$$

其中 S_2^+ 为柱面在球体内且 $y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的曲面. 所以

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2R^2(\pi-2)}{4R^2}=\frac{1}{2}(\pi-2).$$

【注】 由交线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x^2+y^2=Rx,\end{cases}$ 得 $Rx+z^2=R^2$，即 $x=\dfrac{R^2-z^2}{R}$.

(13) 解 (Ⅰ)由已知，C 的方程为 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\ z^2=2x,\end{cases}$ 消去 z，得 $x^2+y^2=2x$，故 C 在 xOy 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=2x,\\ z=0.\end{cases}$

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源！
微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

（Ⅱ）S 的质量为

$$m=\iint_S \mu(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_S 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_D 9\sqrt{2}\,\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,(D:x^2+y^2\leqslant 2x)$$

$$=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r\cdot r\mathrm{d}r=64.$$

(14) 解　设 $S_0:x^2+y^2+z^2=a^2$，在 S_0 上取点 $P(0,0,a)$，则球面方程 S_1 为 $x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$，如图 9-24 所示.

由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x^2+y^2+(z-a)^2=R^2,\end{cases}$ 可得 $z=a-\dfrac{R^2}{2a}$，故所求内部曲面在 xOy 上的投影区域为 $D:x^2+y^2\leqslant R^2-\dfrac{R^4}{4a^2}$.

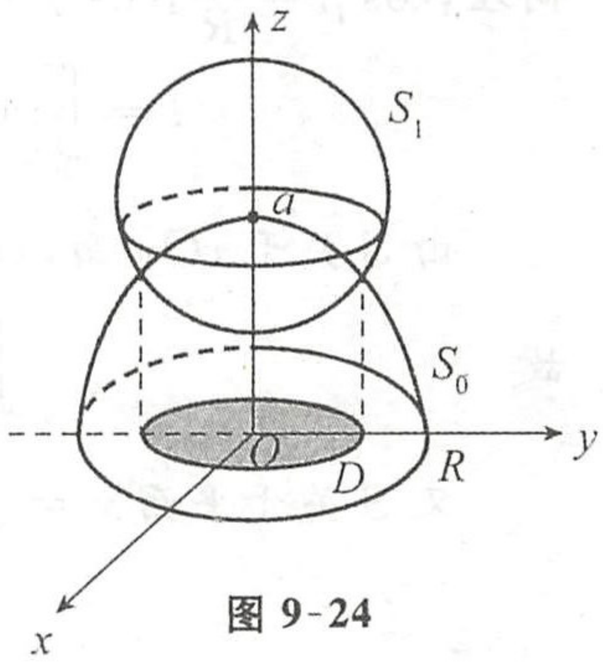


图 9-24

内部曲面记为 S，则 $S:z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，故

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所求表面积为

$$A=\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-\frac{R^4}{4a^2}}}\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}r=2\pi\left(R^2-\frac{R^3}{2a}\right).$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}R}=2\pi\left(2R-\dfrac{3R^2}{2a}\right)=0$，得 $R=\dfrac{4a}{3}$，此时表面积最大.

(15) 解　令 $P=\dfrac{1}{y+3}f\left(\dfrac{x+4}{y+3}\right)+3xy^2$，

$$Q=\frac{1}{x+4}f\left(\frac{x+4}{y+3}\right)+3x^2y,$$

$$R=z^3.$$

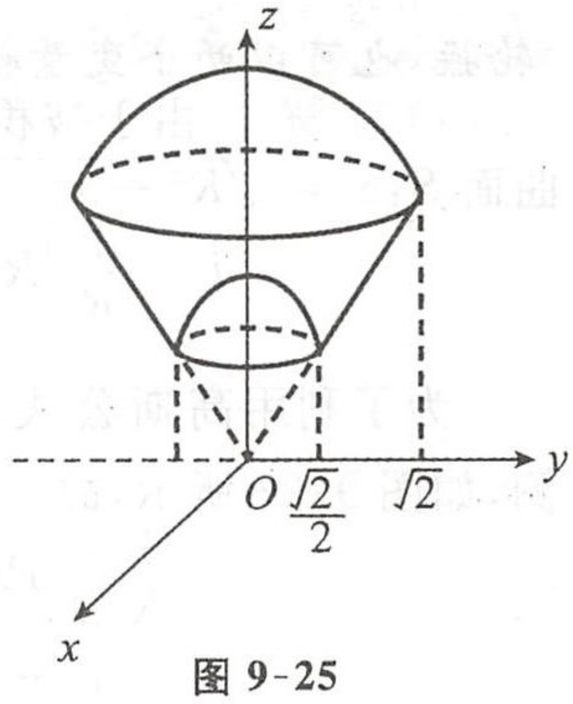


图 9-25

如图 9-25 所示，所求积分满足高斯公式的条件. 利用高斯公式，有

$$I=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=3\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

$$\xlongequal{\text{球坐标}}3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^4\mathrm{d}r=\frac{93}{5}(2-\sqrt{2})\pi.$$

(16) 解　由两类曲面积分的关系，有

$$I=\iint_S(z^n-y^n)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^n-z^n)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^n-x^n)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

记 $P=z^n-y^n$，$Q=x^n-z^n$，$T=y^n-x^n$，如图 9-26 所示，添加辅助面 $S_1:z=0,x^2+y^2=R^2$，取下侧，由高斯公式，得

$$I=\oiint_{S+S_1}-\oiint_{S_1}.$$

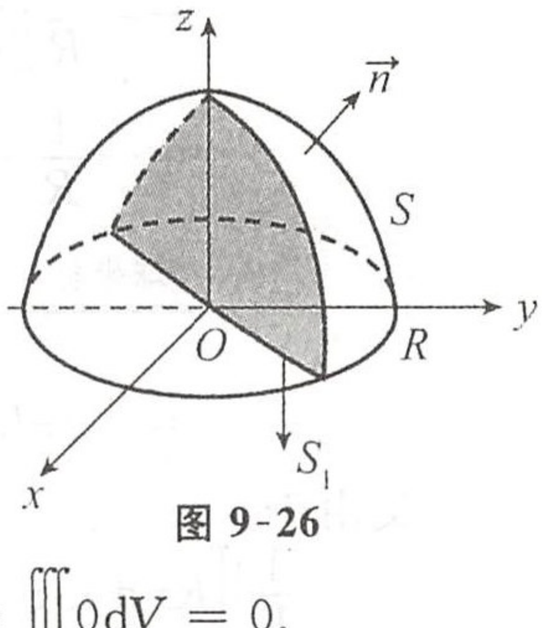


图 9-26

而　$\oiint_{S+S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+T\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iiint_V 0\mathrm{d}V=0.$

又

$$\iint_{S_1}(z^n-y^n)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^n-z^n)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^n-x^n)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0+0-\iint_{D_{xy}}(y^n-x^n)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R(r^n\sin^n\theta-r^n\cos^n\theta)r\mathrm{d}r$$

$$=-\int_0^{2\pi}(\sin^n\theta-\cos^n\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^R r^{n+1}\mathrm{d}r=\frac{-R^{n+2}}{n+2}\int_0^{2\pi}(\sin^n\theta-\cos^n\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{-R^{n+2}}{n+2}\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^n\theta-\cos^n\theta)\mathrm{d}\theta=0\left(\text{因}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta\right).$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

【注】 ① 此题也可利用对称性计算：

令 $F=x^2+y^2+z^2-R^2$，则 $(F'_x,F'_y,F'_z)=(2x,2y,2z)$.

$$\cos\alpha=\frac{2x}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{R},$$

同理，$\cos\beta=\frac{y}{R}$，$\cos\gamma=\frac{z}{R}$，故 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{R}(x,y,z)$，故

$$I=\iint\limits_S\left[(z^n-y^n)\frac{x}{R}+(x^n-z^n)\frac{y}{R}+(y^n-x^n)\frac{z}{R}\right]\mathrm{d}S.$$

由 S 关于 xOy 面，yOz 面对称，且 $(z^n-y^n)\frac{x}{R}$，$(x^n-z^n)\frac{y}{R}$ 分别关于 x，y 是奇函数，

故 $$\iint\limits_S\left[(z^n-y^n)\frac{x}{R}+(x^n-z^n)\frac{y}{R}\right]\mathrm{d}S=0.$$

又 S 关于平面 $x=y$ 对称，由轮换对称性，知 $\iint\limits_S y^n z\,\mathrm{d}S=\iint\limits_S x^n z\,\mathrm{d}S$，即

$$\iint\limits_S(y^n-x^n)\frac{z}{R}\mathrm{d}S=0.$$

综上所述，$I=0$.

② $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 与三重积分 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 一样，利用轮换对称性时，可以三个变量轮换，也可以两个变量轮换.

(17) 解 由于被积表达式在点(0,0,0)处没有意义，先将曲面 $S:z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 代入化简，得

$$I=\frac{1}{R}\iint\limits_S Rx\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(R+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

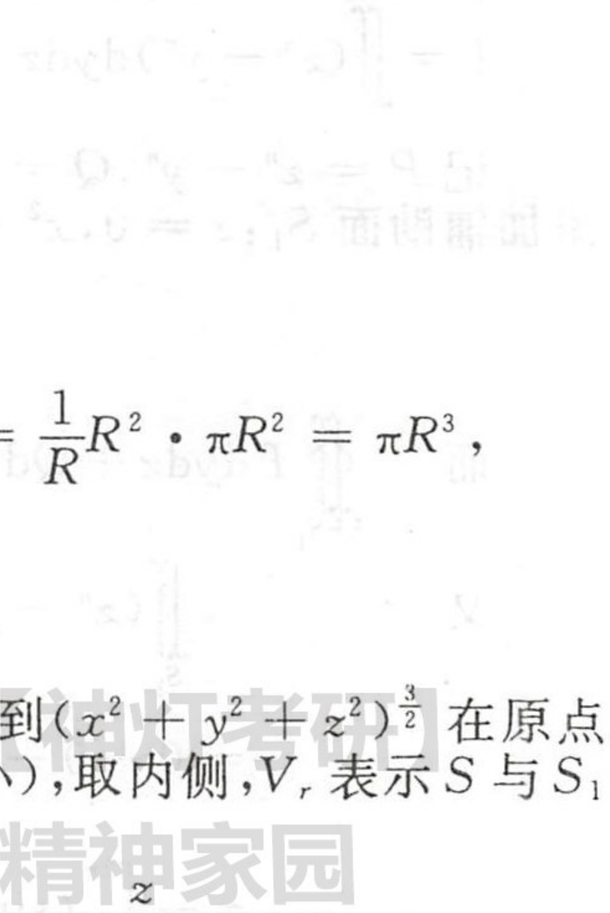


图 9-27

为了利用高斯公式，添加辅助面 $S_1:\begin{cases}z=0,\\ x^2+y^2\leqslant R^2,\end{cases}$ 取上侧，如图 9-27 所示，故

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R}\oiint\limits_{S+S_1}Rx\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(R+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&-\frac{1}{R}\iiint\limits_V(R+2R+2z)\mathrm{d}V=-\frac{1}{R}\iiint\limits_V(3R+2z)\mathrm{d}V\\ =&-\frac{1}{R}\cdot3R\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{R}\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V\\ \xlongequal{\text{球坐标}}&-2\pi R^3-\frac{2}{R}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\\ =&-2\pi R^3-\frac{1}{2}\pi R^3=-\frac{5}{2}\pi R^3.\end{aligned}$$

又由于

$$\frac{1}{R}\iint\limits_{S_1}Rx\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(R+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\frac{1}{R}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{R}R^2\cdot\pi R^2=\pi R^3,$$

故 $I=\oiint\limits_{S+S_1}-\iint\limits_{S_1}=-\frac{5}{2}\pi R^3-\pi R^3=-\frac{7}{2}\pi R^3.$

(18) 解 被积函数较烦琐，又不能代入 S 的方程化简，考虑到 $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$ 在原点(0,0,0)处为零，挖去原点，作球面 $S_1:x^2+y^2+z^2=r^2$(r 充分小)，取内侧，V_r 表示 S 与 S_1 所围空间区域，应用高斯公式，记

$$P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\ Q=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\ R=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

计算可得在 V_r 中，有 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$，故

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\oiint_{S+S_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iiint_{V_r}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=0.$$

于是
$$I=\oiint_{S}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\oiint_{S_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\oiint_{S_1^-}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\overset{(*)}{=\!=}\oiint_{S_1^-}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}S=\frac{1}{r^2}\cdot 4\pi r^2=4\pi(S_1^-\text{ 为 }S_1\text{ 的外侧}).$$

【注】 ①(*)利用两类积分之间的关系：

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

因为 $S_1:x^2+y^2+z^2=r^2$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2x,2y,2z)$，所以

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},$$
$$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{r},$$
$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{r},$$

故
$$\oiint_{S_1^-}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\oiint\left(\frac{1}{r^2}\cos^2\alpha+\frac{1}{r^2}\cos^2\beta+\frac{1}{r^2}\cos^2\gamma\right)\mathrm{d}S=\oiint_{S_1^-}\frac{1}{r^2}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\mathrm{d}S$$
$$=\oiint_{S_1^-}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}S.$$

② 计算 $\oiint_{S_1^-}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 时，也可代入 S_1^- 的方程 $x^2+y^2+z^2=r^2$，化简得

$$\oiint_{S_1^-}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{r^3}\oiint_{S_1^-}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\overset{\text{高斯公式}}{=\!=}\frac{1}{r^3}\iiint_V(1+1+1)\mathrm{d}V=\frac{1}{r^3}\cdot 3\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi.$$

(19) 解　依题设，流量为

$$\Phi=\oiint_S\left(\frac{1}{3}x^3+x^2y+x^2z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{1}{3}y^3+y^2z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{3}z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用高斯公式，得

$$\Phi=\iiint_V(x^2+2xy+2xz+y^2+2yz+z^2)\mathrm{d}V$$
$$=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V+2\iiint_V(xy+xz+yz)\mathrm{d}V.$$

如图 9-28 所示，由 V 关于 xOz 面，yOz 面对称，xy 与 yz 关于 y 是奇函数，xz 关于 x 是奇函数，知

$$2\iiint_V(xy+xz+yz)\mathrm{d}V=0,$$

故
$$\Phi=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

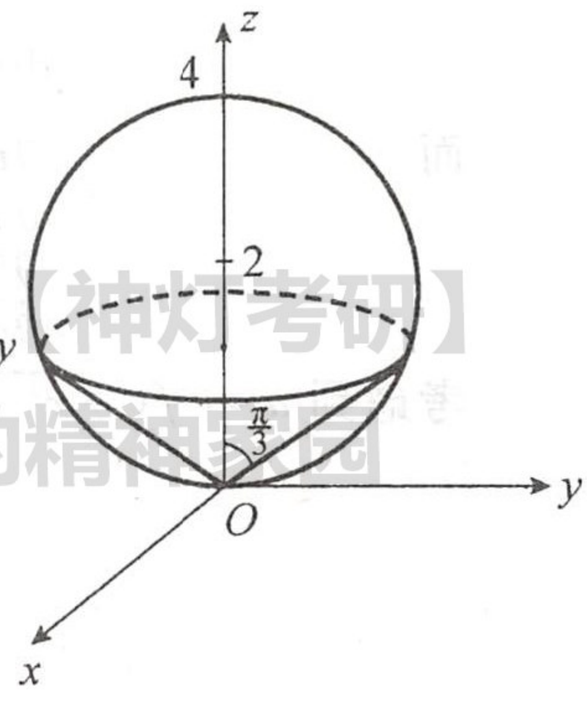


图 9-28

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118103451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\xlongequal{\text{球坐标}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^{4\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{336\pi}{5}.$$

【注】 $x^2+y^2+z^2=4z$ 化为球面坐标为 $r=4\cos\varphi$，$z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}$，即 $z^2=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)(z\geqslant 0)$，化为球面坐标为 $r^2\cos^2\varphi=\dfrac{1}{3}r^2\sin^2\varphi$，即 $\tan\varphi=\sqrt{3}$，故 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

(20) 解 积分区域 D 如图 9-29 所示.

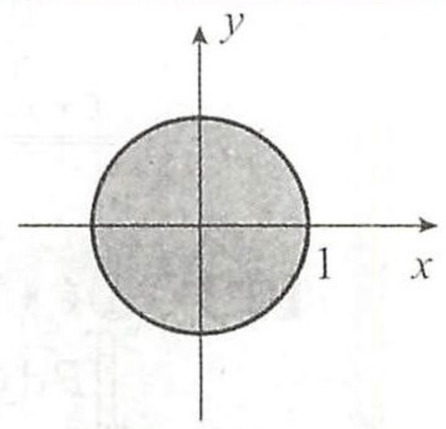


图 9-29

$$I=\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(f'_x\cdot r\cos\theta+f'_y\cdot r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_0^1 rdr\int_0^{2\pi}(f'_x\cdot r\cos\theta+f'_y\cdot r\sin\theta)d\theta.$$

设 $L_r:x^2+y^2=r^2(0\leqslant r\leqslant 1)$，取逆时针，$D_r:x^2+y^2\leqslant r^2$，则

$$\int_0^{2\pi}(f'_x\cdot r\cos\theta+f'_y\cdot r\sin\theta)d\theta$$

$$=\int_{L_r}-f'_ydx+f'_xdy=\iint_{D_r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy$$

$$=\iint_{D_r}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\pi(1-e^{-r^2}),$$

故
$$I=\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=\int_0^1\pi r(1-e^{-r^2})dr=\frac{\pi}{2e}.$$

(21) 证 应用极坐标计算，积分区域 D 如图 9-30 所示.

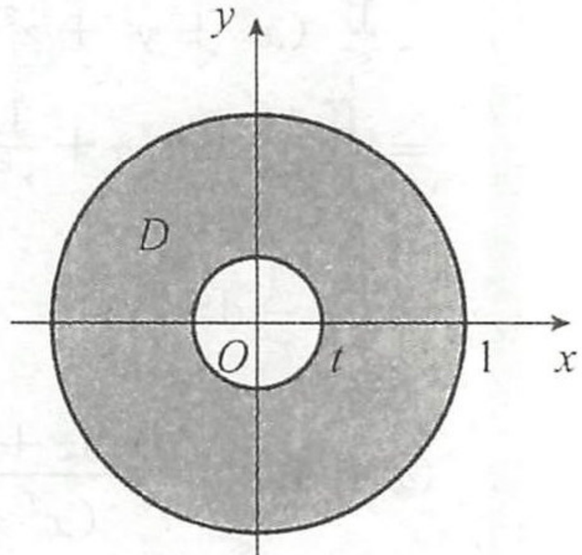


图 9-30

$$\frac{xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{f'_x(r\cos\theta,r\sin\theta)r\cos\theta+f'_y(r\cos\theta,r\sin\theta)r\sin\theta}{r^2},$$

故
$$\iint_D\frac{xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)}{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\iint_D[f'_x(r\cos\theta,r\sin\theta)\cos\theta+f'_y(r\cos\theta,r\sin\theta)\sin\theta]drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_t^1\frac{\partial f}{\partial r}dr=\int_0^{2\pi}[f(r\cos\theta,r\sin\theta)]\Big|_t^1 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}[0-f(t\cos\theta,t\sin\theta)]d\theta$$

$$=-2\pi f(t\cos\xi,t\sin\xi)(\text{积分中值定理},0\leqslant\xi\leqslant 2\pi),$$

故
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint_D\frac{xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{t\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}[-2\pi f(t\cos\xi,t\sin\xi)]=f(0,0).$$

(22) 解
$$\mathbf{grad}\ u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\xlongequal{\text{记}}(P,Q,R),$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ u)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

而
$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{r}(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-x^2}{r^3}.$$

考虑到 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 关于 x,y,z 具有轮换性，故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-y^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)\frac{z^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-z^2}{r^3},$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

将其代入 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

得 $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=r$，为可降阶微分方程.

变形为$[r^2 f'(r)]'=r^3$，积分得 $r^2 f'(r)=\frac{1}{4}r^4+C_1$，即 $f'(r)=\frac{1}{4}r^2+\frac{C_1}{r^2}$，

再积分得 $f(r)=\frac{1}{12}r^3-\frac{C_1}{r}+C_2$，即

$$u=\frac{1}{12}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-C_1(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}+C_2(C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】 获取更多考研资源!

线性代数

李林考研数学系列

第十章 行列式

基础题

一、选择题

(1)A.

解 设元素 a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,则

$$\begin{aligned}&M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}\\&=-(-1)^{4+1}M_{41}+(-1)^{4+2}M_{42}+[-(-1)^{4+3}]M_{43}+(-1)^{4+4}M_{44}\\&=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}\\&=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-28,\end{aligned}$$

故原式 $=-28$.

【注】 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$ 中,a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 仅与 a_{ij} 的位置有关,而与 a_{ij} 的取值无关,即改变 D 中 a_{ij} 的值,A_{ij} 不改变.

(2)C.

解 利用行列式的性质,有

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)|&=|(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)|+|(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2)|\\&=-|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)|-|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)|\\&=-a+|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=-a+b=b-a,\end{aligned}$$

故 C 正确.

(3)D.

解 矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1,4\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3)$,故

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=|(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1,4\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3)|\\&=16[|(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|+|(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|]\\&=16\left[|(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|+\frac{1}{3}|(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|\right]\\&=16\times\left(1+\frac{1}{3}\times3\right)=16\times2=32,\end{aligned}$$

所以 D 正确.

(4)A.

解 由

$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{3-1}=|\boldsymbol{A}|^2,\ |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|k\boldsymbol{A}^*|=k^3|\boldsymbol{A}^*|,\ |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|,$$

可知 $|\boldsymbol{A}|=k^3|\boldsymbol{A}|^2$,故

$$|\boldsymbol{A}|(k^3|\boldsymbol{A}|-1)=0,$$

于是有 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{k^3}$. 又 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^*$,即 $a_{ji}=kA_{ji}$,故

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\frac{1}{k}(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)=\frac{3c^2}{k}\neq0,$$

于是 $\frac{3c^2}{k}=\frac{1}{k^3}$,$c=\sqrt{\frac{1}{3k^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3k}$,故 A 正确.

【注】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

二、填空题

(1)$k^2(k^2-4)$.

解 将第 2,3,4 行加到第 1 行,提取 k,再用行列式性质,有

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\begin{vmatrix} k & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ -1 & 1 & k & 0 \\ 1 & -1 & 0 & k \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ -1 & 1 & k & 0 \\ 1 & -1 & 0 & k \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & k & k \end{vmatrix}$$

$$= k^2\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 2 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = k^2(k^2-4).$$

(2) $a+1$ 或 $a-2$.

解　原式 $=\begin{vmatrix} \lambda-a-1 & \lambda-a-1 & 0 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-a-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-a+1 & 1 \\ -1 & 2 & \lambda-a \end{vmatrix}$

$= (\lambda-a-1)[(\lambda-a)^2+(\lambda-a)-2] = 0,$

得 $\lambda = a+1$ 或 $\lambda = a-2$.

(3) 13.

解　箭形（爪形）行列式，利用主对角线元素将第 4 行前 3 个元素化为零.

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$= 1\times 2\times 3\times\left(4-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = 13.$$

(4) -4.

解　数字型行列式，每行（列）有 2 个元素为 0，可以直接按一行（一列）展开计算，考虑到元素有规律，可以利用行列式的性质，交换第 1，4 行，再交换第 2，4 列，得

$$D_4 = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

(5) $a^4+a^3+2a^2+3a+4$.

解　按第 1 列展开.

$$D_4 = a\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ 3 & 2 & a+1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix}$$

$$= a\left[a\begin{vmatrix} a & -1 \\ 2 & a+1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ a & -1 \end{vmatrix}\right] + 4$$

$$= a^4+a^3+2a^2+3a+4.$$

(6) 6.

解　若按第 1 行展开，只有 $-2x$ 乘以其代数余子式会出现 x^3 项，故只要求出这一项即可.

$$(-2x)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 2x\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3x-3 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 2x(3x-3)(x+1)$$

$$= 6x^3-6x,$$

故 x^3 的系数为 6.

(7) 0.

解　将 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 变成矩阵乘积的形式，

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$$

$$= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|,$$

故 $(1-|\boldsymbol{A}|)|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| = 0$，由 $|\boldsymbol{A}|<0$，知 $1-|\boldsymbol{A}|>0$，所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| = 0$.

(8) 0.

解法 1　利用矩阵的秩.

由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，可知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$，故

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) \leqslant n.$$

又 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{O}$，知 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) \geqslant 1$，从而 $r(\boldsymbol{A}) < n$，于是 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

解法 2　利用齐次线性方程组.

由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$，知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的列向量组是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解. 又 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{O}$，知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解，故 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

【注】 结论:设 A,B 均为 n 阶方阵,且 $AB=O$,则
①$r(A)+r(B)\leqslant n$;②B 的列向量组是 $Ax=0$ 的解.

(9) 2.

解
$$\begin{aligned}|A+B^{-1}|&=|EA+B^{-1}|=|B^{-1}BA+B^{-1}|\\&=|B^{-1}||BA+E|=|B^{-1}||BA+A^{-1}A|\\&=|B^{-1}||B+A^{-1}||A|=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2.\end{aligned}$$

【注】 求行列式 $|A\pm B|$,利用 E 作恒等变形化为矩阵积的行列式.

(10) $(-4)^{n-1}$.

解 因为 $A^*=|A|A^{-1}=2A^{-1}$,$B^*=|B|B^{-1}=-2B^{-1}$,所以
$$\begin{aligned}|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|&=|A^{-1}\cdot(-2B^{-1})-2A^{-1}B^{-1}|\\&=|-4A^{-1}B^{-1}|=(-4)^n|A|^{-1}\cdot|B|^{-1}\\&=(-4)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=(-4)^{n-1}.\end{aligned}$$

(11) 1.

解 由 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}3&-2&-1\\-1&3&-2\\0&0&2\end{pmatrix}$,知
$$|B|=|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|\begin{vmatrix}3&-2&-1\\-1&3&-2\\0&0&2\end{vmatrix}=|A|\cdot 14=14,$$
故 $|A|=1$.

(12) $\frac{1}{k}$.

解 依题意,由 $A\cdot A^*=|A|E$,可知
$$|A|=\begin{vmatrix}k&k&\cdots&k\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{\text{按第一行展开}}k(A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n})=1,$$
故 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\frac{1}{k}$.

三、解答题

(1) 解法 1 D_n 的各列元素之和相等,用行加法.
$$D_n=\begin{vmatrix}b+(n-1)a&b+(n-1)a&b+(n-1)a&\cdots&b+(n-1)a\\a&b&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&b\end{vmatrix}$$
$$=[b+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a&b&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&b\end{vmatrix}$$
$$=[b+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&b-a&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&b-a\end{vmatrix}$$
$$=[b+(n-1)a](b-a)^{n-1}.$$

解法 2 D_n 除主对角线上元素以外,其余列元素均相同,可用加边法.
$$D_n=D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\0&b&a&\cdots&a\\0&a&b&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a&a&\cdots&b\end{vmatrix}$$

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

$$=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & b-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b-a \end{vmatrix},$$

为箭形行列式，故 $D_n=(b-a)^{n-1}\cdot[b+(n-1)a]$.

【注】 当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均不为零时，箭形行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} \lambda_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\left(\lambda_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ia_i}{\lambda_i}\right)\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

本结论见《李林考研数学系列线性代数辅导讲义》第一章.

(2) 证法 1 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$D_1=x+a_1$；当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & a_1+x \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2,$$

结论成立.

假设当 $n=k-1$ 时，结论成立，有

$$D_{k-1}=x^{k-1}+a_1x^{(k-1)-1}+a_2x^{(k-1)-2}+\cdots+a_{k-2}x+a_{k-1},$$

则当 $n=k$ 时，将 D_k 按第 1 列展开，得

$$D_k=xD_{k-1}+a_k=x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-2}x^2+a_{k-1}x+a_k,$$

故对任意正整数 n，有 $D_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，结论成立.

证法 2 用递推法，将 D_n 按第 1 列展开，得

$$D_n=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\cdot(-1)^{n-1}=xD_{n-1}+a_n, \quad ①$$

故

$$D_{n-1}=xD_{n-2}+a_{n-1},\cdots,D_3=xD_2+a_3,\ D_2=xD_1+a_2=x^2+a_1x+a_2,$$

将其依次代入 ① 式，得 $D_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

【注】 此题也可对第 n 行展开进行计算.

(3) 解 D_n 为三对角行列式，用递推法，将 D_n 按第 1 行展开.

$$D_n=2D_{n-1}+(-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2D_{n-1}-D_{n-2},$$

即

$$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=D_{n-2}-D_{n-3}=\cdots=D_2-D_1$$
$$=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-2=1,$$

故

$$D_n=D_{n-1}+1=(D_{n-2}+1)+1=D_{n-2}+2$$
$$=\cdots=D_1+(n-1)=2+(n-1)=n+1.$$

(4) 解 记 $D_n=D_1+D_2$. D_1 按第 1 列展开，得

$$D_1=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b_n\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n.$$

D_2 是 D_1 的转置行列式，故 $D_2=D_1=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n$，故

$$D_n=2a_1a_2\cdots a_n+2(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

【微信公众号：神灯考研】获取更多考研资源！

综合题

一、选择题

(1) D.

解　因为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的主对角线元素为 A_{11},A_{22},A_{33}，所以 $A_{11}+A_{22}+A_{33}$ 的值等于 $\boldsymbol{A}^*$ 的3个特征值之和，故只需求 $\boldsymbol{A}^*$ 的3个特征值.

由 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为3,2,1，可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{3},\frac{1}{2},1$，则

$$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6},$$

故 $\boldsymbol{A}^*$ 的3个特征值分别为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=\frac{1}{2},\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=\frac{1}{3},\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=\frac{1}{6}$，所以

$$A_{11}+A_{22}+A_{33}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1.$$

【注】　结论：设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

① $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$；

② $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{mm}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$；

③ $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}(\lambda_i\neq0,i=1,2,\cdots,n)$；

④ $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1},\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_n}(\lambda_i\neq0,i=1,2,\cdots,n)$.

（见《李林考研数学系列线性代数辅导讲义》第五章）

(2) B.

解　求 $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4}A_{ij}$，只要求 $\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})_{4\times4}$，由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，可知先求 $|\boldsymbol{A}|$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

由分块矩阵求逆，得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\left(\begin{array}{ccc:c}0&0&0&1\\\hdashline1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

又 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{4+1}=-1$（按第1行展开），故

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}&A_{41}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}&A_{42}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}&A_{43}\\A_{14}&A_{24}&A_{34}&A_{44}\end{pmatrix},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}A_{ij}=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4.$$

(3) C.

解法1　由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$，则

$$|(2\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|=\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}-2\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\right|$$

$$=\left|-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left(-\frac{1}{2}\right)^3|\boldsymbol{A}^{-1}|$$

$$=-\frac{1}{8}|\boldsymbol{A}|^{-1}=-\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=-\frac{1}{4}.$$

解法2　由 $\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}^*=2\boldsymbol{A}^*$，则

$$|(2\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|=\left|\frac{1}{2}\cdot2\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}^*\right|$$

$$=|\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}^*|=|-\boldsymbol{A}^*|=(-1)^3|\boldsymbol{A}^*|$$

$$=-|\boldsymbol{A}|^{3-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

二、填空题

(1) $(-1)^n \cdot 6^{2n-1}$.

解 $$|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & 3\boldsymbol{A}^* \\ \left(\frac{\boldsymbol{B}}{2}\right)^{-1} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{n\times n} \left|\left(\frac{\boldsymbol{B}}{2}\right)^{-1}\right| |\,3\boldsymbol{A}^*\,|,$$

而

$$\left|\left(\frac{\boldsymbol{B}}{2}\right)^{-1}\right| = |\,2\boldsymbol{B}^{-1}\,| = 2^n\,|\,\boldsymbol{B}\,|^{-1} = 2^n,$$
$$|\,3\boldsymbol{A}^*\,| = 3^n\,|\,\boldsymbol{A}^*\,| = 3^n \cdot |\,\boldsymbol{A}\,|^{n-1} = 3^n \cdot 6^{n-1},$$

故

$$|\boldsymbol{C}| = (-1)^{n^2} 2^n \cdot 3^n \cdot 6^{n-1} = (-1)^{n^2} \cdot 6^{2n-1} = (-1)^n \cdot 6^{2n-1}.$$

(2) 0.

解 由已知，$\boldsymbol{AB}$ 是 m 阶方阵. 由

$$r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{B}) \leqslant \min\{m,n\},$$

故当 $m > n$ 时，有 $r(\boldsymbol{AB}) \leqslant n < m$，故 $|\,\boldsymbol{AB}\,| = 0$.

(3) $\frac{1}{2}$.

解 由已知 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$，得 $(\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$，即

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E},$$

而 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，可知 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 可逆，故 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$，两边取行列式，得

$$|\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}\,|\,|\,\boldsymbol{B}\,| = 1.$$

而

$$|\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}\,| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

故 $|\,\boldsymbol{B}\,| = \frac{1}{2}$.

(4) 126.

解 先求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，再求 $2\boldsymbol{A}^* - 3\boldsymbol{E}$ 的特征值.

由 $|\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}\,| = |\,(-1)(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\,| = (-1)^3\,|\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\,| = 0$，得 $|\,1 \cdot \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\,| = 0$，可知 $\lambda_1 = 1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

同理，由 $|\,\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}\,| = |\,2\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E}\,| = 0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_2 = -2, \lambda_3 = -\frac{3}{2}$，故

$$|\,\boldsymbol{A}\,| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 3 \neq 0(\boldsymbol{A} \text{ 可逆}),$$

所以 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值分别为

$$\frac{|\,\boldsymbol{A}\,|}{\lambda_1} = \frac{3}{1} = 3, \quad \frac{|\,\boldsymbol{A}\,|}{\lambda_2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{|\,\boldsymbol{A}\,|}{\lambda_3} = -2,$$

于是 $2\boldsymbol{A}^* - 3\boldsymbol{E}$ 的特征值分别为

$$2\times 3 - 3 = 3,\ 2\times\left(-\frac{3}{2}\right) - 3 = -6,\ 2\times(-2) - 3 = -7,$$

所以 $|\,2\boldsymbol{A}^* - 3\boldsymbol{E}\,| = 3\times(-6)\times(-7) = 126.$

【注】 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，则 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $f(\lambda)$，其中 $f(x)$ 为多项式.

(5) 2.

解法 1 利用行列式的性质，由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1)$，可知

$$\begin{aligned} |\,\boldsymbol{A}\,|\,|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)| &= |(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1)| \\ &= 2\,|(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1)| \\ &= 2\,|(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, -\boldsymbol{\alpha}_1, -\boldsymbol{\alpha}_2)| \\ &= 2\,|(\boldsymbol{\alpha}_3, -\boldsymbol{\alpha}_1, -\boldsymbol{\alpha}_2)| = 2\,|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|. \end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故 $|\,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,| \neq 0$，所以 $|\,\boldsymbol{A}\,| = 2$.

解法 2 利用矩阵的乘法及相似矩阵的性质.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,由已知,$\boldsymbol{P}$ 可逆,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$,故 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$,即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,所以

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2.$$

三、解答题

(1)解 D_n 除主对角线元素外,第 i 行($i=1,2,\cdots$)元素分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n$ 的倍数,即:$(-a_i)a_1,(-a_i)a_2,\cdots,(-a_i)a_{i-1},(-a_i)a_{i+1},\cdots,(-a_i)a_n$.

可考虑用加边法,

$$D_n=D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&b-a_1^2&-a_1a_2&\cdots&-a_1a_n\\0&-a_2a_1&b-a_2^2&\cdots&-a_2a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&-a_na_1&-a_na_2&\cdots&b-a_n^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&b&0&\cdots&0\\a_2&0&b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&0&0&\cdots&b\end{vmatrix},$$

为箭形行列式,故 $D_n=b^{n-1}\left(b-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)$.

(2)解 D_n 中除主对角线外,各列元素分别相同,用加边法.

$$D_n=D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&a+b_1&a&\cdots&a\\1&a&a+b_2&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a&a&\cdots&a+b_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-a&-a&\cdots&-a\\1&b_1&0&\cdots&0\\1&0&b_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&b_n\end{vmatrix},$$

该行列式为箭形行列式,故可求得 $D_n=\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a}{b_i}\right)\prod\limits_{j=1}^{n}b_j$.

【注】 ① 将行列式添加一行或一列,使其升阶后的行列式的值不变,这种方法称为“加边法”.

② 行列式除主对角线外,第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 行(列)元素分别与第 $j(j\neq i)$ 行(列)元素有倍数关系或相同,此类行列式的计算可采用“加边法”.

(3)解 按第 n 行展开,用递推法.

$$\begin{aligned}D_n&=(-1)^{n+1}a_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}+(-1)^{n+n}\cdot x\cdot D_{n-1}=a_{n-1}+xD_{n-1}\\&=a_{n-1}+a_{n-2}x+x^2D_{n-2}=\cdots=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}.\end{aligned}$$

(4)解 三对角行列式,用递推法.

按第 1 列展开,得

$$D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2},\tag{①}$$

将 ① 式化为

$$D_n-kD_{n-1}=\mu(D_{n-1}-kD_{n-2}),\tag{②}$$

其中

$$\begin{cases}k+\mu=a,\\k\mu=bc.\end{cases}\tag{③}$$

令

$$D_{n-i}-kD_{n-i-1}=\Delta_{n-i}(i=0,1,2,\cdots,n-2),\tag{④}$$

则递推式 ② 为 $\Delta_n=\mu\Delta_{n-1}$,反复利用这个递推式,得

$$\Delta_n=\mu\Delta_{n-1}=\mu^2\Delta_{n-2}=\cdots=\mu^{n-2}\Delta_2,\tag{⑤}$$

将 ④ 式代入 ⑤ 式右端,由 ③ 式可得

$$\begin{aligned}\Delta_n&=\mu^{n-2}(D_2-kD_1)=\mu^{n-2}(a^2-bc-ka)\\&=\mu^{n-2}[a^2-k\mu-(a-\mu)a]=\mu^{n-2}\cdot\mu(a-k)=\mu^n.\end{aligned}$$

将 ④ 式取 $i=0$,得 $D_n=\mu^n+kD_{n-1}$,反复利用这个递推式,得

$$\begin{aligned}D_n&=\mu^n+kD_{n-1}=\mu^n+k(\mu^{n-1}+kD_{n-2})\\&=\mu^n+k\mu^{n-1}+k^2(\mu^{n-2}+kD_{n-3})\\&=\mu^n+k\mu^{n-1}+k^2\mu^{n-2}+k^3D_{n-3}=\cdots\\&=\mu^n+k\mu^{n-1}+k^2\mu^{n-2}+\cdots+k^{n-2}\mu^2+k^{n-1}D_1,\end{aligned}$$

将 $D_1=a=k+\mu$ 代入上式,得

$$D_n=\mu^n+k\mu^{n-1}+k^2\mu^{n-2}+\cdots+k^{n-2}\mu^2+k^{n-1}\mu+k^n,$$

故

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$D_n=\begin{cases}\dfrac{\mu^{n+1}-k^{n+1}}{\mu-k}, & k\neq\mu,\\ (n+1)\mu^n, & k=\mu.\end{cases}$$

由 ③ 式，知 μ,k 是一元二次方程 $x^2-ax+bc=0$ 的两个根，故

$$\mu=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4bc}}{2},\ k=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4bc}}{2}.$$

【注】 此题推出了一般三对角行列式的结论.

拓展题

解答题

(1) 解 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，知

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2=\big||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\big|=|\boldsymbol{A}|^3,$$

即 $|\boldsymbol{A}|^2(1-|\boldsymbol{A}|)=0$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=1$.

又 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，不妨设 $a_{11}\neq0$，由已知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$，得 $a_{ji}=A_{ji}$，故

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq0,$$

于是 $|\boldsymbol{A}|=1$. 由

$$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|(-1)(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})|=(-1)^3|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,$$

得 $|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，故 $\lambda_1=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

同理，由 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，得 $\lambda_2=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

由 $1=|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=(-1)\cdot1\cdot\lambda_3$，得 $\lambda_3=-1$.

又 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的特征值分别为 $-1,-3,-1$，故

$$|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=(-1)\times(-3)\times(-1)=-3.$$

【注】 ① 若 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $f(\lambda)$，其中 $f(x)$ 为多项式.

② 计算抽象行列式常用到以下公式：

(ⅰ) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$；

(ⅱ) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同型方阵，则 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；

(ⅲ) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$；

(ⅳ) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆方阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$；

(ⅴ) 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$；

(ⅵ) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

(2) 解 (Ⅰ) 因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，不妨设 $a_{11}\neq0$. 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^*$，知 $a_{ji}=kA_{ji}$.

将 $|\boldsymbol{A}|$ 按第一行展开，得

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\frac{1}{k}(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)\neq0,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，且

$$\Big|\frac{1}{k}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Big|=\frac{1}{k^3}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=\frac{1}{k^3}|\boldsymbol{A}|^2,\ \big||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\big|=|\boldsymbol{A}|^3,$$

可知 $\dfrac{1}{k^3}|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|^3$，整理得 $|\boldsymbol{A}|^2\left(\dfrac{1}{k^3}-|\boldsymbol{A}|\right)=0$，又由(Ⅰ)知 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，故

$$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{k^3},\ |\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}=k^3.$$

又由 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$，知

$$|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=\Big|\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\Big|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|^3}|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|^2}=k^6,$$

故 $|\boldsymbol{A}^{-1}|+|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=k^3+k^6$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

第十一章 矩 阵

基础题

一、选择题

(1) B.

解 根据矩阵乘法及初等矩阵,得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}+a_{23}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}+a_{33}&a_{33}\\a_{11}&a_{12}+a_{13}&a_{13}\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

(2) D.

解 利用伴随矩阵的公式 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,由 $\boldsymbol{A}$ 可逆,知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,故

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}.$$

又 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{E}$,知 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$,故 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$,结论 ① 正确.

由 $(k\boldsymbol{A})(k\boldsymbol{A})^*=|k\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,知 $(k\boldsymbol{A})^*=k^n|\boldsymbol{A}|\cdot(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^n|\boldsymbol{A}|\cdot\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$

$$=k^{n-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*,$$

故结论 ② 正确.

由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{E}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,知 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$,由

$$(\boldsymbol{AA}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},$$

知 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$,故 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$,结论 ③ 正确.

由 $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{E}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{E}$,知

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\cdot|\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A},$$

故结论 ④ 正确.

【注】 ① 对公式 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,可以将 $\boldsymbol{A}$ 替换成 $\boldsymbol{A}^{-1}$,$k\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}^*$ 衍生出更多的公式.

② 三种运算“$*$”“-1”“T”是可交换的.

③ 常用结论:$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$,$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

(3) C.

解

$$[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^*]^{-1}=[|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}]^{-1}$$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{cc:c}0&0&\frac{1}{4}\\ \hdashline \frac{1}{2}&0&0\\ -\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{array}\right),$$

由分块矩阵的行列式,知 $\left|[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^*]^{-1}\right|=(-1)^{1\times 2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$,故 C 正确.

(4) B.

解 同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

由于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,有 3 阶子式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\2&k&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=1\neq 0$,故 $r(\boldsymbol{A})=3$.

对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作初等变换,得 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&k\\3&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&1&k-2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&k-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

故由 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3$,知 $k\neq 1$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

二、填空题

(1) $3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$.

解 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，知 $r(\boldsymbol{A})=1, k=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=3$，故 $\boldsymbol{A}^n=k^{n-1}\boldsymbol{A}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}2n+1 & 4n & 0\\ -n & -2n+1 & 0\\ 3n & 6n & 1\end{pmatrix}$.

解 由于 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，

且 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,2,0)\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}=0$，故 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.

又因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}(1,2,0)=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ 3 & 6 & 0\end{pmatrix}$，

所以 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^n=\boldsymbol{E}^n+\mathrm{C}_n^1\boldsymbol{E}^{n-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+n\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2n+1 & 4n & 0\\ -n & -2n+1 & 0\\ 3n & 6n & 1\end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\ 0 & 2^n & 0\\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}$.

解 $r(\boldsymbol{A})=2$，先求 $\boldsymbol{A}^2$，找出 $\boldsymbol{A}^n$ 的规律.

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A},$$

即 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$，从而 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{A}^2=2^2\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A}$，故 $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\ 0 & 2^n & 0\\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

解 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$，有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{P}$，一般地，有 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{P}$，所以 $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{P}$.

由 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{B}^4=(\boldsymbol{B}^2)^2=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$，于是 $\boldsymbol{A}^4-2\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

(5) $(-2)^{n-1}$.

解 依题设，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{i,j}\boldsymbol{A}$，则 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}_{i,j}||\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|=-2$，故

$$|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{B}^{-1}||\boldsymbol{B}^*||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{B}|^{-1}|\boldsymbol{B}|^{n-1}\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|^{n-1}=(-2)^{n-1}.$$

(6) 2.

解 利用初等行变换化 $\boldsymbol{A}$ 为阶梯形，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】 获取更多考研资源!

(7)$E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}$.

解　用可逆矩阵的定义,并注意到 $A^n=O$,

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1})=E,$$

故
$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}.$$

【注】　由 $A^n=O$,则化零多项式为 x^n.
用多项式除法,即用 x^n 除以 $x-1$,也可求 $(E-A)^{-1}$(计算量大).

(8)E.

解　由 $A^n=E$,知 $|A|^n=1$.
又 $A^*A=AA^*=|A|E$,得 $(AA^*)^n=(AA^*)(AA^*)\cdots(AA^*)=|A|^nE$.
因 A 与 A^* 可交换,故 $(AA^*)^n=A^n(A^*)^n=|A|^nE=E$,于是 $(A^*)^n=E$.

【注】　伴随矩阵的常用计算公式:$AA^*=A^*A=|A|E$.

(9)$\frac{1}{2}(A-3E)$.

解　利用可逆矩阵的定义.

由 $A^2-3A-2E=O$,得 $A(A-3E)=2E$,即 $A\cdot\frac{1}{2}(A-3E)=E$,故

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A-3E).$$

(10)$-\frac{1}{2}(A-2E)$.

解　由 $A^2=A$,知 $A^2-A-2E+2E=O$,即 $(A+E)(A-2E)=-2E$,故

$$(A+E)^{-1}=-\frac{1}{2}(A-2E).$$

【注】　下列解法是错误的:
由 $A^2=A$,得 $A(A-E)=O$,于是当 $A=O$ 时,$(A+E)^{-1}=E^{-1}=E$;
当 $A=E$ 时,$(A+E)^{-1}=(2E)^{-1}=\frac{1}{2}E$.
错误原因在于忽略了矩阵运算与数的运算的区别:由 $AB=O$ 不能得出 $A=O$ 或 $B=O$.

(11)-1.

解　依题意,$B=E_{i,j}A$,$E_{i,j}$ 为单位矩阵 E 交换第 i,j 行后所得的初等矩阵,则

$$AB^{-1}=A(E_{i,j}A)^{-1}=AA^{-1}E_{i,j}^{-1}=E_{i,j}^{-1}=E_{i,j},$$

故 $|AB^{-1}|=|E_{i,j}|=-1$.

(12)$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

解　依题设,有 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换 1,2 行}}\begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换 1,3 行}}\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}$,

故
$$A=E_{1,3}\cdot E_{1,2}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

(13)-1 或 $\frac{1}{2}$.

解　$$AA^{-1}=(E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}})\left(E+\frac{1}{k}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\right)=E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}+\frac{1}{k}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}-\frac{1}{k}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}.$$

而 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=2k^2$,故　$AA^{-1}=E+\left(-1+\frac{1}{k}-\frac{2k^2}{k}\right)\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=E$,

于是 $-1+\frac{1}{k}-2k=0$,解得 $k=-1$ 或 $k=\frac{1}{2}$.

三、解答题

(1)解　由 $BA=O$,知 $r(A)+r(B)\leqslant 3$. 由 $r(B)>1$,得 $r(A)\leqslant 3-r(B)\leqslant 1$. 显然 $r(A)\geqslant 1$,故 $r(A)=1$,所以 A 的行向量成比例,即

$$\frac{a}{2}=\frac{1}{-1}=\frac{b}{3},\ \frac{2}{4}=\frac{-1}{c}=\frac{3}{6},$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

解得 $a=-2,b=-3,c=-2$,故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&1&-3\\4&-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(2,-1,3)\overset{\text{记}}{=\!=}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},$$

则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=9$,于是 $\boldsymbol{A}^n=9^{n-1}\boldsymbol{A}=9^{n-1}\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&1&-3\\4&-2&6\end{pmatrix}$.

【注】 结论:

①$r(\boldsymbol{A})=1\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$($\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量);

②$r(\boldsymbol{A})=1\Rightarrow\boldsymbol{A}^n=k^{n-1}\boldsymbol{A}$,其中 $k=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$,$\lambda_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(2) 解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E}+4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=4\boldsymbol{E}+4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}-3\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})=-3\boldsymbol{E}$,故 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{3}$.

【注】 结论:设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维列向量,$k_1\neq0$,$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\neq\dfrac{1}{k_1}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-k_1\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}-k_2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 满足 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}$.(见《李林考研数学系列线性代数辅导讲义》第二章)

(3) 解 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$,又 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{E}$,故$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}$.

而 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}=2$,对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 用初等行变换求 $\boldsymbol{A}$,

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,所以$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

(4) 解 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 拆成两个矩阵,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,

其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,故 $\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+3\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E}+5\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=5\boldsymbol{E}+5\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-4\boldsymbol{E}=5\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}.\end{aligned}$

又由 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})=-4\boldsymbol{E}$,知 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}}{-4}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

(5) 解 考虑到$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$ 无公式可用,在已知等式两边同时乘以$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$.

依题意,$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E}$,等式两边同时乘以$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$,得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E}),$$

故 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}$,即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

由 $|\boldsymbol{B}|\neq0$,知 $|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|\neq0$,故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 可逆,于是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{E}$,

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

【注】 ①$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$,$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

② 求$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$ 也可考虑用 $\boldsymbol{E}$ 作恒等变形,化“和”为“积”,再利用结论$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(6) 解 由于$[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^2]^{-1}=[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}]^2$,且

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}&=[\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]^{-1}\\&=[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]^{-1}\\&=[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]^{-1}=[2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}]^{-1}\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\2&4&0\\0&4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&2&3\end{pmatrix},\end{aligned}$$

故 $$[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^2]^{-1}=[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}]^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&2&3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&4&0\\2&10&9\end{pmatrix}.$$

(7) 解　求抽象矩阵的逆，常用可逆的定义与$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}&=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})\\&=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1},\end{aligned}$$

故由已知条件，知$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$可逆，且

$$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}]^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}.$$

【注】　由于$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}$，等式两边同时取逆，故

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B},$$

即本题的答案还可以写成$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.

(8) 证　由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，得$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{A}^{-1}$，故

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1},$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},$$

于是$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$(即$\boldsymbol{A}^{-1}$与$\boldsymbol{B}$可交换).

(9) 证　由已知，

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},$$

故
$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O},\tag{1}$$

① 式左乘$\boldsymbol{A}$，得
$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{O},\tag{2}$$

① 式右乘$\boldsymbol{A}$，得
$$\boldsymbol{ABA}+\boldsymbol{BA}^2=\boldsymbol{ABA}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O},\tag{3}$$

由②③式，可知$\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{BA}$.

【注】　① 下列解法是错误的：

由$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，及

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},$$

故$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$.

错误原因是矩阵乘法没有交换律，也没有消去律.

② 由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$可得$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$，但反之不一定成立.

例如$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，满足$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$，但$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

(10) 证　只要证$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，由$\boldsymbol{A}$是正交矩阵，知$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，所以

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|&=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\\&=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\\&=|-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})|=(-1)^{2n+1}|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=-|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|,\end{aligned}$$

故$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，所以$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$不可逆.

(11) 证　由已知，只要证明$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

由$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$，知$|\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{E}|=1$，及$|\boldsymbol{B}^2|=|\boldsymbol{B}|^2=|\boldsymbol{E}|=1$，故$|\boldsymbol{A}|=\pm1,|\boldsymbol{B}|=\pm1$，由$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$，可知$|\boldsymbol{A}|$与$|\boldsymbol{B}|$异号.

而
$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AB}^2+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}|,$$

由于$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=-1$，故$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$，所以$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$，从而$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$不可逆.

(12) 解　由$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$，可得$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，则$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$.

又由$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$，可知$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$可逆，故

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}.$$

【注】　此题属于解矩阵方程，这类题分两类：

① 将复杂矩阵方程化简为下列三者之一.

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C},$$

当$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$可逆时，解得

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}.$$

② 当$\boldsymbol{A}$不可逆时，问题转化为解非齐次线性方程组.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(13) 解 由$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$,得

$$(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}},$$

即$(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}+(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$. 因为$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$,所以$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$,即

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&1\\2&2\end{pmatrix}.$$

(14) 解 由$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,得$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}$,即$(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}$.

由已知,$\boldsymbol{A}$可逆,$\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}$可逆,故$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}(6\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

又
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix},(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{pmatrix},$$

故
$$\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

【注】 设a_1,a_2,a_3均不为零,则

$$\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1}&0&0\\0&\frac{1}{a_2}&0\\0&0&\frac{1}{a_3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&a_1\\0&a_2&0\\a_3&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{a_3}\\0&\frac{1}{a_2}&0\\\frac{1}{a_1}&0&0\end{pmatrix}.$$

(15) 解 $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$为初等矩阵,故可逆,由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$,得$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$,故

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$$
$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-4\\1&0&-2\end{pmatrix}.$$

(16) 解 已知矩阵方程无法利用矩阵运算化简,则令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$,代入等式转化为解方程,有

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{pmatrix}x_1&2x_1+x_2\\x_3&2x_3+x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+x_3&2x_2+x_4\\3x_1+2x_3&3x_2+2x_4\end{pmatrix},$$

比较两边对应元素,得
$$\begin{cases}x_1=2x_1+x_3,\\2x_1+x_2=2x_2+x_4,\\x_3=3x_1+2x_3,\\2x_3+x_4=3x_2+2x_4,\end{cases}$$

此方程组只有零解$x_1=x_2=x_3=x_4=0$,故$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

综合题

一、选择题

(1) B.

解 由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$知,$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$.

若$k=1$,则$r(\boldsymbol{A})=1$,故$r(\boldsymbol{B})\leqslant 2$,所以$r(\boldsymbol{B})=1$或$r(\boldsymbol{B})=2$,A,C不正确.

若$k=-3$,则$r(\boldsymbol{A})=2$,故$r(\boldsymbol{B})\leqslant 3-r(\boldsymbol{A})=1$,又$\boldsymbol{B}$是非零矩阵,故$r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$,从而$r(\boldsymbol{B})=1$.

(2) C.

解 由$r(\boldsymbol{A}^*)=1$,知$r(\boldsymbol{A})=n-1=3-1=2$,故$|\boldsymbol{A}|=0$.又

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&a-b&0\\1&0&a-b\end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2=0,$$

得$a+2b=0$或$a=b$.

又当$a=b$时,$r(\boldsymbol{A})=1\neq 2$,故$a+2b=0$(由$a,b$均不为零,可知$a+2b=0$已经蕴含$a\neq b$),故C正确.

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

【注】 设 A 是 n 阶方阵，则 $r(A^*)=\begin{cases} n \Leftrightarrow r(A)=n, \\ 1 \Leftrightarrow r(A)=n-1, \\ 0 \Leftrightarrow r(A)<n-1. \end{cases}$

(3) A.

解 P 是初等矩阵，P 左乘 A，相当于把 A 的第 1,3 行交换，故交换偶数次，相当于不变，右乘 A 相当于把 A 的第 1,3 列交换，同理交换偶数次，相当于不变，故 A 正确.

二、填空题

(1) $\begin{pmatrix} 3A^* & O \\ O & 2B^* \end{pmatrix}$.

解 由 $C \cdot C^* = |C| E$，得

$$C^* = |C| C^{-1} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= |A||B| \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| A^{-1} |B| & O \\ O & |B| B^{-1} |A| \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |B| A^* & O \\ O & |A| B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3A^* & O \\ O & 2B^* \end{pmatrix}.$$

【注】 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$（其中 A,B 均可逆）.

(2) $\frac{1}{k}$.

解 先说明 $k \neq 0$，由已知，将 $|A|$ 的第 2,3,…,n 列加到第 1 列，有

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ k & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由 A 可逆，故 $|A| \neq 0$，所以 $k \neq 0$.

将 A, A^{-1}, E 写成分块矩阵(以列分块)，有

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),\ A^{-1} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n),\ E = (e_1, e_2, \cdots, e_n),$$

由 $A^{-1}A = E$，得 $A^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = E = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$，

故 $A^{-1}\alpha_i = e_i (i = 1,2,\cdots,n)$，于是

$$A^{-1}\alpha_1 + A^{-1}\alpha_2 + \cdots + A^{-1}\alpha_n = A^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$$

$$= A^{-1} \begin{pmatrix} k \\ k \\ \vdots \\ k \end{pmatrix} = e_1 + e_2 + \cdots + e_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

即 $$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \begin{pmatrix} k \\ k \\ \vdots \\ k \end{pmatrix} = k(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

故 $$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \\ \vdots \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix},$$

即 A^{-1} 的每行元素之和均为 $\frac{1}{k}$.

【注】 此题也可作为一个结论，在做选择、填空题时直接运用.

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

(3) $\begin{cases} 4^{k-1}A, & n = 2k-1, \\ 4^k E, & n = 2k \end{cases} (k = 1,2,\cdots)$.

解 找出 A^n 的规律.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4E,$$

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot 4\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{A},$$

故 $\boldsymbol{A}^n=\begin{cases}4^{k-1}\boldsymbol{A}, & n=2k-1,\\ 4^k\boldsymbol{E}, & n=2k\end{cases}(k=1,2,\cdots).$

(4) $\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

解 注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特殊性，

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{O},$$

故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{E}$，从而 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3)=\boldsymbol{E}$，故

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

【注】 一般地，设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{E}^k-\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}$，故

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})=\boldsymbol{E},$$

从而 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$.

进一步，当 k 为偶数时，有 $\boldsymbol{E}-(-\boldsymbol{A})^k=\boldsymbol{E}$，从而可计算 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$.

三、解答题

(1) 解 利用分块矩阵表达 $\boldsymbol{A}$. 令 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(3,2,1)$，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\\ (\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A},$$

$\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}^2,\cdots$.

又 $$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(3,2,1)=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(3,2,1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=10,$$

故 $\boldsymbol{A}^n=\begin{cases}10^{k-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&10^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\\ 10^{k-1}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}, & n=2k-1,\\ 10^{k-1}\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}10^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&10^k\end{pmatrix}, & n=2k\end{cases}(k=1,2,\cdots).$

(2) 解

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-4&4&4&-4\\4&-4&-4&4\\4&-4&-4&4\\-4&4&4&-4\end{pmatrix}=-4\boldsymbol{A},$$

即 $\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

又 $$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{A}=-2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+3\boldsymbol{E},$$

即 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=3\boldsymbol{E}$，故

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\1&2&-1&1\\1&-1&2&1\\-1&1&1&2\end{pmatrix}.$$

(3) 解 用数学归纳法.

当 $n=3$ 时，$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&2&1\end{pmatrix},$$

故满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$.

假设 $\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-3}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}(n>3)$ 成立，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{n-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{n-3}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{A}^{n-2}+(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

故对 $n \geqslant 3$,所证等式成立.

由递推关系,得

$$\boldsymbol{A}^{100} = \boldsymbol{A}^{98} + \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{A}^{96} + \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{96} + 2(\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{E})$$

$$= \cdots = \boldsymbol{A}^2 + 49(\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{E}) = 50\boldsymbol{A}^2 - 49\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 50 & 50 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) 解　由 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

将 $\boldsymbol{A}$ 作一系列初等行变换(相当于左乘初等矩阵),化 $\boldsymbol{A}$ 为单位矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行加到第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行} \times \frac{1}{2} \text{ 加到第 1 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行} \times (-2) \text{ 加到第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

将上述 4 次初等行变换用初等矩阵表达,得

$$\boldsymbol{E}_{23}(-2) \cdot \boldsymbol{E}_2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \boldsymbol{E}_{12}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \boldsymbol{E}_{31}(1)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E},$$

其中,$\boldsymbol{E}_{ij}(a)$ 表示第 j 行乘以 a 加到第 i 行上,$\boldsymbol{E}_k(b)$ 表示第 k 行乘以 b,故

$$\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{E}_{23}(-2) \cdot \boldsymbol{E}_2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \boldsymbol{E}_{12}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \boldsymbol{E}_{31}(1)\right]^{-1}$$

$$= [\boldsymbol{E}_{31}(1)]^{-1} \cdot \left[\boldsymbol{E}_{12}\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \left[\boldsymbol{E}_2\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} \cdot [\boldsymbol{E}_{23}(-2)]^{-1}$$

$$= \boldsymbol{E}_{31}(-1) \cdot \boldsymbol{E}_{12}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \boldsymbol{E}_2(-2) \cdot \boldsymbol{E}_{23}(2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5) 解　由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E}$,得 $(\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = -8\boldsymbol{E}$,可验证 $(\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{E})$ 可逆,故

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{E})^{-1}(-8\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$= -8(\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = -8[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{E})]^{-1}$$

$$= -8(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{A})^{-1} = -8(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A})^{-1},$$

而 $|\boldsymbol{A}| = -2$,故　$\boldsymbol{B} = -8(-2\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A})^{-1} = -8[-2(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})]^{-1}$

$$= -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})^{-1} = 4(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})^{-1}.$$

又　$(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

所以　$\boldsymbol{B} = 4\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

【注】 ① 由 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,知 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{A}^*$ 也可逆,直接计算 $\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{E}$,证明 $\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{E}$ 可逆,计算量较大.可考虑利用 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1$,$\lambda_2 = -2$,$\lambda_3 = 1$,故 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为

$$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1} = \frac{-2}{1} = -2,\ \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2} = \frac{-2}{-2} = 1,\ \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3} = \frac{-2}{1} = -2,$$

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $-2-2,1-2,-2-2$，故

$$|\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E}|=(-4)\times(-1)\times(-4)\neq 0,$$

所以 $\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E}$ 可逆.

② 验证 $\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E}$ 可逆，也可利用公式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=-2\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}^*=-2\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E}=-2\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{E}=-2(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E})$$

$$=-2\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=-2\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

显然可逆.

(6) 解 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\x_3&y_3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，

只要解两个非齐次线性方程组. 对增广矩阵作初等行变换，

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&0\\2&1&-1&2\\-1&-1&2&-2\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&0\\0&1&-3&2\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

解得其通解为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=k_1(-1,3,1)^{\mathrm{T}}+(0,2,0)^{\mathrm{T}}$.

同样解得另一个方程组的通解为 $(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}=k_2(-1,3,1)^{\mathrm{T}}+(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$，故

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-k_1&1-k_2\\2+3k_1&-2+3k_2\\k_1&k_2\end{pmatrix}\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

拓展题

解答题

(1) 解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}$ 变形为

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}).$$

由 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆，知 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$，由此可得

$$\boldsymbol{X}^2=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-4\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(2) 证 要证 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是正交矩阵，只要证 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_m$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_n$.

依题设，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$，则

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_m,\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_n.$$

由 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵，故 $\boldsymbol{P}$ 可逆，$|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\neq 0$，因此 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆.

由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_n$，于是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是正交矩阵.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】 获取更多考研资源!

李林考研数学系列

第十二章 向 量

基 础 题

一、选择题

(1) A.

解 对于A:由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,知 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 必能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

对于B:若 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,而 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 又能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 就能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,这与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关矛盾,故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,所以B不正确.

同样,C,D也是错误的.

(2) C.

解 由线性无关的定义,知A,B不正确.

对于D:由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,知任意两个向量也线性无关,但反过来不成立,如 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,其中任两个向量均线性无关,但三个2维向量显然线性相关.

【注】 讨论向量组线性相关性的常用方法.

① 判别 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的步骤:

(ⅰ) 当 $s>n$ 时,必线性相关;

(ⅱ) 当 $s=n$ 时,行列式 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)|=0$;

(ⅲ) 当 $s<n$ 时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s$.

② 利用线性相关(无关)的等价说法:

列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关(无关)$\Leftrightarrow$ 方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 有非零解(只有零解)$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s(=s)$.

③ 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的常用方法:

(ⅰ) 定义法:

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$.

$\Downarrow$ 恒等变形 <(上式乘以数、向量、矩阵;重组)

证 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$.

(见《李林考研数学系列线性代数辅导讲义》第三章)

(ⅱ) 用行列式或秩.

(ⅲ) 反证法.

(3) B.

解 考虑到选项中每个向量均为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合,可直接利用结论,记

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1,$$

则

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xlongequal{记}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\cdot\boldsymbol{C},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,及 $|\boldsymbol{C}|=2\neq0$,即 $\boldsymbol{C}$ 可逆,故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关.

【注】 ① 结论可用线性无关的定义或秩证明.(见《李林考研数学系列线性代数辅导讲义》第三章)

② 作为选择题也可用排除法,即观察出线性相关的选项,加以排除,如A选项,显然

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0},$$

故线性相关,可排除A.

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园
微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

(4)B.

解 由结论“以少表多，多的相关”，命题①正确，而命题③是命题①的逆否命题，故命题①和命题③正确. 如 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 必线性相关.

(5)D.

解 三条直线交于一点，等价于有唯一的 x,y 满足方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0,\\ a_3x+b_3y+c_3=0,\end{cases}$$

写成向量形式，即有唯一的 x,y 使得下列等式成立，$x\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$，

即 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+y\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\alpha}_3$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，且表示法唯一，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=2$.

【注】 C选项：$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，只能说明 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，即三条直线有交点. 但 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 可能为2或1，所以不能确定交点只有一个.

(6)C.

解 记 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\mu\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&\mu\end{pmatrix}$.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆，故 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=r\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&\mu\end{pmatrix}\right)=2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\mu\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

反之，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，取 $\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，则对任意 k,μ，必有 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\mu\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\mu\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的必要非充分条件.

二、填空题

(1)6.

解 对于3个3维向量线性相关性的问题，用行列式或秩. 本题用秩进行计算.

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&k\\3&1&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-5&k+4\\0&-5&10\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-5&k+4\\0&0&6-k\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $r(\boldsymbol{A})<3$，故 $k=6$.

(2)$(1,1,-1)$.

解 设 $\boldsymbol{\beta}$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 (x_1,x_2,x_3)，则 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，即

$$\begin{cases}x_1+x_2=2,\\ x_1+x_3=0,\\ x_2+x_3=0,\end{cases}$$

解方程组，得 $x_1=x_2=1,x_3=-1$，故 $\boldsymbol{\beta}$ 在基下的坐标为 $(1,1,-1)$.

(3)$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

解 设过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$，则 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$，则

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1&-1&3\\-1&2&1\\2&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

三、解答题

(1) 解 对 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\mid\boldsymbol{\alpha})$ 作初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\mid\boldsymbol{\alpha})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&4&2&0\\1&a+4&6&3&1\\1&2a+5&8&2a+3&3\\2&a+7&10&5&b\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&4&2&0\\0&a+1&2&1&1\\0&2a+2&4&2a+1&3\\0&a+1&2&1&b\end{array}\right)$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2 & \vdots & 0\\ 0 & a+1 & 2 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2a-1 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b-1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)当 $a\neq\frac{1}{2}$ 时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组;

当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是一个极大线性无关组.

(Ⅱ)由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示,即方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}$ 无解,故 $a=\frac{1}{2}$ 或 $b\neq 1$.

(2)解　利用结论:列(行)向量组作初等行(列)变换,相关性不变(且向量的位置不变).

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & -1\\ 4 & 1 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\textcircled{1} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \textcircled{1} & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$,故取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为一个极大线性无关组,且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_4=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2.$$

【注】　由矩阵 $\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 是错误的.

(3)解　$\boldsymbol{\beta}$ 是否可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,等价于方程组 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否有解,即考虑方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\ x_2-x_3=b,\\ 2x_1+3x_2+ax_3=4,\\ 3x_1+5x_2+x_3=7,\end{cases}\qquad①$$

对 ① 的增广矩阵作初等行变换化为阶梯形,

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & b\\ 2 & 3 & a & \vdots & 4\\ 3 & 5 & 1 & \vdots & 7\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & b\\ 0 & 1 & a-2 & \vdots & 2\\ 0 & 2 & -2 & \vdots & 4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & b\\ 0 & 0 & a-1 & \vdots & 2-b\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 4-2b\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)当 $4-2b\neq 0$,即 $b\neq 2$ 时,方程组无解,此时 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(Ⅱ)当 $b=2$ 且 $a\neq 1$ 时,$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$,方程组有唯一解 $(-1,2,0)^{\mathrm{T}}$,即

$$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

线性表示唯一.

(Ⅲ)当 $b=2$ 且 $a=1$ 时,$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$,方程组有无穷多解.

令 $x_3=t$,则 $x_2=t+2$,$x_1=-1-2t$(t 为任意常数),故

$$\boldsymbol{\beta}=(-1-2t)\boldsymbol{\alpha}_1+(2+t)\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3,$$

线性表示不唯一.

【注】　此类含参数的向量组的线性表示以及互为线性表示(等价)问题是常考题型.

(4)解　由 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,知方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\ 2 & 0 & 6\\ -3 & 1 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

有解,对增广矩阵进行初等行变换,

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & \vdots & \mu\\ 2 & 0 & 6 & \vdots & 1\\ -3 & 1 & -7 & \vdots & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & \vdots & \mu\\ 0 & -6 & -12 & \vdots & 1-2\mu\\ 0 & 10 & 20 & \vdots & 3\mu\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & \vdots & \mu\\ 0 & 1 & 2 & \vdots & \frac{2\mu-1}{6}\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{3\mu}{10}-\frac{2\mu-1}{6}\end{pmatrix},$$

故 $\frac{3\mu}{10}-\frac{2\mu-1}{6}=0$,解得 $\mu=5$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研　客服微信:KYFT104　QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

又 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$，故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 2$，由已知

$$r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 2,$$

所以
$$|(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)| = \begin{vmatrix} 0 & k & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

解得 $k = 15$.

【注】 由 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，知 $\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(5) 证 证明向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价的基本方法是定义法，即证明(Ⅰ)与(Ⅱ)可以互相线性表示，而线性表示的问题可转化为解非齐次线性方程组，解方程组一般用初等变换.

记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4)$，则

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -5 & -2 \end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有唯一解，且 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_1 &= 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3, \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= 1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + (-2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (-1)\boldsymbol{\alpha}_3, \\ \boldsymbol{\beta}_3 &= 3 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + (-8)\boldsymbol{\alpha}_2 + (-5)\boldsymbol{\alpha}_3, \\ \boldsymbol{\beta}_4 &= 2 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + (-5)\boldsymbol{\alpha}_2 + (-2)\boldsymbol{\alpha}_3. \end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{A}) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right),$$

显然 $r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{A}) = 3$，故 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{A}$ 有无穷多解，即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 线性表示.

综上可知，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

【注】 证明(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，其实只要证明 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解，且 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{A}$ 有解即可.

(6) 证 由已知条件，知每一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$ 线性表示.

令 $\boldsymbol{\alpha}_i = a_{i1}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{i2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{ik}\boldsymbol{\beta}_k (i = 1, 2, 3, \cdots, k)$，即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{C} = (a_{ji})_{k \times k}$，则 $k \geqslant r(\boldsymbol{C}) \geqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k) = k$，故 $r(\boldsymbol{C}) = k$，所以 $\boldsymbol{C}$ 可逆，于是

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k)\boldsymbol{C}^{-1} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k),$$

即 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 线性表示，所以两个向量组等价.

【注】 用矩阵表达已知条件是线性代数中常用的方法.

(7) 证 依题设，只需证明(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示.

令 $r(\text{Ⅰ}) = r(\text{Ⅱ}) = r (r \leqslant s, r \leqslant t)$，则不妨设(Ⅰ)与(Ⅱ)的极大线性无关组分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$.

由已知(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示，而(Ⅱ)可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示，从而向量组(Ⅲ)$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 的秩也为 r，而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，故它也是(Ⅲ)的一个极大线性无关组，所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，于是向量组(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示.

综合所述，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

【注】 设有向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)，则

①$r(\text{Ⅰ}) = r(\text{Ⅱ})$ $\not\Rightarrow$(Ⅰ)与(Ⅱ)等价；

② 若$r(\text{Ⅰ}) = r(\text{Ⅱ})$，且(Ⅰ)可由(Ⅱ)或(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示$\Rightarrow$(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

(8) 证法 1 依题意，只要证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，用定义.

设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4(\boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4) = \boldsymbol{0}, \quad ①$$

由 $r(\text{Ⅰ}) = r(\text{Ⅱ}) = 3$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

设 $\boldsymbol{\alpha}_4 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$，将其代入 ① 式，得

$$(k_1 - \lambda_1 k_4)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 - \lambda_2 k_4)\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_3 - \lambda_3 k_4)\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_5 = \boldsymbol{0}.$$

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

由 $r(\text{Ⅲ})=4$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，故

$$\begin{cases} k_1 - \lambda_1 k_4 = 0, \\ k_2 - \lambda_2 k_4 = 0, \\ k_3 - \lambda_3 k_4 = 0, \\ k_4 = 0, \end{cases}$$

解得 $k_4=k_3=k_2=k_1=0$ 且解唯一，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，即秩为 4.

证法 2　利用向量组的秩证明.

由 $r(\text{Ⅱ})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\text{Ⅰ})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，知 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

又 $r(\text{Ⅲ})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$，知 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 也不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示(否则由 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，可得 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 也能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示)，故

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)+1=3+1=4.$$

(9) 证法 1　由特征值的定义，有 $\boldsymbol{A\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$.

设
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}, \quad ①$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘 ① 式，得
$$-2k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}. \quad ②$$

① − ②，得 $3k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $k_1=k_3=0$，代入式 ① 得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，又 $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$($\boldsymbol{\alpha}_2$ 是特征向量)，故 $k_2=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证法 2　由
$$\boldsymbol{A\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=-3\boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2,$$

设
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}, \quad ①$$

用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 左乘 ① 式，得 $-3k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，知 $k_1=k_3=0$，代入 ① 式，得 $k_2=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【注】　用定义法证明线性无关，选择适当的矩阵乘以定义式，需根据题目的条件而定，但目标是使定义式“变短”，从而证明定义式中的所有 $k=0$.

(10) 解　先求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一组基，再将其正交单位化，解空间的维数就是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含解向量的个数，故 $n-r(\boldsymbol{A})=4-2=2$.

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的分量不成比例，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一组基.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{3}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$$
$$=\frac{2}{3}(-2,1,5,-3)^{\mathrm{T}}.$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化，

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{r}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 为所求的一组标准正交基.

【注】　① 解空间的维数为 2，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，应从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中找出基(不唯一)，再正交化，不能直接对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化(标准正交基肯定是线性无关的).

② 向量 $k\boldsymbol{\beta}(k\neq0)$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的单位化向量是相同的，即 $\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}=\dfrac{k\boldsymbol{\beta}}{\|k\boldsymbol{\beta}\|}$.

综合题

一、选择题

(1) C.

解　对选项 C，用反证法，假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_t$，使得
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\boldsymbol{0}, \quad ①$$

① 式两边同乘以 $\boldsymbol{A}$，得
$$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t)=k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{A\alpha}_t=\boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_t$ 线性相关，即(Ⅱ)线性相关，与条件矛盾，所以(Ⅰ)线性无关.

取矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，知 A，B 不正确，而 D 显然不正确.

(2) C.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

解 由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，当 $\boldsymbol{B}_{3\times3}$ 可逆时，有 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 线性无关.

对于 A，因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，无论 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 是什么矩阵，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 均线性相关.

对于 B，D，无论 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是否相关，均存在 $\boldsymbol{A}_{3\times3},\boldsymbol{B}_{3\times3}$ 使得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 线性相关，故 B，D 不正确.

(3)C.

解 两个向量组等价是指这两个向量组可以互相线性表示.

由已知条件 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，$k_1k_3\neq0$，$k_2$ 是否为零不能确定，故不能确定 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是否可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 B，D 排除；同样也不能确定 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否等价，所以 A 不正确.

对于 C，由 $k_1k_3\neq0$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3$. 同理，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，又 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价.

(4)D.

解 对于 A：在选项 A 的条件下，可得 $r(\text{Ⅱ})\leqslant r(\text{Ⅰ})$，不能保证 $r(\text{Ⅱ})=r(\text{Ⅰ})$，故不能推得(Ⅱ)线性无关.

对于 B：由 $k\geqslant r(\text{Ⅱ})\geqslant r(\text{Ⅰ})=k$，得 $r(\text{Ⅱ})=k$，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性无关，选项 B 的条件是充分条件，但不是必要条件，如(Ⅰ)$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，(Ⅱ)$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，均线性无关，但(Ⅰ)不能由(Ⅱ)线性表示.

对于 C：由(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，即(Ⅰ)与(Ⅱ)可互为线性表示，故 C 不是必要条件.

对于 D：矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$ 与 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)$ 等价是指：$\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

在 D 的条件下，可知 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性无关.

反之，若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性无关，故 $r(\text{Ⅱ})=r(\text{Ⅰ})=k$，即 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=k$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

【注】 应注意向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价与矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$ 与 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)$ 等价的区别：

向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价$\rightleftarrows r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$；

同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

(5)A.

解 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{\beta}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交，知 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3,4)$ 均是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解向量.

由 $r(\boldsymbol{A})=3$，知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系最多只含一个非零解向量，故

$$1\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\leqslant n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1,$$

从而 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=1$，A 正确.

【注】 ① 列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量均正交；

② 列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解 $\Rightarrow\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示(线性组合的系数为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在对应向量组下的坐标).

(6)B.

解 对于 B：若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，考虑方程组

$$(\text{Ⅰ})\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\ (\text{Ⅱ})\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\\\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0},\end{cases}\ (\text{Ⅲ})\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0},$$

则(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)同解，故 $r(\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{B})$，即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价，反之，若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价，记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix},$$

即列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}$ 等价，故存在矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P},$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q},$$

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，故由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，反之，由 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$，得

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

对于A,由B的证明知显然不正确.

对于C,相当于$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,它是必要条件而非充分条件.

对于D,举反例.如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,

显然,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$同解,但$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$不同解.

二、填空题

-5.

解 由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关$\Leftrightarrow|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=0$.

而 $$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=\begin{vmatrix}1&2&k-1\\k+2&-1&1\\3&1&-1\end{vmatrix}=(k+1)(k+5)=0,$$

解得$k=-1$或$k=-5$.

当$k=-1$时,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,1,-1)^{\mathrm{T}}$,显然,$\boldsymbol{\alpha}_2$与$\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,故$k=-5$.

三、解答题

(1)解 (Ⅰ)对$\boldsymbol{A}$进行初等行变换,得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&4&3&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\0&0&3&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&-3\end{pmatrix}\overset{\text{记}}{=\!=}\boldsymbol{C},$$

显然,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大线性无关组.

(Ⅱ)对$\boldsymbol{C}$作初等列变换,得

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

故$\boldsymbol{E}_{21}(-1)\boldsymbol{E}_{32}(-2)\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{34}(1)=\boldsymbol{B}$,其中$\boldsymbol{E}_{ij}(a)$表示单位矩阵第$j$行(或第$i$列)乘以$a$加到第$i$行(或第$j$列)上,则有

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}_{21}(-1)\boldsymbol{E}_{32}(-2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

使得$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

(2)解 4个3维向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$一定线性相关.若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关,则$\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示,这与题设矛盾,于是$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关,从而

$$|(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5=0,$$

解得$a=5$,此时,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$不能由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示.

令$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,对$\boldsymbol{A}$进行初等行变换.

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

故$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

【注】 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$不能由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示,相当于方程组

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$$

无解.若3个3维列向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关,则方程组必有解(因$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i)=3$),故矛盾,则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关.事实上,对$\boldsymbol{A}_{m\times n}$,若$r(\boldsymbol{A})=m$(即$\boldsymbol{A}$行满秩),则$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$必有解.

(3)证 由$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{A\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_3$,且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是非零列向量,知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是不同特征值对应的特征向量,故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A\alpha}+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}. \qquad ①$$

又
$$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3,$$

将上两式代入①式,得

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},$$

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

即 $$(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+2k_2+4k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+3k_2+9k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，知 $$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0,\\k_1+2k_2+4k_3=0,\\k_1+3k_2+9k_3=0.\end{cases}$$

由于齐次线性方程组系数行列式为范德蒙德行列式且不为零，故只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

(4) 解 （Ⅰ）对增广矩阵$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})$施行初等行变换，有

$$\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\1&2&a&1&b\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\0&1&a-1&2&b-1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\0&0&a-3&0&b-1\end{array}\right).$$

当 $a=3,b\neq1$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解，即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 不能同时由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

（Ⅱ）当 $a\neq3$，对任意 b，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$，记 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)$，则 $\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{\beta}_1$ 的解为 $(-3,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{\beta}_2$ 的解为 $\left(1+\dfrac{b-1}{a-3},\dfrac{-2(b-1)}{a-3},\dfrac{b-1}{a-3}\right)^{\mathrm{T}}$，即表达式为

$$\boldsymbol{\beta}_1=-3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\left(1+\frac{b-1}{a-3}\right)\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{2(b-1)}{a-3}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b-1}{a-3}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

当 $a=3,b=1$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解，$\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{\beta}_1$ 的解为

$$k(1,-2,1)^{\mathrm{T}}+(-2,0,1)^{\mathrm{T}},$$

$\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{\beta}_2$ 的解为 $l(1,-2,1)^{\mathrm{T}}+(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，故全部解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}k-2&l+1\\-2k&-2l\\k+1&l\end{pmatrix}(k,l\text{ 为任意常数}),$$

表达式为 $\boldsymbol{\beta}_1=(k-2)\boldsymbol{\alpha}_1-2k\boldsymbol{\alpha}_2+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=(l+1)\boldsymbol{\alpha}_1-2l\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k,l 为任意常数.

(5) 证法 1 （用定义）由已知条件，需证明从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 中去掉一个后，剩下的 k 个是线性无关的，不失一般性，不妨设去掉 $\boldsymbol{\alpha}_1$，即需证明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 线性无关.

设 $$\mu_2\boldsymbol{\alpha}_2+\mu_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\mu_k\boldsymbol{\alpha}_k+\mu_{k+1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1}=\mathbf{0},\qquad①$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k$ 代入 ① 式整理得

$$\mu_{k+1}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+(\mu_2+\mu_{k+1}\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\mu_k+\mu_{k+1}\lambda_k)\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关，故有

$$\mu_{k+1}\lambda_1=\mu_2+\mu_{k+1}\lambda_2=\cdots=\mu_k+\mu_{k+1}\lambda_k=0.$$

又 $\lambda_i\neq0(i=1,2,\cdots,k)$，可得 $\mu_{k+1}=0,\mu_2=0,\cdots,\mu_k=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 线性无关.

证法 2 不失一般性，考查向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$，（Ⅱ）$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$.

由已知条件，（Ⅰ）与（Ⅱ）可互为线性表示，所以 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=k$，即（Ⅱ）中 k 个向量是线性无关的.

证法 3 （反证法）

假设 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 线性相关，而已知 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性表示，设 $$\boldsymbol{\alpha}_{k+1}=a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_k\boldsymbol{\alpha}_k,\qquad①$$

又 $$\boldsymbol{\alpha}_{k+1}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k.\qquad②$$

② − ① 得 $$\mathbf{0}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2-a_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\lambda_k-a_k)\boldsymbol{\alpha}_k,$$

其中至少有 $\lambda_1\neq0$，这表明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性相关，与已知条件矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 线性无关.

(6) 证 （Ⅰ）当 $m=n$ 时，利用结论.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)|\neq0$，由

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2,$$

知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|^2\neq0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|\neq0.$

（Ⅱ）当 $m<n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 不是方阵，不能取行列式，利用方程组证.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\Rightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|\neq\mathbf{0}.$

$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|\neq\mathbf{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\Rightarrow\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})=\mathbf{0}$ 只有零解 $\Rightarrow\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

综上所述命题得证.

(7) 解 （Ⅰ）依题设，有

$$(x_1,x_2,x_3)=(y_1,y_2,y_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.\qquad①$$

设过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$，则$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$（$\boldsymbol{P}$ 可逆）. 又

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

$$(y_1,y_2,y_3)=(x_1,x_2,x_3)(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1},$$

即$(x_1,x_2,x_3)=(y_1,y_2,y_3)\cdot\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$,故由①式,知

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) $$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&3\\-1&2&1\\2&-1&2\end{pmatrix},$$

故 $$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,-1,2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}.$$

【注】 设n维向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标为$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,$\boldsymbol{P}$为从基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵,则有$(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}$(见《李林考研数学系列线性代数辅导讲义》第三章).

拓展题

一、选择题

D.

解 由三个平面两两相交,知方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,\\a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0\end{cases}$$

无解,故$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,可排除C.

若$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=1$,则三个平面的法向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$共线,那么这三个平面必平行或重合,由此可排除A.

当三个平面两两相交,三条交线相互平行时,这三个平面的法向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$共面且互不平行,故

$$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=0,$$

且任意两行不成比例,从而有$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$,但当$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$时,不能保证任两个平面不平行,故B选项中的条件是必要条件.

二、解答题

解 (Ⅰ)依题设,有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}.$$

而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关,且$|\boldsymbol{P}|=1\neq0$,故$\boldsymbol{P}$可逆,所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性无关,即$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$为$\mathbf{R}^n$的一组基,$\boldsymbol{P}$为所求过渡矩阵.

(Ⅱ)由已知 $$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}n\\n-1\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

由(Ⅰ),知$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{P}^{-1}$,所以

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}n\\n-1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}n\\n-1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\0&1&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\n-1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

故$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标为$(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

李林考研数学系列

第十三章　线性方程组

基 础 题

一、选择题

(1) B.

解　$Ax=b$ 的通解为 $Ax=0$ 的通解加上 $Ax=b$ 的一个特解，根据非齐次和齐次线性方程组解的性质与结构，知

$$A\left(\frac{\eta_1-\eta_2}{2}\right)=\frac{1}{2}(A\eta_1-A\eta_2)=0,$$

$$A\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)=\frac{1}{2}(A\eta_1+A\eta_2)=b,$$

即 $\frac{1}{2}(\eta_1-\eta_2)$ 是 $Ax=0$ 的解，故排除 A，C.

因为不能判定 $\eta_1-\eta_2$ 是否与 ξ_1 线性无关，所以不能选 D.

事实上，由 $\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)$ 是 $Ax=b$ 的解，且 ξ_1 与 $\xi_1-\xi_2$ 线性无关，可知 ξ_1，$\xi_1-\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，故 B 正确.

【注】　①ξ_1 与 $\xi_1-\xi_2$ 线性无关可以从几何上看出，如图 13-1 所示，由于 ξ_1 与 $\xi_1-\xi_2$ 不共线，故线性无关.

② 也可利用定义证明 ξ_1 与 $\xi_1-\xi_2$ 线性无关.

设 $k_1\xi_1+k_2(\xi_1-\xi_2)=0$，即 $(k_1+k_2)\xi_1-k_2\xi_2=0$.

由已知，ξ_1，ξ_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，故线性无关，所以 $k_1+k_2=0$，$-k_2=0$，故 $k_1=k_2=0$，从而 ξ_1 与 $\xi_1-\xi_2$ 线性无关.

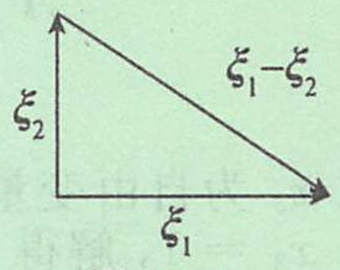


图 13-1

③ 一般地，对任意两个线性无关的向量 ξ_1 与 ξ_2，当 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}\neq 0$ 时，线性组合 $a\xi_1+b\xi_2$，$c\xi_1+d\xi_2$ 仍线性无关.

(2) A.

解　由 $Ax=0$，得 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}(Ax)=0$，故 $Ax=0$ 的解是 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 的解.

反之，若 x 是 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 的解，令 $Ax=b$，则 $b^{\mathrm{T}}=(Ax)^{\mathrm{T}}=x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$，从而

$$b^{\mathrm{T}}b=x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax=0,$$

于是 b 的各分量的平方和为 0，故 $b=0$，从而 $Ax=0$，因此 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 的解是 $Ax=0$ 的解.

【注】　证明列向量 $b=0$，即证 b 的每个分量为 0，可证 $b^{\mathrm{T}}b=0$，这是证明向量为零向量的一种方法.

(3) C.

解　方程组解的判别，关键是讨论其秩. 由已知，对任意 n 维列向量 α，有 $A^*\alpha=0$，故 $A^*\alpha=0$ 的基础解系有 n 个，即 $n-r(A^*)=n$，故 $r(A^*)=0$，由 $r(A)$ 与 $r(A^*)$ 的关系，知 $r(A)<n-1$，所以 $Ax=0$ 有 $k=n-r(A)>n-(n-1)=1$ 个基础解系，故 C 正确.

(4) C.

解　由 $AB=O$，知 B 的每一个列向量都是 $Ax=0$ 的解.

又 $B\neq O$，知 $Ax=0$ 有非零解，从而

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0,$$

所以 $\lambda=1$.

又若 $|B|\neq 0$，则 B 可逆，故 $ABB^{-1}=A=O$，与 $A\neq O$ 矛盾，所以 $|B|=0$.

【注】　由 $B\neq O$ 不能直接推得 $|B|\neq 0$，应注意矩阵不为零与行列式不为零的区别.

(5) C.

解　对增广矩阵 $\overline{A}$ 作初等行变换，

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&-3&1&\vdots&b_1\\1&-2&1&\vdots&b_2\\2&k&3&\vdots&b_3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&1&\vdots&b_2\\0&1&-1&\vdots&b_1-2b_2\\0&k+4&1&\vdots&b_3-2b_2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&1&\vdots&b_2\\0&1&-1&\vdots&b_1-2b_2\\0&k+5&0&\vdots&b_1+b_3-4b_2\end{pmatrix},$$

由方程组有解，知 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

当 $k\neq-5$ 时，对任意向量 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$，有 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$；

当 $k=-5$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2$，当 $b_1+b_3-4b_2=0$，即 $b_1+b_3=4b_2$ 时，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.

(6)B.

解　对选项 B，由 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant n<m$，而 $\boldsymbol{AB}$ 为 $m\times m$ 矩阵，故必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

二、填空题

-1 或 0.

解　对非齐次线性方程组的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&2&1&\vdots&3\\2&k+4&-5&\vdots&6\\-1&-2&k&\vdots&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&\vdots&3\\0&k&-7&\vdots&0\\0&0&k+1&\vdots&0\end{pmatrix},$$

由方程组有无穷多解，知 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$，故 $k=-1$ 或 $k=0$.

三、解答题

(1)解　对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}2&-1&4&-3&\vdots&-4\\1&0&1&-1&\vdots&-3\\3&1&1&0&\vdots&1\\7&0&7&-3&\vdots&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\textcircled{1}&0&1&-1&\vdots&-3\\0&\textcircled{1}&-2&1&\vdots&-2\\0&0&0&\textcircled{2}&\vdots&12\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix},$$

取 x_3 为自由变量，令 $x_3=0$，得非齐次线性方程组的一个特解为 $\boldsymbol{x}^*=(3,-8,0,6)^{\mathrm{T}}$.

令 $x_3=1$，解得 $x_4=0$，$x_2=2$，$x_1=-1$，故 $(-1,2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 为对应齐次线性方程组的基础解系，所求通解为 $k(-1,2,1,0)^{\mathrm{T}}+(3,-8,0,6)^{\mathrm{T}}$（$k$ 为任意常数）.

(2)解　已知方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，可以通过行列式讨论参数 λ，确定其解的情况.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\\lambda&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}=(5\lambda+4)(\lambda-1).$$

当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-\frac{4}{5}$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，方程组有唯一解.

当 $\lambda=1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$ 作初等行变换，

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}2&1&-1&\vdots&1\\1&-1&1&\vdots&2\\4&5&-5&\vdots&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&\vdots&2\\0&1&-1&\vdots&-1\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix},$$

方程组有无穷多解，为 $k(0,1,1)^{\mathrm{T}}+(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$（$k$ 为任意常数）.

当 $\lambda=-\frac{4}{5}$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})\longrightarrow\begin{pmatrix}10&-4&-5&\vdots&5\\4&5&-5&\vdots&-10\\4&5&-5&\vdots&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}10&-4&-5&\vdots&5\\4&5&-5&\vdots&-10\\0&0&0&\vdots&9\end{pmatrix},$$

此时，$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=3$，方程组无解.

【注】　含有参数的线性方程组解的讨论方法：

①$\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，可利用 $|\boldsymbol{A}|$ 讨论参数（当然也可利用初等行变换）. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 时，方程组有唯一解，用克拉默法则求其唯一解；当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，确定参数，再利用增广矩阵施行初等行变换化为阶梯形进行判别，有解时，求出通解（应注意，$|\boldsymbol{A}|=0$ 时，方程组可能无解）.

②$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}(m\neq n)$，一般利用初等行变换化增广矩阵为阶梯形，讨论参数，确定其秩，从而求解.

含参数方程组是常考题，要求熟练掌握.

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(3) 解　（Ⅰ）方程组 ① 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$，可求得基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

方程组 ② 的系数矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$，解得基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=(-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅱ）求方程组 ① 与 ② 的非零公共解，就是求 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解.

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&-2&1&0\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\eta}=(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$，故非零公共解为 $k(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$（k 是不为零的任意常数）.

【注】　由第（Ⅰ）问已求出 ① 与 ② 的基础解系，可令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2,$$

即解方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$，故有

$$\begin{cases}-k_1+l_2=0,\\k_1-l_1+l_2=0,\\k_2-l_1=0,\\k_1-l_2=0,\end{cases}$$

解得 $l_1=k_2=2k_1=2l_2$，即

$$\begin{aligned}k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2&=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+2k_1\boldsymbol{\alpha}_2=k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)\\&=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=2l_2\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2\\&=l_2(2\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=k(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}(k\neq0),\end{aligned}$$

其中，记 $k=l_1=k_2=2k_1=2l_2$.

(4) 解　方程组（Ⅰ）的系数矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$，故（Ⅰ）的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，通解为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=(-k_2,k_2,k_1,k_2)^{\mathrm{T}}(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

由已知，（Ⅱ）的通解为

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2=(-l_1,2l_1-l_2,2l_1-l_2,l_1)^{\mathrm{T}}(l_1,l_2\text{ 为任意常数}).$$

令 $(-k_2,k_2,k_1,k_2)^{\mathrm{T}}=(-l_1,2l_1-l_2,2l_1-l_2,l_1)^{\mathrm{T}}$，得

$$l_1=k_2,\ l_2=2k_2-k_2=k_2,\ k_1=k_2.$$

令 $k_2=k$，则（Ⅰ）与（Ⅱ）的非零公共解为 $k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$（k 为不为零的任意常数）.

(5) 解　（Ⅰ）对 ① 的增广矩阵作初等行变换，

$$\overline{\boldsymbol{A}}_1=\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&-4&-1&6&21\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&-2&-5\end{array}\right),$$

解得 ① 的通解为

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(-2,-4,-5,0)^{\mathrm{T}}+k(1,1,2,1)^{\mathrm{T}}(k\text{ 为任意常数}).$$

（Ⅱ）将方程组 ① 的通解 $x_1=-2+k$，$x_2=-4+k$，$x_3=-5+2k$，$x_4=k$ 代入方程组 ② 的第一个方程，得

$$(-2+k)+a(-4+k)-(-5+2k)-k=-5,$$

由 k 的任意性，可得 $a=2$. 同样将 ① 的通解代入 ② 的第二个方程，得

$$b(-4+k)-(-5+2k)-2k=-11,$$

解得 $b=4$.

将 ① 的通解代入 ② 中的第三个方程，得 $(-5+2k)-2k=-c+1$，解得 $c=6$，故方程组 ② 为

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-x_4=-5,\\4x_2-x_3-2x_4=-11,\\x_3-2x_4=-5.\end{cases}$$

对其增广矩阵作初等行变换，得

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&-1&-1&-5\\0&4&-1&-2&-11\\0&0&1&-2&-5\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&-2&-5\end{array}\right),$$

故 ② 的通解为

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(-2,-4,-5,0)^{\mathrm{T}}+k(1,1,2,1)^{\mathrm{T}},$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

与 ① 的通解相同.

综上所述,当 $a=2,b=4,c=6$ 时,方程组 ① 与 ② 同解.

(6) 解　由 $|\boldsymbol{A}|=0,A_{11}\neq 0$,得 $r(\boldsymbol{A})=n-1$,故 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$,即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 等价于方程

$$A_{11}x_1+A_{21}x_2+\cdots+A_{n1}x_n=0. \qquad ①$$

因 $A_{11}\neq 0$,故方程 ① 有下列线性无关的解,

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-A_{21},A_{11},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2=(-A_{31},0,A_{11},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(-A_{n1},0,\cdots,0,A_{11})^{\mathrm{T}},$$

解向量个数为 $n-r(\boldsymbol{A}^*)=n-1$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 是原方程组的基础解系,通解为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\text{ 为任意常数}).$$

(7) 解　由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解结构及已知条件,有

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3-1=2,$$
$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta},\ (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,故

$$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)$$
$$\xlongequal[\text{列变换}]{\text{初等}} r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{0})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,$$

所以 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}$ 有 $4-r(\boldsymbol{B})=2$ 个基础解.又

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0},$$

及 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$,故 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解为

$$k_1(1,-2,3,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,2,0,-1)^{\mathrm{T}}+(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

综合题

一、选择题

(1) B.

解　从几何上考虑,由 P_1,P_2,P_3 在 xOy 面中是在同一直线上的三点,知空间中的三点 $M_1(x_1,y_1,1),M_2(x_2,y_2,1),M_3(x_3,y_3,1)$ 在同一平面 $z=1$ 上,即为同一空间直线上三个不同点,因此三个向量 $\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM_3}$ 共面但不共线,如图 13-2 所示,

$|\boldsymbol{A}|=\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM_3}$ 的混合积 $=0$,

故 $r(\boldsymbol{A})<3$,又不共线,知 $r(\boldsymbol{A})>1$,故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

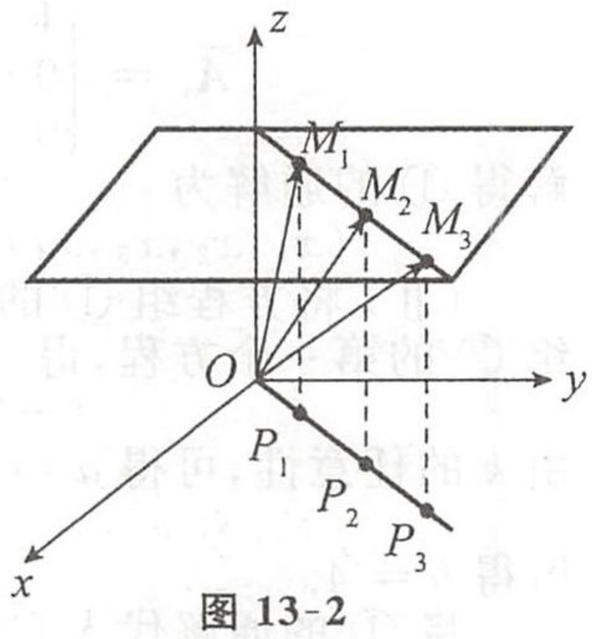


图 13-2

(2) D.

解　由 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=\boldsymbol{A}$ 的列秩,及 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关,可知 $r(\boldsymbol{A})=m$.

对于 A,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $n\times m$ 矩阵,$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})=m$,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量组线性无关,故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

对于 B,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵,由 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{A})=m<n$,故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

对于 C,$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$r(\boldsymbol{A})=m$,故 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}_1)=m<n$,即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_1$ 必有无穷多个解.

对于 D,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,|\,\boldsymbol{b}_2)=m$,但 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量只是 m 个线性无关的 n 维向量($m<n$),它不能表示任一个 n 维向量,故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ 可能无

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

解，故选 D.

(3) C.

解　$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})<n$.

对于 A，由 $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})<n \nRightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$，故排除 A.

对于 B，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\nRightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n$，但可能 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可能无解.

对于 C，设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同解 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解 $\Rightarrow r(\boldsymbol{A})<n$，且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，即 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})<n$，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解. 而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时，肯定有两个不同解，故 C 正确.

对于 D，$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关 $\Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 这是结论，见《李林考研数学系列线性代数辅导讲义》第三章. 而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\nRightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解(可能无解).

(4) A.

解　用排除法，依题设，三个不同平面交于一条直线，则方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

有无穷多解，故 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$，排除 B，C.

若 $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=1$，则三个平面重合，故排除 D.

【注】 三个平面的位置关系，即讨论线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，从而可用系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的秩进行判断：

① 三平面相交于一点，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$.

② 三平面重合，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=1$.

③ 三平面平行，或有两平面重合，另一个平面与它们平行，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解，$r(\boldsymbol{A})=1$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.

④ 三平面交于一直线，或有两个平面相交，另一个平面与其中一个平面重合，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，$r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.

⑤ 三平面两两相交且三平面互不平行，或有两个平面平行. 另一个平面与这两个平面分别相交，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解，$r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$.

(5) A.

解　由已知，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=n-1$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系有 $n-r(\boldsymbol{A})=1$ 个向量.

因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 都正交，所以

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\beta}_1=0,\ \boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\beta}_2=0,\ i=1,2,\cdots,n-1,$$

从而

$$\boldsymbol{A\beta}_j=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_j=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},j=1,2,$$

由此可知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同解，故 $k(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 可能是零向量，故排除 C，D；由于 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 也可能是零向量，故排除 B.

二、填空题

(1) $(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$.

解　设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有特解 $\boldsymbol{\alpha}^*=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A\alpha}^*&=(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3)x_1+\boldsymbol{\alpha}_1x_2+\boldsymbol{\alpha}_2x_3+\boldsymbol{\alpha}_3x_4\\&=\boldsymbol{\beta}x_1+(x_2-x_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_3-2x_1)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_4-3x_1)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

只要取 $x_1=x_2=1, x_3=2x_1=2, x_4=3x_1=3$ 即可，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有一个特解为 $(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$.

(2) $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解　由已知，$A_{ij}=a_{ij}$，知 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，故

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}\\a_{32}\\1\end{pmatrix}.$$

又 $|\boldsymbol{A}|=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=a_{31}^2+a_{32}^2+1=1$,

知 $a_{31}=a_{32}=0$,所以$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

三、解答题

(1) 解 依题设,找出 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解及 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解.

由解的性质,$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{b}$,故 $\boldsymbol{A}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2}{2}\right)=\boldsymbol{b}$,取

$$\boldsymbol{\eta}^*=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right)^{\mathrm{T}}$$

为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解. 又

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=2\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=3\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1)=5\boldsymbol{b},$$

故

$$\boldsymbol{A}[3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-2(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)]=6\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{A}[(2\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)]=5\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

所以

$$\boldsymbol{\eta}_1=3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-2(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=(7,4,-1,6)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_2=(2\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=(12,2,-14,0)^{\mathrm{T}}$$

为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,且线性无关(不成比例).

又 $r(\boldsymbol{A})=n-2$,故 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$k_1(7,4,-1,6)^{\mathrm{T}}+k_2(12,2,-14,0)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right)^{\mathrm{T}}(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

(2) 解 (Ⅰ)由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解的结构,知 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$,并有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta},\ (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta},\quad①$$
$$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.\quad②$$

由①式,知

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3),$$

又由②式,知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,由于 $r(\boldsymbol{A})=3$,故 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)=2$.

(Ⅱ)由$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$,知$(0,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的一个解.

又由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=4\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0},$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2\\-4\\0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

且$(4,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 与$(2,-4,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关,故 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解为

$$(0,-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_1(4,-2,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(2,-4,0,1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

(3) 解 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系等价,知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,又 $r(\boldsymbol{A})=1$,知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有 $n-r(\boldsymbol{A})=4-1=3$ 个线性无关的解向量,故

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3,$$

其极大线性无关组是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

对$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$作初等行变换,有

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\2&-1&-1&a\\0&1&a&-3\\2&a&5&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-3&a-4\\0&0&a+3&1-a\\0&0&0&(1-a)(a-4)\end{pmatrix}.$$

当 $a=-3$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$k_1(1,2,0,2)^{\mathrm{T}}+k_2(1,1,-1,3)^{\mathrm{T}}+k_3(2,-3,-3,-5)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大线性无关组，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$k_1(1,2,0,2)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}+k_3(1,-1,1,5)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

当 $a=4$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大线性无关组，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$k_1(1,2,0,2)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,-1,1,4)^{\mathrm{T}}+k_3(1,-1,4,5)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(4) 证　（必要性）设三条直线交于一点，则非齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\bx+2cy=-3a,\\cx+2ay=-3b\end{cases}$$

有唯一解，故 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&2b\\b&2c\\c&2a\end{pmatrix},\quad\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{pmatrix}.$$

由 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$ 知 $|\overline{\boldsymbol{A}}|=0$，即

$$\begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&2&-3\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&0&0\\b&2(c-b)&3(b-a)\\c&2(a-c)&3(c-b)\end{vmatrix}$$

$$=6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0.$$

又三条直线互不相同，故

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0,$$

于是 $a+b+c=0$.

（充分性）若 $a+b+c=0$，则 $|\overline{\boldsymbol{A}}|=0$，故 $r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$.

又 $\begin{vmatrix}a&2b\\b&2c\end{vmatrix}=2(ac-b^2)$，将 $c=-(a+b)$ 代入上式，得

$$\begin{vmatrix}a&2b\\b&2c\end{vmatrix}=-2[a(a+b)+b^2]=-2\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]\neq0,$$

故 $r(\boldsymbol{A})\geqslant2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})\geqslant2$，又显然 $r(\boldsymbol{A})\leqslant2$，所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，故方程组有唯一解，即三条直线交于一点.

(5) 解　$\boldsymbol{A}$ 中有 6 个未知参数，不能用初等行变换求解，利用特征向量的定义

$$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}).$$

由已知，有

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\begin{pmatrix}1&-2&3\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

得 $\lambda_1=0$，即 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$. 同理

$$\boldsymbol{A\alpha}_2=\begin{pmatrix}1&-2&3\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

得 $\lambda_2=0$，即 $\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}$.

$$\boldsymbol{A\alpha}_3=\begin{pmatrix}1&-2&3\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}=\lambda_3\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix},$$

得 $\lambda_3=1$，即 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_3$.

又 $3-r(\boldsymbol{A})=3-1=2$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有两个基础解，故所求通解为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(6) 解　求抽象方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解，首先要讨论秩，从而确定解的情况.

由已知，$\boldsymbol{b}=(a_{13},a_{23},a_{33})^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中的第 3 列，且 $a_{ij}=A_{ij}$，故

$$|\boldsymbol{A}|=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}=a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2>0(\text{因 } a_{33}\neq 0),$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=3$，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. 而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$，故

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}0\\0\\|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(7) 证　只要证明 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})$.

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\begin{aligned}r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})&=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=r[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n)\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}]\\&=r[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\mid\boldsymbol{b})]\leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

又 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\geqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$，故 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$，所以方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 必有解.

拓展题

解答题

(1) 解　由已知条件及 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解结构，只需求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，而基础解系有 $n-r(\boldsymbol{A})=4-2=2$ 个，$(0,1,-3,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，于是再求一个与 $(0,1,-3,0)^{\mathrm{T}}$ 线性无关的解即可.

注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，事实上，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

且　$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3=(4,6,-8,4)^{\mathrm{T}}-2(1,2,-1,1)^{\mathrm{T}}=(2,2,-6,2)^{\mathrm{T}}$，

又 $(2,2,-6,2)^{\mathrm{T}}$ 与 $(0,1,-3,0)^{\mathrm{T}}$ 线性无关(分量不成比例)，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$k_1\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\2\\-6\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

【注】　结论：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 n 个解，当 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$ 时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

(2) 解　(Ⅰ) 依题设，$(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的特解，$(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$，$(2,1,2)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，故

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以 $\lambda_1=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}=0\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}=0\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},$$

故 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 而

$$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&1\\1&-2&2\end{vmatrix}=-3\neq 0,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三个线性无关的 3 维列向量，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可作为 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，所以任意 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)可设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=1,\\x_1+2x_2+x_3=2,\\x_1-2x_2+2x_3=-1,\end{cases}$$

得唯一解 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=\left(1,\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$，故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3)=x_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=3x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

李林考研数学系列

第十四章 相似矩阵

基础题

一、选择题

(1)B.

解 $\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}=3(\boldsymbol{A}^{-1})^2$，由已知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=2$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有特征值 $\frac{1}{2}$，$(\boldsymbol{A}^{-1})^2$ 有特征值 $\frac{1}{4}$，故所求特征值为 $\frac{3}{4}$.

【注】 有关特征值、特征向量的结论：

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^n$	$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$	$f(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$
λ	λ^n	$\lambda+k$	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}{\lambda}$	λ	λ
$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$	/

其中 $f(\lambda)$ 为多项式. 以上结论可用特征值、特征向量的定义 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\neq 0)$ 进行验证. (见《李林考研数学系列线性代数辅导讲义》第五章)

(2)C.

解 因实对称矩阵必相似于由特征值组成的对角矩阵，即 $\mathrm{diag}(0,1,2,3)$，且有相同的秩，即

$$r(\boldsymbol{A})=r(\mathrm{diag}(0,1,2,3))=3.$$

(3)A.

解 判别 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是否相似，利用矩阵相似于对角矩阵的充分条件或充要条件.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2,2,1. 又

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

知 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，即 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，特征值 2 对应两个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$，得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 2,2,1. 又

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

其秩为 2，即 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，特征值 2 只对应一个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{B}$ 不能相似于 $\boldsymbol{C}$.

(4)D.

解 对于 D，由于

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\0&\lambda&-3\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)=0,$$

所以 $\boldsymbol{D}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=0$，

$$0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\0&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可知 $r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D})=2$，故 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 只对应 $3-r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D})=3-2=1$ 个特征向量，所以 $\boldsymbol{D}$ 不能相似于对角矩阵.

对于 A：显然 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，故必相似于对角矩阵.

对于 B：由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$，得 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，即 $\boldsymbol{B}$ 有三个不同特征值，故它必相似于对角矩阵.

对于 C：由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}|=0$，得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3$，对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$，

$$r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})=r\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&-2&-3\end{pmatrix}=1,$$

故 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 有两个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{C}$ 相似于对角矩阵.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(5)B.

解 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,知 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,故 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\neq 0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=0$,即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 同时可逆或不可逆.

(6)A.

解 $\boldsymbol{A}$ 为抽象矩阵,用定义验证.

由已知,有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3$,故

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_1=1\boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_2=1\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_3=0\boldsymbol{\alpha}_3,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征向量.同理可验证B,C,D不正确.

【注】 注意定义 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 中 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,即特征向量一定不能是零向量.

二、填空题

(1)-1.

解 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,有 $\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{3}b_{ii}$,知 $1+1+1=-1+5+a$,得 $a=-1$.

(2)$|\boldsymbol{A}|$,所有 n 维非零列向量.

解 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*|=|\lambda\boldsymbol{E}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=|(\lambda-|\boldsymbol{A}|)\boldsymbol{E}|=0$,

知 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda=|\boldsymbol{A}|$.

由 $(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可知所有 n 维非零列向量均为特征向量.

(3)-1.

解 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值,$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 为对应的特征向量,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,故

$$(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}+2\lambda\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}$$
$$=(\lambda^2+2\lambda+1)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 知 $\lambda^2+2\lambda+1=0$,故 $\lambda=-1$.

【注】 也可有如下解法:

由已知 $|\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|^2=0$,

故 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$,即 $|(-1)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=-1$.

(4)1.

解 由已知,$\boldsymbol{A}$ 有3个不同特征值,故 $\boldsymbol{A}$ 必相似于对角矩阵,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

由于
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$$
$$=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^3-2(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^2$$
$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&8\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{C},$$

故 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,从而 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})=1$.

三、解答题

(1)**解** (Ⅰ)由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5&-2&-2\\\lambda-5&\lambda-1&-2\\\lambda-5&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&\lambda-1&-2\\1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-5)(\lambda+1)^2,$$

可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1$.

对于 $\lambda_1=5$,解方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,

$$5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{见注②}}\begin{pmatrix}-2&-2&4\\-2&4&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

解得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,即 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$(k_1 是任意非零常数)是 $\lambda_1=5$ 对应的全部特征向量.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=-1$,

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$(-1)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

解得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，即 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$（$k_2,k_3$ 是不同时为零的任意常数）是 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 对应的全部特征向量.

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

（Ⅲ）由（Ⅱ），知 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 为二重特征值，对其特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 正交化，令 $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$$
$$=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(-1,-1,2)^{\mathrm{T}}.$$

再对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^{\mathrm{T}},$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

【注】 ① 此题属于基础题，计算 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 时，先化简再计算.

② 考虑到三行不成比例，且 $|5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，故 $r(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})<3$，初等行变换后至少有一行元素全为 0，所以可以将其中任意一行写成 $(0,0,0)$，放到最后一行，这个小技巧希望读者能掌握.

(2) 解　（Ⅰ）$\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵，而实对称矩阵必相似于对角矩阵，且与其相似的对角矩阵的对角线元素必为其特征值，故只要判别 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 3,0,0 是否为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值即可.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-3)=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3,0,0，故 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$；

由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

（Ⅱ）$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵. 又

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2),$$
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2),$$

知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都有三个不同特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=1$，因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可分别求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则　$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\mathrm{diag}(2,-1,1)$.

同理可求得 $\boldsymbol{B}$ 属于 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=1$ 的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\beta}_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\mathrm{diag}(2,-1,1)$，故 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$，即

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}),$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

微信公众号【神灯考研】

【注】 ① 判别两个同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相似，可先利用矩阵相似的必要条件：$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}),r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B}),|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|,\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\sim\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$，$\lambda$ 为实数.（特别地，λ 为特征值也成立）

② 看 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相似于同一个对角矩阵.

③ 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值及重数.

考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

(3) 解　(Ⅰ)已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$,确定 $\boldsymbol{A}$ 中的参数 a,b,利用定义 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,得

$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

比较等式两边对应元素,得 $\lambda=-1,a=-3,b=0$.

(Ⅱ)由(Ⅰ),知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$,则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

由　$$r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{pmatrix}=2,$$

可知三重特征值 -1 只对应一个线性无关的特征向量,故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵.

(4) 解　由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,知 $\boldsymbol{A}$ 有3个线性无关的特征向量,$\lambda=2$ 是二重特征值,应该对应有两个线性无关的特征向量,故 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-2=1$,即

$$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}=1,$$

所以 $x=2,y=-2$,故　$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}.$$

又 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值 λ_3 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+2+\lambda_3=\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=10$,故 $\lambda_3=6$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=2$,由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$;

对 $\lambda_3=6$,由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(2,2,6)$.

(5) 解　(Ⅰ)由已知,有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}.\qquad①$$

记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$,由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,记 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{C}$ 可逆.

由①式,知 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CB}$,即 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$,因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

由　$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0,$$

得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为1,1,4,即为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

(Ⅱ)先求 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

对 $\lambda_1=\lambda_2=1$,由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可解得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}};$$

对 $\lambda_3=4$,由 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可解得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$,则　$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{BP}_1=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{ACP}_1=\boldsymbol{\Lambda}$,即 $(\boldsymbol{CP}_1)^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{CP}_1)=\boldsymbol{\Lambda}$. 令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{CP}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=(-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3),$$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

又由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,则 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{\Lambda}-2\boldsymbol{E}$,故 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{\Lambda}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=2.$

(6) 解　(Ⅰ)由

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -2\\ -a & \lambda-1 & -1\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0,$$

得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$.

因为 A 有三个线性无关的特征向量，所以对应二重特征值 1，A 应有两个线性无关的特征向量，故 $r(E-A)=1$. 而

$$E-A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -a & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故 $a+1=0$，即 $a=-1$.

（Ⅱ）对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，由 $(E-A)x=0$，得 $\alpha_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

对应于 $\lambda_3=-2$，由 $(-2E-A)x=0$，得 $\alpha_3=(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$.

(7) 解　（Ⅰ）由 $A\sim B$ 知，A 与 B 有相同的特征值，而由 $|\mu E-B|=0$，可得 B 的特征值为 $\mu_1=\mu_2=0,\mu_3=14$，故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=14$.

由已知，二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，对应的特征向量为 α_1,α_2，且 α_1,α_2 线性无关，设 $\lambda_3=14$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，因为 A 是实对称矩阵，故 $\begin{cases}\alpha_3^{\mathrm{T}}\alpha_1=0,\\ \alpha_3^{\mathrm{T}}\alpha_2=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ 2x_2+x_3=0,\end{cases}$ 解得 $\alpha_3=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

综上所述，A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应的特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$（k_1,k_2 不同时为 0），特征值 $\lambda_3=14$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3(k_3\neq 0)$.

（Ⅱ）令　$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

则 P 可逆，使得　$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 14\end{pmatrix}.$$

(8) 解　由 $A\sim B$，知 A,B 有相同的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=b,\lambda_3=c$. 又

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & 1\\ -1 & \lambda-5 & -1\\ -4 & -12 & \lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -a & 1\\ 0 & \lambda-5 & -1\\ 2-\lambda & -12 & \lambda-6\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)(\lambda^2-10\lambda+13-a),$$

二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=b$ 有两种情况：$b=2$ 或 $b\neq 2$.

当 $b=2$ 时，由 b 是二重特征值，则 $\lambda^2-10\lambda+13-a$ 会有因式 $\lambda-2$，故可得 $a=-3$.

又 $A\sim B$，知 $\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{3}b_{ii}$，即 $1+5+6=2b+c$，故 $c=8$，且此时有

$$r(2E-A)=r\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -1 & -3 & -1\\ -4 & -12 & -4\end{pmatrix}=1,$$

即 $\lambda=2$ 有两个线性无关的特征向量，使得 $A\sim B$，所以 $a=-3,b=2,c=8$.

若 $b\neq 2$，由 2 是 A 的特征值，故 $c=2$，又由

$$1+5+6=b+b+c=2b+2,$$

知 $b=5$，此时 $\lambda^2-10\lambda+13-a=(\lambda-5)^2$，即得 $a=-12$.

而　$$r(5E-A)=r\begin{pmatrix}4 & 12 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ -4 & -12 & -1\end{pmatrix}=2\neq 1,$$

即 $\lambda_1=\lambda_2=b=5$，只有一个线性无关特征向量，因此 A 与 B 不相似.

综上所述，$a=-3,b=2,c=8$.

(9) 解　（Ⅰ）设 $\lambda_3=-1$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，由实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交，可知

$$\begin{cases}\alpha_3^{\mathrm{T}}\alpha_1=x_1+x_2+x_3=0,\\ \alpha_3^{\mathrm{T}}\alpha_2=2x_1+2x_2+x_3=0,\end{cases}$$

解得 $\alpha_3=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$. 故 A 的属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $k\alpha_3(k\neq 0)$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

(Ⅱ)令 $$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(1,1,-1)$,故

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(10) 解 (Ⅰ)由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,知 $\boldsymbol{A}$ 必相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 知,$\boldsymbol{A}$ 的特征值的取值是 0 与 1.

又 $r(\boldsymbol{A})=r$,故 $r(\boldsymbol{\Lambda})=r$,即有

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\}r\text{个}\\\\\\\end{matrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=1$ 的重数为 r,$\lambda=0$ 的重数为 $n-r$,故 $3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=2$ 的重数为 r,$\lambda=3$ 的重数为 $n-r$,所以 $|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=2^r\cdot 3^{n-r}$.

(Ⅱ)由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是0与1,但没有 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵的条件,所以要检验 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

由 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$,知 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\leqslant n$. 又

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{E})=n,$$

故 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$,即有 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{A})=n-r$.

对于 $\lambda=1$,$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,而 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-r$,故 $\boldsymbol{A}$ 有 r 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$;

对于 $\lambda=0$,$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,而 $r(\boldsymbol{A})=r$,故 $\boldsymbol{A}$ 有 $n-r$ 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\boldsymbol{\alpha}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,所以 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&1&&\\&&&&0&\\&&&&&\ddots\\&&&&&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\\}r\text{个}\\\\\\\end{matrix}=\boldsymbol{\Lambda},$$

可得 $3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\sim 3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\Lambda}$,所以

$$|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\Lambda}|=2^r\cdot 3^{n-r}.$$

【注】 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由定义,设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量,即有 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\neq 0)$,故 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$,

即有 $$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

而 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\lambda^2-\lambda=0$,得 $\lambda=0$,$\lambda=1$,即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的取值只能为0或1,但有多少个特征值取0或1,不能确定,还需要其他条件才能确定,事实上满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的矩阵不唯一,如 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 都满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

综合题

一、选择题

(1)D.

解　利用矩阵相似的定义. 由

$$BA = EBA = A^{-1}ABA = A^{-1}(AB)A,$$

知 $AB \sim BA$. 由 $A^{-1} \sim B^{-1}$ 知，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}A^{-1}P = B^{-1}$. 两边同时求逆，得

$$P^{-1}AP = B, \tag{①}$$

故 $A \sim B$. ① 式两边同时取转置，得 $P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}$，即 $P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}})^{-1} = B^{\mathrm{T}}$，故 $A^{\mathrm{T}} \sim B^{\mathrm{T}}$.

又由 $P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP = P^{-1}A^2P = B^2$，可知 $A^2 \sim B^2$.

综上所述，D 正确.

(2)D.

解　由于 A 是实对称矩阵，所以 A 相似于对角矩阵. 又

$$|\lambda E - A| = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$，$\lambda_3 = 2$，$\lambda_4 = 4$.

而 $B \sim A$，故 B 的特征值也是

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 4,$$

且 B 也相似于对角矩阵，故

$$r(B) = r(0E - B) = 4 - 2 = 2,$$
$$r(B - 2E) = r(2E - B) = 4 - 1 = 3.$$

由于 1 不是 B 的特征值，所以 $|E - B| \neq 0$，故 $r(B - E) = 4$，D 正确.

【注】 ① 由 $B \sim \Lambda$，知二重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 对应两个线性无关的特征向量，故

$$r(0E - B) = 4 - 2 = 2.$$

由 $\lambda_3 = 2$ 是单根，故对应一个特征向量，故 $r(2E - B) = 4 - 1 = 3$.

②n 阶矩阵 $A \sim \Lambda$ 的有关定理(一个充分条件，两个充要条件)：

(ⅰ)(充分条件)：A 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow A \sim \Lambda$；

(ⅱ)(充要条件)：$A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量；

(ⅲ)(充要条件)：$A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 的 k 重特征值 λ_k 对应 k 个线性无关的特征向量(即 $r(\lambda_k E - A) = n - k$).

这三个基本定理必须熟练掌握.

(3)C.

解　对于 A，由 $|\lambda E - A| = 0$ 可得特征值 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = -1$，故 A 与 Λ 相似(因 A 有 3 个不同特征值且与 Λ 的特征值相同). 但 A 不是实对称矩阵，而 Λ 是实对称矩阵，故 A 与 Λ 不合同.

对于 B，由 $|\lambda E - B| = 0$ 可得特征值 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = -5$，与 Λ 的特征值不同，所以 B 与 Λ 不相似，排除 B.

对于 C，由 $|\lambda E - C| = 0$ 可得特征值 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = -1$，$\lambda_3 = 1$，故 C 与 Λ 相似，且实对称矩阵 C 的正、负惯性指数与 Λ 的正、负惯性指数分别相等，所以 C 正确.

对于 D，由 $|\lambda E - D| = 0$ 可得特征值 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = -2$，与 Λ 的特征值不同，故与 Λ 不相似(或根据迹不同也可知不相似)；D 的正惯性指数为 2，与 Λ 的正惯性指数不同，故 D 与 Λ 也不合同.

(4)A.

解　记已知条件矩阵及选项 A，B，C，D 的矩阵分别为 A, A_1, A_2, A_3, A_4. 由

$$|\lambda E - A| = |\lambda E - A_1| = |\lambda E - A_2| = |\lambda E - A_3| = |\lambda E - A_4| = (\lambda - 1)^3,$$

可知五个矩阵的特征值均为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

由 $1E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，知 $r(E - A) = 2$，故三重特征值 1 只有一个线性无关的特征向量，所以 A 不相似于对角矩阵. 同理，A_1, A_2, A_3, A_4 都不相似于对角矩阵.

作为选择题，可用两个矩阵相似的必要条件，利用排除法. 由

$$1E - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，\text{知 } r(E - A_1) = 2,$$

$$1E - A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，\text{知 } r(E - A_2) = 1,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\text{知 } r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_3)=1,$$

$$1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\text{知 } r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_4)=1,$$

故只有 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1)=r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，而 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 与 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_2),r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_3),r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_4)$ 均不相等，所以 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_4$ 均不相似，故 A 正确.

【注】 结论：

①$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$；

②$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow r(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})$.

(5)C.

解 由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，故与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵也必为实对称矩阵，显然矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均是实对称矩阵，矩阵 $\boldsymbol{D}$ 不是实对称矩阵，由此可知，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 不可能合同.

又由

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+x_3^2,$$

可知 $\boldsymbol{A}$ 的正、负惯性指数分别为 $p=2,q=0$.

同理，由 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2=(x_1-x_2)^2+x_3^2$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=3x_1^2+2x_2^2$，可知矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的正、负惯性指数相同，即 $p=2,q=0$.

综上可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均合同，C 正确.

【注】 ① 本题也可以求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的特征值，从而求得正、负惯性指数.

② 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的正、负惯性指数.

二、填空题

(1)-4.

解 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$，故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})$$

$$=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B},$$

故 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$，则

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}|=|\boldsymbol{P}|\cdot|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{P}^{-1}|$$

$$=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4.$$

(2)$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解 由 $r(\boldsymbol{A})=1$，$\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，故 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，且 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=0$.

设 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=-x_1+x_2+x_3=0,$$

解得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

三、解答题

(1)解 (Ⅰ)由已知，有

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_3)$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,-4\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-4&0\end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-4&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$.

又由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda&1\\0&4&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)=0,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

得 $\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

（Ⅱ）求 $\boldsymbol{C}$ 的特征向量.

对于 $\lambda_1=1$，由 $(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$；

对于 $\lambda_2=2$，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,-\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}$；

对于 $\lambda_3=-2$，由 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_3=(0,\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&1\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(1,2,-2). \tag{①}$$

将 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$ 代入 ① 式，得 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{\Lambda}$，即 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1)^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1)=\boldsymbol{\Lambda}$. 令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&1\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3),\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为所求可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(2) 解　（Ⅰ）用定义证. 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}, \tag{①}$$

由已知条件，有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,\\&\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\\&\cdots\cdots\\&\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{\alpha}_2=\cdots=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{\alpha}_n,\\&\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}_2=\cdots=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

用 $\boldsymbol{A}^{n-1}$ 左乘 ① 式，得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{\alpha}_n\neq\boldsymbol{0}$，得 $k_1=0$.

依次用 $\boldsymbol{A}^{n-2},\boldsymbol{A}^{n-3},\cdots,\boldsymbol{A}$ 左乘 ① 式，可得

$$k_2=k_3=\cdots=k_{n-1}=0,$$

代入 ① 式，可得 $k_n=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

（Ⅱ）　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{0})$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}0&&&&\\1&0&&&\\&1&\ddots&&\\&&\ddots&0&\\&&&1&0\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，由（Ⅰ），知 $\boldsymbol{P}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&&&&\\1&0&&&\\&1&\ddots&&\\&&\ddots&0&\\&&&1&0\end{pmatrix}.$$

(3) 解　（Ⅰ）用定义证. 设

$$k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}, \tag{①}$$

由已知，有　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$，

$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3$.

将 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 及以上两式代入 ① 式，整理得

$$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是不同特征值对应的特征向量，故它们线性无关，故

$$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0,\\k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0,\\k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0,\end{cases}$$

其系数行列式 $\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{vmatrix}\neq0$，所以 $k_1=k_2=k_3=0$，故 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

(Ⅱ)由 $A^3\beta = A\beta$,有

$$A(\beta, A\beta, A^2\beta) = (A\beta, A^2\beta, A^3\beta) = (A\beta, A^2\beta, A\beta)$$
$$= (\beta, A\beta, A^2\beta)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

令 $P = (\beta, A\beta, A^2\beta)$,故 $AP = PB$,其中 $B = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,即 $P^{-1}AP = B$,所以 $A-E$ 与 $B-E$ 相似,故 $r(A-E) = r(B-E)$. 而

$$r(B-E) = r\left(\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\right) = 2,$$

所以 $r(A-E) = 2$.

(4)解 (Ⅰ)由 $|\lambda E - A| = 0$,得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = -1$.

由 A 有 4 个线性无关的特征向量,知二重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = -1$ 分别对应有两个线性无关的特征向量,故

$$r(E-A) = r\left(\begin{pmatrix}0&-a&0&-2\\0&0&-2&0\\0&0&2&-b\\0&0&0&2\end{pmatrix}\right) = 2,$$

得 $a = 0$,同理,由 $r(-E-A) = 2$,得 $b = 0$.

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$,由 $(E-A)x = 0$,得 $\alpha_1 = (1,0,0,0)^T, \alpha_2 = (0,1,0,0)^T$;

对 $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$,由 $(-E-A)x = 0$,得 $\alpha_3 = (1,0,0,-1)^T, \alpha_4 = (0,1,-1,0)^T$.

令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$,则 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知

$$A = \left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&2\\0&1&2&0\\ \hdashline 0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right) \xlongequal{\text{分块}} \begin{pmatrix}E_2&B\\O&-E_2\end{pmatrix},$$

故

$$A^2 = \begin{pmatrix}E_2&B\\O&-E_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_2&B\\O&-E_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E_2&O\\O&E_2\end{pmatrix} = E,$$

其中 E 为 4 阶单位矩阵,所以 $(2E-A^2)^{-1} = E^{-1} = E$.

(5)解 (Ⅰ)$A = \alpha\beta^T = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1, b_2, \cdots, b_n) = \begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$.

用定义,设 A 的任一个特征值为 λ,对应的特征向量为 ξ,则

$$A\xi = \alpha\beta^T\xi = \lambda\xi. \quad ①$$

① 式两边左乘 β^T,得 $\beta^T\alpha\beta^T\xi = \lambda\beta^T\xi$.

当 $\beta^T\xi \neq 0$ 时,有 $\lambda = \beta^T\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$;当 $\beta^T\xi = 0$ 时,由 ① 式知 $\lambda = 0$,故 A 的特征值为 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = \beta^T\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$.

(Ⅱ)当 $\alpha^T\beta = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i = 0$ 时,由(Ⅰ)知,A 的全部特征值为 $\lambda = 0$(n 重根),因 $\alpha \neq 0$,$\beta \neq 0$,故 $A = \alpha\beta^T \neq O$. 于是 $r(A) = 1$,但对应 $\lambda = 0$(n 重根)的线性无关的特征向量满足 $(0E-A)x = 0$,即 $Ax = 0$,只有 $n - r(A) = n-1$ 个基础解系,即只有 $n-1$ 个线性无关的特征向量,故 A 不能相似于对角矩阵.

当 $\alpha^T\beta = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \neq 0$ 时,对于 $\lambda = \alpha^T\beta$,由 $(\lambda E - A)\xi = (\alpha^T\beta E - \alpha\beta^T)\xi = 0$,以及

$$(\alpha^T\beta E - \alpha\beta^T)\alpha = (\alpha^T\beta)\alpha - \alpha(\beta^T\alpha) = 0,$$

知对应的特征向量 $\xi_1 = \alpha$,对于 $\lambda = 0$,由 $(0E-A)\xi = 0$,即 $A\xi = \alpha\beta^T\xi = 0$,故

$$\beta^T\xi = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0. \quad ②$$

因 $\beta \neq 0$,不妨设 $b_1 \neq 0$,解方程 ② 得线性无关的特征向量为

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\begin{aligned}\xi_2 &= (b_2, -b_1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}},\\ \xi_3 &= (b_3, 0, -b_1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}},\\ &\cdots\\ \xi_n &= (b_n, 0, \cdots, 0, -b_1)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{P} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_2 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & -b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & -b_1 \end{pmatrix},$$

使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

【注】 ① 此题 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，显然 $r(\boldsymbol{A}) = 1$，故 $\boldsymbol{A}^2 = k\boldsymbol{A}$，其中 $k = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$，即

$$\boldsymbol{A}^2 = (\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A}.$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值为 λ，则 $\boldsymbol{A}^2 - (\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda^2 - (\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\lambda$.

而 $\boldsymbol{A}^2 - (\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$，故

$$\lambda^2 - (\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\lambda = 0,$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda = 0$，$\lambda = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$（这实际上是秩为 1 的矩阵特征值的结论）.

② 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量的常用方法：

（ⅰ）当 $\boldsymbol{A}$ 是具体矩阵时，用公式 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$，$(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$；

（ⅱ）当 $\boldsymbol{A}$ 是抽象矩阵时，用定义 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0})$.

(6) 解　（Ⅰ）$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a-1 & & & \\ & a-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xlongequal{\text{记}} (a-1)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}.$

由 $r(\boldsymbol{B}) = 1$，$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}| = 0$，得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = n,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$n + (a-1), 0 + (a-1), \cdots, 0 + (a-1).$$

下求 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

由 $(n\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$；由 $(0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，得

$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, -1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 0, -1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n = (1, 0, 0, \cdots, -1)^{\mathrm{T}}$，

由特征值、特征向量的性质，知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(n + (a-1), a-1, \cdots, a-1)$.

（Ⅱ）由（Ⅰ），知 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$，故 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{\Lambda}| = (n + a - 1)(a-1)^{n-1}$，所以

$$r(\boldsymbol{A}) = \begin{cases} n, & a \neq 1-n \text{ 且 } a \neq 1, \\ n-1, & a = 1-n, \\ 1, & a = 1, \end{cases}$$

故

$$r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & a \neq 1-n \text{ 且 } a \neq 1, \\ 1, & a = 1-n, \\ 0, & a = 1. \end{cases}$$

【注】 ① 设 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{A} = (a-1)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} &= [(a-1)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}]\boldsymbol{\alpha} = (a-1)\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}\\ &= (a-1)\boldsymbol{\alpha} + \lambda\boldsymbol{\alpha} = (a-1+\lambda)\boldsymbol{\alpha},\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应特征值 $a-1+\lambda$ 的特征向量.

事实上，一般地，设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0})$，$f(x)$ 为多项式，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征向量.

② 此题直接求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量较烦琐，将 $\boldsymbol{A}$ 写成 $\boldsymbol{A} = (a-1)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$，利用 $r(\boldsymbol{B}) = 1$ 求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值和特征向量较方便. 秩为 1 的矩阵的特征值和特征向量有结论，见《李林考研数学系列线性代数辅导讲义》.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(7) 解　（Ⅰ）用反证法. 假设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 线性相关，则存在不全为零的常数 k_1,k_2，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

显然 $k_2\neq 0$(若 $k_2=0$，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{\alpha}$ 为非零向量，知 $k_1=0$)，则有 $\boldsymbol{A\alpha}=-\dfrac{k_1}{k_2}\boldsymbol{\alpha}$，这与 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 线性无关.

（Ⅱ）由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},8\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A\alpha})\\&=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})\begin{pmatrix}0&8\\1&2\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&8\\1&2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&8\\1&2\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{B}$. 又由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&-8\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-8=(\lambda+2)(\lambda-4)=0,$$

得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=4$，同时也是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵.

(8) 解　（Ⅰ）由 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，知 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}=0$，即 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为单位正交列向量.

由已知　$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$，

则　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$.

由已知，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为单位正交列向量，所以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，故

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}.$$

所以 $1,-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，又

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}})=1+1=2,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，所以 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，即 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值 $1,-1,0$，从而

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）由 $\boldsymbol{A\gamma}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\gamma}\neq\boldsymbol{0}$，知 $\boldsymbol{\gamma}$ 是特征值 0 对应的特征向量，所以 $0,1,-1$ 分别对应的特征向量为 $\boldsymbol{\gamma},2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$，故

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}.$$

【注】 ① 若 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则 $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(k\neq 0)$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

② 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}$，可得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$.

(9) 解　（Ⅰ）由 $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&2a_{12}&2a_{13}\\1&2a_{22}&2a_{23}\\1&2a_{32}&2a_{33}\end{pmatrix}$，得

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2,\lambda_1=1$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵，故 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0$，即 $x_1+x_2+x_3=0$，解得

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的对应 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_2,k_3 为不全为 0 的任意常数.

（Ⅱ）对 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化，令

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

再单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，使得

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}.$$

(10) 证　(Ⅰ)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是抽象矩阵，用特征值、特征向量的定义证明.

设 λ 是 $\boldsymbol{AB}$ 的任一个特征值，ξ 为 $\boldsymbol{AB}$ 对应的特征向量，则

$$\boldsymbol{AB}\xi=\lambda\xi, \tag{①}$$

① 式左乘 $\boldsymbol{B}$，得 $\boldsymbol{BAB}\xi=\boldsymbol{BA}(\boldsymbol{B}\xi)=\lambda\boldsymbol{B}\xi$.

若 $\boldsymbol{B}\xi\neq\boldsymbol{0}$，上式表明 λ 是 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值，$\boldsymbol{B}\xi$ 为对应的特征向量；

若 $\boldsymbol{B}\xi=\boldsymbol{0}$，则由 $\lambda\xi=\boldsymbol{AB}\xi=\boldsymbol{0}$，又 $\xi\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda=0$，即 $\boldsymbol{AB}$ 有特征值 0，从而 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

又 $|\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{AB}|=0$，即 $|0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|=0$，故 $\boldsymbol{BA}$ 也有特征值 0.

综上所述，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值，知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，得

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P})=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}), \tag{②}$$

令 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=(C_{ij})_{n\times n}$，代入 ② 式，得

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&\cdots&C_{1n}\\C_{21}&C_{22}&\cdots&C_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{n1}&C_{n2}&\cdots&C_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&\cdots&C_{1n}\\C_{21}&C_{22}&\cdots&C_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{n1}&C_{n2}&\cdots&C_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

比较等式两边元素，得 $\lambda_iC_{ij}=C_{ij}\lambda_j(i,j=1,2,\cdots,n)$.

当 $i\neq j$ 时，有 $(\lambda_i-\lambda_j)C_{ij}=0$，而 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 故 $C_{ij}=0$，即

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}C_{11}&&&\\&C_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&C_{nn}\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{B}$ 相似于对角矩阵.

(11) 证　令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，由已知，有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\\&=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

拓展题

解答题

(1) 解　(Ⅰ) 设 $\lambda_3=-1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交，故

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=k-1-k(k+1)+2=0, & ①\\ \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=x_1+(k+1)x_2+2x_3=0, & ②\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=(k-1)x_1-kx_2+x_3=0, & ③\end{cases}$$

由 ① 解得 $k=1$ 或 $k=-1$.

当 $k=1$ 时，由 ②③ 解得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-4,1,1)^{\mathrm{T}}$，且

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(2,-5,3)^{\mathrm{T}}.$$

又由已知 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\beta}=\lambda_0\boldsymbol{\beta}$，两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\beta}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\ |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\beta}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}\boldsymbol{\beta}=-\frac{2}{\lambda_0}\boldsymbol{\beta}(|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2),$$

故 $\boldsymbol{\beta}$ 应是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，但 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 任一个都不共线，即 $\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，所以 $k=1$ 不合题意，舍去.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】领取更多考研资源!

当 $k=-1$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$,且

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-5,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}=(2,5,-1)^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_3$,两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^*$,得 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_3$,即 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_3$,又 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\beta}$,$|\boldsymbol{A}|=-2$,故

$$-2(-\boldsymbol{\beta})=-\boldsymbol{A}^*(-\boldsymbol{\beta}),$$

即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\beta}$,所以 $\lambda_0=2$,$k=-1$.

(Ⅱ)
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&1&-5\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&1&-5\\2&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{7}{5}&-1&-\frac{1}{5}\\-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{5}&\frac{1}{2}&\frac{11}{10}\end{pmatrix},$$

故 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}$.

(2) 解　由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,知 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 有相同的迹,即

$$k+3+(-6)=1+2+(-1),$$

解得 $k=5$. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-2&0\\0&-4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)=0,$$

得 $\boldsymbol{B}$ 的三个不同特征值分别为 $\lambda_1=1$,$\lambda_2=2$,$\lambda_3=-1$,由此可知,$\boldsymbol{B}$ 相似于对角矩阵.

由 $(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(8,3,4)^{\mathrm{T}}$;

由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

又由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,故 $1,2,-1$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

由 $(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$;

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$;

由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-3)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,则

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

综上可得,$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1$,即 $(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})=\boldsymbol{B}$,故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,其中

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&8&1\\0&3&0\\0&4&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{8}{3}&0\\1&-\frac{11}{3}&1\\-1&\frac{1}{3}&2\end{pmatrix}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

李林考研数学系列

第十五章　二次型

基 础 题

一、选择题

(1)B.

解　由 $f=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，知 B 正确.

(2)B.

解　用配方法，

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2x_1^2-2x_1(x_2+x_3)+\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2+\frac{3}{2}x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2-3x_2x_3\\&=2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2^2-2x_2x_3+x_3^2)\\&=2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2.\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3,\\ y_2=x_2-x_3,\\ y_3=x_3,\end{cases}$$

则标准形为 $f=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$.

【注】 ① 下列做法是错误的：

令 $\begin{cases}y_1=x_1-x_2,\\ y_2=x_2-x_3,\\ y_3=x_3-x_1,\end{cases}$ 则标准形为 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

错误原因是矩阵 $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ 是不可逆的，线性变换要求可逆. 由于二次型的秩为 2，所以标准形中没有 y_3 项.

② 此题也可将平方项展开，写出二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值得标准形，注意标准形不唯一.

(3)B.

解　依题意，$\boldsymbol{A}$ 的二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2$ 在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下化为

$$f=2y_1^2+3y_2^2+y_3^2,$$

故该变换为

$$\begin{cases}x_1=0y_1+0y_2+y_3,\\ x_2=y_1+0y_2+0y_3,\\ x_3=0y_1+y_2+0y_3,\end{cases}$$

即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

【注】 ① $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\xrightarrow[\boldsymbol{P}\text{ 可逆}]{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 称为合同变换.

② $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合同 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的正、负惯性指数分别相等，即 $p_{\boldsymbol{A}}=p_{\boldsymbol{B}}$，$q_{\boldsymbol{A}}=q_{\boldsymbol{B}}$.

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

(4) A.

解　$\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列、第 i 行与第 j 行交换，相当于右乘、左乘初等矩阵，即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{i,j}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i,j},$$

又 $\boldsymbol{E}_{i,j}^{-1}=\boldsymbol{E}_{i,j}$，$\boldsymbol{E}_{i,j}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_{i,j}$，故

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{i,j}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i,j}=\boldsymbol{E}_{i,j}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i,j}=\boldsymbol{E}_{i,j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i,j},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价、相似且合同.

(5) A.

解　判定规范形，只要确定二次型的秩及正、负惯性指数，可以通过求二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值来确定.

f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-9)=0$，

得 $\lambda_1=9,\lambda_2=\lambda_3=0$，所以 $r(\boldsymbol{A})=1$，正惯性指数 $p=1$，负惯性指数 $q=0$，故 A 正确.

(6) C

解　二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$，由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&2\\2&\lambda-1&2\\2&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda+3)=0,$$

可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=-3$，故 f 经正交变换的标准形为 $3y_1^2+3y_2^2-3y_3^2$，而 $3y_1^2+3y_2^2-3y_3^2=1$ 表示单叶双曲面.

(7) A.

解　$$f=x^2+(k+2)y^2+kz^2+2xy=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}.$$

二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&k+2&0\\0&0&k\end{pmatrix}$，$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=5$ 化为标准形后为椭球面，则 $r(\boldsymbol{A})=p+0=3$，即 $\boldsymbol{A}$ 的合同标准形的对角元素均为正，用配方法，得

$$x^2+(k+2)y^2+kz^2+2xy=(x+y)^2+(k+1)y^2+kz^2,$$

故 $k+1>0$ 且 $k>0$，得 $k>0$，故 A 正确.

二、填空题

$-2<a<1$.

解　二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&-1\\a&4&2\\-1&2&4\end{pmatrix}$. 由已知，$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式分别为

$$\Delta_1=1>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1&a\\a&4\end{vmatrix}=4-a^2>0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&a&-1\\a&4&2\\-1&2&4\end{vmatrix}=-4(a-1)(a+2)>0,$$

解得 $-2<a<2$ 且 $-2<a<1$，故 $-2<a<1$.

三、解答题

(1) 解　(Ⅰ) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=1$，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,2,1)^{\mathrm{T}}$；

对 $\lambda_3=10$，由 $(10\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 已正交，将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{3}(2,1,2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{3}(-2,2,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^{\mathrm{T}},$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 为正交变换，标准形为

$$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

(Ⅱ) 用配方法.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\begin{aligned}f &= 2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3\\ &= 2x_1^2+4x_1(x_2-x_3)+5x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3\\ &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2-(x_2-x_3)^2]+5x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3\\ &= 2[(x_1+x_2-x_3)^2-(x_2-x_3)^2]+5x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3\\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2-2(x_2-x_3)^2+5x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3\\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3\\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left[x_2^2-\frac{4}{3}x_2x_3+\left(\frac{2}{3}x_3\right)^2-\left(\frac{2}{3}x_3\right)^2\right]+3x_3^2\\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2.\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3,\\ y_2=x_2-\frac{2}{3}x_3,\\ y_3=x_3,\end{cases}$ 矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆，则 $f=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$.

【注】 配方法：“一次一个字母”，即一次配方解决一个字母且线性变换要求可逆.

(2) **解** 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$，则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2).$$

由已知正交变换下的标准形为 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5,$$

所以 $|1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，即 $4-a^2=0$，得 $a=2(a>0)$.

对 $\lambda_1=1$，由 $(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$；

对 $\lambda_2=2$，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$；

对 $\lambda_3=5$，由 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 已两两正交，单位化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}},$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 为所求正交变换.

(3) **证** （充分性） 对 $\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$（因 $\boldsymbol{P}$ 可逆，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解），

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})>\boldsymbol{0}.$$

由二次型正定的定义，知 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定的，故 $\boldsymbol{A}$ 正定.

（必要性） 由 $\boldsymbol{A}$ 正定，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，且存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

取 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

【注】 此题可作为判别 $\boldsymbol{A}$ 是否正定的一个结论.

综合题

一、选择题

(1) A.

解 求正、负惯性指数，可通过标准形（规范形）或特征值得到，已知二次型 f 中没有平方项，先作可逆线性变换产生平方项，再化为标准形或求其矩阵的特征值.

令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\ x_2=y_1-y_2,\\ x_3=y_3,\end{cases}$ 矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆，则

$$f=(y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1-y_2)y_3=y_1^2-y_2^2+y_1y_3-y_2y_3.$$

用配方法化为标准形，得

$$f=\left(y_1+\frac{1}{2}y_3\right)^2-\left(y_2+\frac{1}{2}y_3\right)^2,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

令$\begin{cases} z_1 = y_1 + \dfrac{1}{2}y_3, \\ z_2 = y_2 + \dfrac{1}{2}y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$可逆，故二次型为$f = z_1^2 - z_2^2$，所以$p = 1, q = 1$.

(2) C.

解　首先④是必要条件.

若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，使得$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{B}$，故$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$，且正、负惯性指数不变，即$p_{\boldsymbol{A}} = p_{\boldsymbol{B}}$，反之，若$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$，且$p_{\boldsymbol{A}} = p_{\boldsymbol{B}}$，由于

$$p_{\boldsymbol{A}} + q_{\boldsymbol{A}} = r(\boldsymbol{A}),\ p_{\boldsymbol{B}} + q_{\boldsymbol{B}} = r(\boldsymbol{B}),$$

故$q_{\boldsymbol{A}} = q_{\boldsymbol{B}}$，所以$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同.

③是充分条件.

【注】　存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，使得$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{B}$，称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同，定义中并没有要求$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$是实对称矩阵，但当$\boldsymbol{A}$是实对称阵时，由$(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，即$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，故$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$，说明$\boldsymbol{B}$也是实对称矩阵. 一般情况下，只讨论对称矩阵的正、负惯性指数.

(3) D.

解　令

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz - 2zx - 2xy, \end{aligned}$$

则二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

由$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$，得$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$，即$p_{\boldsymbol{A}} = 2, q_{\boldsymbol{A}} = 0$，故$f$在正交变换下的标准形为$0y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2$，所以曲面为柱面.

【注】　设　　$f(x, y, z) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$.

$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，则$f(x, y, z) = 1$按特征值符号有如下情形：

① 全正，为椭球面(含球面)；

② 两正一负，为单叶双曲面；

③ 两负一正，为双叶双曲面；

④ 两正一零，为椭圆柱面(含圆柱面)；

⑤ 一正一负一零，为双曲柱面；

⑥ 一正两零，为两个平行平面.

(4) A.

解　由正定二次型的定义，可知$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$正定的充分必要条件是对任意$x_1, x_2, \cdots, x_n$，有$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant 0$，其中当且仅当方程组①只有零解时等号成立.

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 = 0, \\ x_2 + a_2 x_3 = 0, \\ \cdots \\ x_n + a_n x_1 = 0. \end{cases} \qquad ①$$

方程组①只有零解的充分必要条件是其系数行列式不为零，即

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0,$$

因此，当$1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$时，对任意不全为0的$x_1, x_2, \cdots, x_n$都有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0,$$

故正定，A正确.

【注】　按第1列展开计算行列式.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

二、填空题

(1) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

解　求规范形的关键是确定正、负惯性指数.

由$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$合同，知$p_{\boldsymbol{A}} = p_{\boldsymbol{B}}, q_{\boldsymbol{A}} = q_{\boldsymbol{B}}$. 由

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -3 \\ 0 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 9) = 0,$$

得 B 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$，故 $p_B = 2, q_B = 1$，即有 $p_A = 2, q_A = 1$，所以规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(2) n.

解　由已知，$Ax = b$ 有唯一解，故 $Ax = 0$ 只有零解.

即 $\forall x \neq 0$，有 $Ax \neq 0$，故 $x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x = (Ax)^{\mathrm{T}}(Ax) > 0$，所以二次型正定，于是二次型的正惯性指数为 n.

【注】　由 $(A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$ 知，$A^{\mathrm{T}}A$ 是对称矩阵.

(3) $-y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.

解　由 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 经正交变换下的标准形，知 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$，且

$$|A| = 1 \times 1 \times (-1) = -1.$$

又 A^* 的特征值为

$$\frac{|A|}{\lambda_1} = -1, \frac{|A|}{\lambda_2} = -1, \frac{|A|}{\lambda_3} = 1,$$

故 $p_{A^*} = 1, q_{A^*} = 2$，所以 $x^{\mathrm{T}}A^*x$ 的规范形为 $-y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.

【注】　①A 是可逆实对称矩阵，则 A^{-1}, A^* 都是实对称矩阵.

②讨论正、负惯性指数时，应掌握惯性定理：二次型 f 经可逆线性变换，其正、负惯性指数不变，且 $p + q = r(f)$，其秩 $r(f)$ 也不变.

三、解答题

(1) 解　(Ⅰ) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

由已知 $p + q = 2 = r(A)$，故 $|A| = -(a-1)^2(a+2) = 0$，解得 $a = 1$ 或 $a = -2$.

当 $a = 1$ 时，$r(A) = 1$，不合题意，故 $a = -2$，所以

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知，二次型为

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3,$$

由配方法，得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_1(x_2 + 2x_3) + (x_2 + 2x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 3x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 3(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 3(x_2 + x_3)^2. \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$ 即 $y = Cx$，其中 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 C 可逆，故

$$x = C^{-1}y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 为所求可逆变换，所以

$$f = x^{\mathrm{T}}Ax \xrightarrow{x = C^{-1}y} (C^{-1}y)^{\mathrm{T}}AC^{-1}y = y^{\mathrm{T}}(C^{-1})^{\mathrm{T}}AC^{-1}y.$$

令 $B = C^{-1}$，则 $B^{\mathrm{T}}AB = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，标准形为 $y_1^2 - 3y_2^2$.

【注】　用配方法求可逆线性变换(不是正交变换)是常用方法.

(2) 解　(Ⅰ) 由已知 $A^*\alpha = 4\alpha$，等式两边同时左乘 A，得 $AA^*\alpha = 4A\alpha$，即

$$|A|\alpha = 4A\alpha, \quad ①$$

故 $A\alpha = \frac{|A|}{4}\alpha$. 又

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=1=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+2+\lambda_3,$$

得 $\lambda_3=-3$，于是有 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-12$.

由①式，得 $\boldsymbol{A\alpha}=-3\boldsymbol{\alpha}$，$\lambda_3=-3$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，令 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$，即 $x_1-2x_3=0$，解得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3)$，得

$$\boldsymbol{A}=(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&4&-3\\2&0&0\\0&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&0\\0&1&-2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 已正交，所以只需将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，为正交矩阵，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 为所求正交变换，标准形为 $2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

(3) 解 （Ⅰ）由已知，齐次线性方程组有非零解，故其系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix}k+3&1&2\\2k&k-1&1\\k-3&-3&k\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k&1&2\\k&k-1&1\\0&-3&k\end{vmatrix}=k(k+1)(k-3)=0,$$

解得 $k=0,-1$ 或 3.

又由于 $\boldsymbol{A}$ 正定，故 $a_{ii}>0$（正定的必要条件），所以 $k=3$，由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-2\\-1&\lambda-3&2\\-2&2&\lambda-9\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-10),$$

可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=10$，全大于 0，故 $k=3$ 为所求.

（Ⅱ）因 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，故存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 化二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 为标准形，于是 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Py}=(\boldsymbol{Py})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Py})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$，所以

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=y_1^2+4y_2^2+10y_3^2\leqslant 10(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=10\times 1=10,$$

即最大值为 10.

(4) 解 （Ⅰ）设 λ_2 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n=0$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_n=(1,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$，即 $x_1+x_n=0$. 解此方程，得 λ_2 对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-2}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

显然，$\lambda_1=1$ 与 λ_2 对应的 $n-1$ 个特征向量已两两正交，则单位化得正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0\\0&0&\cdots&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_2,\cdots,\lambda_2,1)$，于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1+\lambda_2)&0&\cdots&0&\frac{1}{2}(1-\lambda_2)\\0&\lambda_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_2&0\\\frac{1}{2}(1-\lambda_2)&0&\cdots&0&\frac{1}{2}(1+\lambda_2)\end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 正定的充要条件是其特征值全大于 0，故 $\lambda_2>0$.

【注】 证明矩阵是正定矩阵，应先验证其是对称矩阵.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(5) 证 （必要性） 因 A 可逆，取 $B=A^{-1}$，由 A 是实对称矩阵，有

$$AB+B^{\mathrm{T}}A=AA^{-1}+(A^{-1})^{\mathrm{T}}A=E+E=2E.$$

显然 $AB+B^{\mathrm{T}}A$ 是正定的.

（充分性） 由已知 $AB+B^{\mathrm{T}}A$ 正定，根据正定的定义，对 $\forall x\neq 0$，有

$$x^{\mathrm{T}}(AB+B^{\mathrm{T}}A)x>0.$$

而

$$\begin{aligned}x^{\mathrm{T}}(AB+B^{\mathrm{T}}A)x&=x^{\mathrm{T}}ABx+x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Ax=x^{\mathrm{T}}A(Bx)+(Bx)^{\mathrm{T}}Ax\\&=2x^{\mathrm{T}}ABx=2(Ax)^{\mathrm{T}}Bx,\end{aligned}$$

即对 $\forall x\neq 0$，有 $2(Ax)^{\mathrm{T}}Bx>0$，故 $Ax\neq 0$，所以 A 可逆.

拓展题

解答题

(1) 解 （Ⅰ）$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$\begin{aligned}&=(n-1)x_1^2+(n-1)x_2^2+\cdots+(n-1)x_n^2-2x_1x_2-2x_1x_3-\cdots-\\&\quad 2x_1x_n-2x_2x_3-\cdots-2x_2x_n-\cdots-2x_{n-1}x_n,\end{aligned}$$

故二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}n-1&-1&-1&\cdots&-1&-1\\-1&n-1&-1&\cdots&-1&-1\\-1&-1&n-1&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&n-1&-1\\-1&-1&-1&\cdots&-1&n-1\end{pmatrix},$$

注意到 A 的各行元素之和均为 0，利用初等变换得

$$A\to\begin{pmatrix}n-1&-1&-1&\cdots&-1&0\\-1&n-1&-1&\cdots&-1&0\\-1&-1&n-1&\cdots&-1&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&n-1&0\\-1&-1&-1&\cdots&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}n&0&0&\cdots&0&0\\0&n&0&\cdots&0&0\\0&0&n&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n&0\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $r(A)=n-1$.

（Ⅱ）由 $|\lambda E-A|=0$，解得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=n,\lambda_n=0$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=n$，解 $(nE-A)x=0$，得 A 的特征向量为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\alpha_{n-1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

对 $\lambda_n=0$，解 $(0E-A)x=0$，得 A 的特征向量为 $\alpha_n=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则 P 可逆，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

由于 A 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=n>0,\ \lambda_n=0,$$

故二次型的正惯性指数为 $n-1$.

【注】 $A=nE+\begin{pmatrix}-1&-1&\cdots&-1&-1\\-1&-1&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&-1&\cdots&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{记}=nE+B$，其中 $r(B)=1$.

求 A 的特征值、特征向量时，可利用秩为 1 的矩阵的特征值、特征向量的结论，见《李林考研数学系列线性代数辅导讲义》.

(2) 解 （Ⅰ）由二次型在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $-y_1^2+2y_2^2+ay_3^2$，知矩阵 A 的特征值分别为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=a$.

又由 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=(-1)\times 2\times a=-4$，得 $a=2$.

（Ⅱ）由正交矩阵 Q 的第 1 列为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$，可知特征值 $\lambda_1=-1$ 对应的特征向量为 $\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 是 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的特征向量，则由

$$\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha=x_1+x_2+x_3=0,$$

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

解得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $\lambda_2=\lambda_3$ 对应的特征向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ 为所求的正交矩阵.

(3) 解　（Ⅰ）由 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，知

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2=1,\\ \left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2=1,\\ \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1,\end{cases}$$

得 $\begin{cases}b=1,\\ c=\sqrt{2},\\ a=\pm 1.\end{cases}$ 当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列与第 3 列不正交，故 $a=-1$.

综上所述，$a=-1,b=1,c=\sqrt{2}$.

（Ⅱ）由已知，f 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $2y_2^2+2y_3^2$.

令 $\begin{cases}z_1=y_1,\\ z_2=\sqrt{2}y_2,\\ z_3=\sqrt{2}y_3,\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，故

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$ 为所求的一个可逆线性变换，规范形为 $z_2^2+z_3^2$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

概率统计

李林考研数学系列

第十六章　随机事件及其概率

基础题

一、选择题

(1) D.

解　依题设，$AB \subset C$，故

$$1 \geqslant P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \geqslant P(A) + P(B) - P(C),$$

即 $P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$.

仅由 $AB \subset C$，不能推出 $P(C) = P(AB)$ 和 $P(C) = P(A \cup B)$.

(2) B.

解　由 $P(AB) = 0$，得 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A)$.

(3) A.

解　由 $P(A \mid B) = P(A)$ 知，A, B 相互独立，故 C 正确，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立，D 正确.

因 $P(A) > 0, P(B) > 0$，且 A, B 相互独立，知 A, B 必不互不相容，即相容，故 B 正确.

【注】　① 若 $P(A) > 0, P(B) > 0$，则当 A, B 独立时，有 $AB \neq \varnothing$，即 A, B 相容. 当 $AB = \varnothing$ 时，有 A 与 B 不独立(见《李林考研数学系列概率论与数理统计辅导讲义》第一章).

简单地说，在 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 的条件下，A, B 相互独立与 A, B 互不相容不能同时成立.

②A, B 相互独立且其概率均大于零，则

$$\begin{aligned} & P(B \mid A) = P(B) \Leftrightarrow P(\overline{B} \mid A) = P(\overline{B}) \\ \Leftrightarrow & P(\overline{A} \mid B) = P(\overline{A}) \\ \Leftrightarrow & P(\overline{A} \mid \overline{B}) = P(\overline{A}). \end{aligned}$$

(4) B.

解　由 A, B, C 相互独立，知 $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$ 相互独立，$\overline{A \cup B}$ 与 C 相互独立，$\overline{A - B}$ 与 $\overline{C}$ 相互独立，故排除 A, C, D.

【注】　事件 A, B, C 相互独立，“不重叠分组，各自运算后仍独立”(见《李林考研数学系列概率论与数理统计辅导讲义》第一章).

(5) B.

解　由 $1 - P(\overline{A} \mid \overline{B}) = P(A \mid \overline{B})$，知 $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$，即

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)},$$

故可得，$P(AB) = P(A)P(B)$，即 A, B 相互独立.

(6) B.

解　由 $A \subset B$，得 $AB = A, P(B) \leqslant 1$，故

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geqslant P(A),$$

B 正确.

当 $P(B) = 1$ 时，A 不正确；当 $P(B) < 1$ 时，C, D 不正确.

(7) C.

解　由 $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$，得 $\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)}$，故 $P(AB) = P(A)P(B)$，此时，A, B 相互独立，所以

$$P(A \mid B) = P(A), P(\overline{A} \mid B) = P(\overline{A}).$$

由于 $0 < P(A) < 1$，所以选项 A, B 不一定成立.

二、填空题

(1) $\frac{1}{2}$.

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

解　由已知，得　$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，

又 $P(AB)=P(B)P(A\mid B)$，知 $P(B)=\frac{1}{3}$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

(2)0.

解　由已知，$P(A)\geqslant 0$，$P(B)\geqslant 0$，$P(AB)=P(A)P(B)=0$，故 $P(A)$，$P(B)$ 中至少有一个为 0，所以 $\min\{P(A),P(B)\}=0$.

(3) $\frac{5}{8}$.

解　由 $ABC\subset AB$，知 $P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，所以 $P(ABC)=0$，故所求概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

(4) $\frac{1}{3}$.

解　由条件概率公式，有 $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}$. 又

$$\begin{aligned}P(B)&=P(AB\cup\overline{A}B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})\\&=0.1\times 0.9+(1-0.1)\times 0.2=0.27,\end{aligned}$$

故 $P(A\mid B)=\frac{1}{3}$.

【注】　$B=\Omega\cdot B=(A+\overline{A})B=AB+\overline{A}B$，$\Omega$ 表示全集，且 AB 与 $\overline{A}B$ 互不相容.

(5) $\frac{1}{4}$.

解　由条件概率公式，有

$$\begin{aligned}P(B\mid A\cup\overline{B})&=\frac{P(B\cap(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P\big((AB)\cup(B\overline{B})\big)}{P(A\cup\overline{B})}\\&=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(A)-P(A\overline{B})}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}\\&=\frac{P(A)-P(A-B)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A-B)}=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(6) $\frac{1}{3}$.

解　依题设，本题为伯努利概型.

设每次试验中事件 A 发生的概率为 p，事件 A 发生的次数为 $k(k=0,1,\cdots,n)$，则 A 至少发生一次的概率 $P\{k\geqslant 1\}=1-(1-p)^n$，解得

$$p=1-\sqrt[n]{1-P\{k\geqslant 1\}}.$$

由已知，$P\{k\geqslant 1\}=\frac{19}{27}$，$n=3$，故 $p=1-\sqrt[3]{1-\frac{19}{27}}=\frac{1}{3}$.

(7) $\frac{2}{9}\left(1+\ln\frac{9}{2}\right)$.

解　设事件

$$A=\left\{(x,y)\mid xy\leqslant\frac{2}{9},0<x<1,0<y<1\right\},$$

$$D=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\},$$

则事件 A 的样本位于区域 D_1 中，如图 16-1 阴影部分所示，由几何概型公式 $P(A)=\frac{S_{D_1}}{S_D}=\frac{2}{9}\times 1+\int_{\frac{2}{9}}^{1}\frac{2}{9x}\mathrm{d}x=\frac{2}{9}\left(1+\ln\frac{9}{2}\right)$.

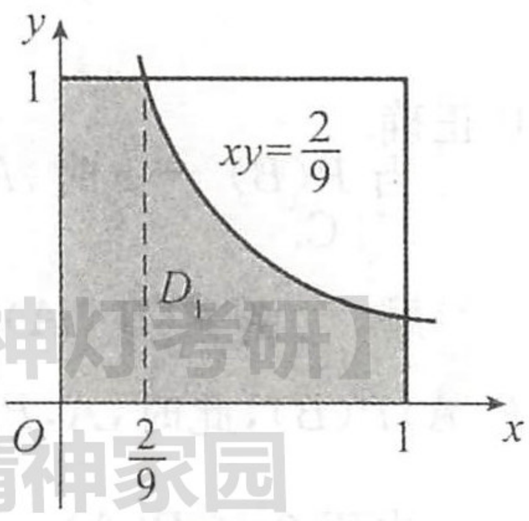


图 16-1

(8) $5p^2(1-p)^4$.

解　依题设，可知第 6 次射击命中且前 5 次射击恰好命中 1 次，故前 5 次射击中恰有 1 次命中的概率为 $C_5^1p(1-p)^4=5p(1-p)^4$，第 6 次射击恰好第 2 次命中的概率为 $p\cdot 5p(1-p)^4=5p^2(1-p)^4$.

微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451
微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

三、解答题

(1) 解　(Ⅰ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$
$= 0.4 + 0.3 - 0.4 \times 0.3 = 0.58.$

(Ⅱ) $$P(C \mid A \cup B) = \frac{P[C(A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(BC)}{P(A \cup B)}$$
$$= \frac{P(C)P(B \mid C)}{P(A \cup B)} = \frac{0.4 \times 0.2}{0.58} \approx 0.138.$$

(Ⅲ) $$P(AB \mid \overline{C}) = \frac{P(AB\,\overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(AB)}{1 - P(C)}$$
$$= \frac{P(A)P(B)}{1 - P(C)} = \frac{0.4 \times 0.3}{1 - 0.4} = 0.2.$$

(2) 解　(Ⅰ) n 个事件全不发生，即 n 个事件的对立事件同时发生，故
$$P(A) = P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n) = \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A}_k) = \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k).$$
(Ⅱ) n 个事件不全发生，即 n 个事件中至多有 $n-1$ 个发生，故
$$P(B) = 1 - P\{A_1 A_2 \cdots A_n\} = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(A_k) = 1 - \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

(Ⅲ) $$P(C) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k\Big) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k).$$

(3) 解　设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次命中}\}(i = 1,2,3)$，$B$ 为恰有一次命中，C 为至少有一次命中，则 $B = A_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\,A_2\,\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\,\overline{A}_2 A_3$，$C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

(Ⅰ) 由已知，A_1, A_2, A_3 相互独立且互不相容，故
$$P(B) = P(A_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 A_2\,\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2 A_3)$$
$$= P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)$$
$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.36.$$

(Ⅱ) $$P(C) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) = 1 - P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3)$$
$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 1 - 0.6 \times 0.5 \times 0.3 = 0.91.$$

(4) 证　由 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$，而 $P(AB) \geqslant 0$，故
$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B).$$
而 $AB \subset A \cup B$，所以 $P(AB) \leqslant P(A \cup B)$. 又由
$$1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) = 1 - [1 - P(A)] - [1 - P(B)]$$
$$= P(A) + P(B) - 1 = P(AB) + P(A \cup B) - 1$$
$$= P(AB) - [1 - P(A \cup B)] \leqslant P(AB).$$
综上所述，命题得证.

综合题

一、选择题

(1) D.

解　设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 题答对}\}$，则 $P(A_i) = \frac{1}{2}(i = 1,2,\cdots,5)$，由于是随机选择，故
$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\Big) = 1 - P\Big(\bigcap_{i=1}^{5} \overline{A}_i\Big) = 1 - \prod_{i=1}^{5} P(\overline{A}_i) = 1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^5 = \frac{31}{32}.$$

(2) B.

解　此问题是几何概型.

设折得的三段长度依次为 $x, L-x-y, y$，则样本空间为
$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant y \leqslant L, 0 \leqslant x + y \leqslant L\}.$$
事件 A 相应的子区域 Ω_1，应满足 $0 < x < L - x - y$，$0 < y < L - x - y$，即
$$\Omega_1 = \{(x,y) \mid 0 < y < L - 2x, 0 < y < \frac{1}{2}(L - x)\},$$

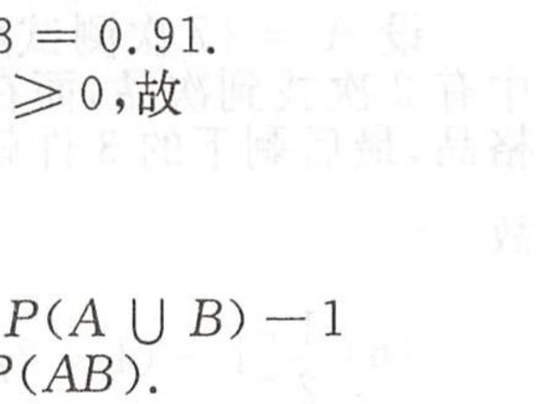


图 16-2

如图 16-2 所示，可知 Ω 的面积为 $\frac{1}{2}L^2$，Ω_1 的面积为 $\frac{1}{6}L^2$，故 $P(A) = \dfrac{\frac{1}{6}L^2}{\frac{1}{2}L^2} = \frac{1}{3}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

二、填空题

(1) $\frac{4}{7}$.

解　设 $A=\{$甲射击一次命中目标$\}$, $B=\{$乙射击一次命中目标$\}$,由已知,所求概率为 $P(B\mid A\cup B)=\frac{P(B(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)}{P(A\cup B)}$,其中 $A\cup B$ 表示目标被命中. 又

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$
$$=0.5+0.4-0.5\times 0.4=0.7,$$

故 $P(B\mid A\cup B)=\frac{0.4}{0.7}=\frac{4}{7}$.

(2)1, 0.7.

解　由 $P(A)+P(B)=0.5+0.7>1$,此时 $AB\neq\varnothing$,所以 $P(AB)$ 的最小值为 0.2,故 $P(A\cup B)$ 的最大值为 1. 又当 $A\subset B$ 或 $A\supset B$,会使 $A\cup B$ 最小,本题应取 $A\subset B$,故 $P(A\cup B)=P(B)=0.7$ 为最小值.

(3)2.

解　由 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$,知 $(AB)(\overline{A}\,\overline{B})=A\overline{A}B\,\overline{B}=\varnothing$,而 $(AB)(\overline{A}\,\overline{B})=AB=\overline{A}\,\overline{B}$,所以 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$. 又由对偶律 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}=\varnothing$,故 $A\cup B=\Omega$(Ω 表示全集),从而 A 与 B 为对立事件(因 $AB=\varnothing$),于是 $A=\overline{B}$, $\overline{A}=B$,故 $P(\overline{A}\mid B)+P(A\mid\overline{B})=2$.

(4)$4p^2(1-p)^3$.

解　令 $A=\{$试验成功 2 次之前已经失败 3 次$\}$, $A_5=\{$第 5 次试验成功$\}$, $B_3=\{$试验 4 次失败 3 次$\}$.

依题设, A_5 与 B_3 独立,且 $A=A_5B_3$,而

$$P(B_3)=C_4^1p(1-p)^3=4p(1-p)^3,\ P(A_5)=p,$$

故
$$P(A)=P(A_5B_3)=P(A_5)\cdot P(B_3)=4p^2(1-p)^3.$$

(5) $\frac{2}{15}$.

解　用古典概型计算.

测试 7 次,就是从 10 件手机中不放回地抽取 7 件,故基本事件总数为 A_{10}^7.

设 $A=\{$7 次测试后 3 个次品都已找到$\}$,故存在两种情况:第一种情况是在前 6 次测试中有 2 次找到次品,而在第 7 次测试时找到最后一个次品;第二种情况是前 7 次测试均为合格品,最后剩下的 3 件就是次品. 所以 A 所包含的基本事件数为 $C_6^2\cdot C_4^4\cdot A_7^4\cdot 3!+C_7^7\cdot 7!$,

故
$$P(A)=\frac{C_6^2\cdot C_4^4\cdot A_7^4\cdot 3!+C_7^7\cdot 7!}{A_{10}^7}=\frac{2}{15}.$$

(6) $\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$.

解　设 $A_1=\{n$ 次试验中 A 出现奇数次$\}$, $A_2=\{n$ 次试验中 A 出现偶数次$\}$,则

$$P(A_1)=C_n^1pq^{n-1}+C_n^3p^3q^{n-3}+C_n^5p^5q^{n-5}+\cdots,$$
$$P(A_2)=C_n^0p^0q^n+C_n^2p^2q^{n-2}+C_n^4p^4q^{n-4}+\cdots,$$

其中 $q=1-p$,故
$$P(A_1)+P(A_2)=(p+q)^n=1,$$
$$P(A_2)-P(A_1)=(q-p)^n=(1-2p)^n,$$

两式相减,得所求概率为 $P(A_1)=\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$.

三、解答题

(1) 解　(Ⅰ)设 $A_i=\{$第 i 次取得红球$\}(i=1,2,3)$, $B_j=\{$第 j 次掷硬币出现正面$\}(j=1,2,3)$.

依题设,易知 B_j 为第 j 次从甲盒中取球. 将“掷一次硬币,再由硬币出现的结果从相应的盒中取出”看作一次试验,则每次试验是重复的,且相互独立,所以它们的结果 A_1, A_2, A_3 是相互独立的,且
$$P(A_i)=P(A_1),i=1,2,3,$$
故所求概率为 $P(A_3\mid A_1A_2)=P(A_3)=P(A_1)$.

又由全概率公式,得

$$P(A_1)=P(B_1)P(A_1\mid B_1)+P(\overline{B_1})P(A_1\mid\overline{B})$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{2},$$

故 $P(A_3\mid A_1A_2)=\frac{1}{2}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

（Ⅱ）由于两次试验是独立重复的，所以 A_1B_1 与 A_2B_2 是相互独立的，且

$$P(A_2B_2)=P(A_1B_1)=P(B_1)P(A_1\mid B_1)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3}.$$

由条件概率公式，得

$$P(B_1B_2\mid A_1A_2)=\frac{P(A_1A_2B_1B_2)}{P(A_1A_2)}=\frac{P(A_1B_1)P(A_2B_2)}{P(A_1)P(A_2)}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{9}.$$

(2) 解　设 $X=\{$抽取 20 个样品中的次品数$\}$，则 $X\sim B(20,0.15)$. 所求问题是，当 k 为多少时，$P\{X=k\}=C_{20}^k\times0.15^k\times(1-0.15)^{20-k}(k=0,1,\cdots,20)$ 最大.

设当 $k=k_0$ 时，$P\{x=k\}$ 最大，则有

$$P\{X=k_0\}\geqslant P\{X=k_0-1\},\ P\{X=k_0\}\geqslant P\{X=k_0+1\},$$

考虑任意两项的比值，

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=\frac{C_{20}^k\times0.15^k\times0.85^{20-k}}{C_{20}^{k-1}\times0.15^{k-1}\times0.85^{20-k+1}}=\frac{(20-k+1)\times0.15}{0.85\times k},$$

则 $P\{X=k\}\geqslant P\{X=k-1\}$，当且仅当 $k\leqslant(20+1)\times0.15=3.15$.

同理，$P\{X=k\}\geqslant P\{X=k+1\}$，当且仅当 $k\geqslant(20+1)\times0.15-1=2.15$，故当 $P\{X=k\}$ 最大时，$k=3$，且 $P\{X=3\}=C_{20}^3\times0.15^3\times0.85^{17}\approx0.242\,8$.

【注】　本题是求二项分布中最大可能目标数，一般结论是：若 $X\sim B(n,p)$，如果 $(n+1)p$ 不是整数，则当 $k=[(n+1)p]$（向下取整）时，$P\{X=k\}$ 取得最大值；如果 $(n+1)p$ 是整数，则当 $k=(n+1)p$ 或 $k=(n+1)p-1$ 时，$P\{X=k\}$ 取得最大值.

如本题，$[(20+1)\times0.15]=[3.15]=3$.

拓展题

解答题

(1) 解　（Ⅰ）设 $A=\{$取出的是白球$\}$，$B_i=\{$取到第 i 只盒子$\}$，$i=1,2,3$.

依题设，$P(B_i)=\frac{1}{3}$，由全概率公式，得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)=\frac{5}{12}.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）及贝叶斯公式，得

$$P(B_3\mid A)=\frac{P(B_3)P(A\mid B_3)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}{\frac{5}{12}}=\frac{8}{25}.$$

(2) 解　令 $A_i=\{$第一次取出的数为 $i\}$，$i=1,2,\cdots,n$，$B=\{$取出的第二个数比第一个数大$\}$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组.

由于在 A_i 发生的条件下，第二个数只能取到余下的 $n-1$ 个数之一，且只有它取到后 $n-i$ 个数时，B 才发生，故 $P(B\mid A_i)=\frac{n-i}{n-1}$，$i=1,2,\cdots,n$.

又 $P(A_i)=\frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$，由全概率公式，有

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n-i}{n-1}\\&=\frac{1}{n(n-1)}[(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0]\\&=\frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【注】　由于此题所求事件较复杂，故不易直接用古典概型计算，但通过全概率公式所得结果与直觉是吻合的.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

第十七章 随机变量及其分布

基础题

一、选择题

(1) A.

解 要使 $F(x)$ 为某一随机变量的分布函数,必须有 $F(+\infty)=1$. 又由已知,$F_1(+\infty)=1$,$F_2(+\infty)=1$,故 $a-b=1$,即只要 a,b 的取值满足 $a-b=1$ 即可.

(2) B.

解 考虑到 $f(-x)=f(x)$,知 $f(x)$ 为偶函数,故

$$F(-k)=\int_{-\infty}^{-k}f(x)\mathrm{d}x=\int_{k}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{-k}f(x)\mathrm{d}x+\int_{k}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-k}^{k}f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\left[1-\int_{-k}^{k}f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}-\int_{0}^{k}f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) B.

解 $F(x)$ 要成为某一随机变量的分布函数,必满足以下三个条件:

①$0\leqslant F(x)\leqslant 1$, $F(+\infty)=1$, $F(-\infty)=0$;

②$F(x)$ 是单调不减函数;

③$F(x)$ 右连续,即 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=F(a)$.

只有选项 B 满足以上三个条件,而 A,C 中 $F(x)$ 不满足 $F(+\infty)=1$,D 中 $F(x)$ 不一定单调不减.

(4) B.

$F(x)=P\{X\leqslant x\}$,对任意实数 x,$F(x+0)=F(x)$(右连续). 又

$$P\{X=x\}=F(x)-F(x-0),$$

故 $P\{X=x\}=0\Leftrightarrow F(x)-F(x-0)=0\Leftrightarrow F(x-0)=F(x)\Leftrightarrow F(x)$ 在 x 处连续.

(5) C.

解

$$p_1=P\{X\leqslant\mu-4\}=P\left\{\frac{X-\mu}{4}\leqslant-1\right\}=\Phi(-1),$$

$$p_2=P\{Y\geqslant\mu+5\}=P\left\{\frac{Y-\mu}{5}\geqslant 1\right\}=1-\Phi(1)=\Phi(-1),$$

故 $p_1=p_2$,与 μ 取值无关.

(6) C.

解 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$,故

$$P\{|X-\mu|<\sigma\}=P\left\{\frac{|X-\mu|}{\sigma}<1\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1),$$

与 μ,σ 取值无关,故 C 正确.

(7) A.

解 由 $f(1-x)=f(1+x)$,知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称,如图 17-1 所示,

$$F(0)=P\{X\leqslant 0\}=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x=0.5-0.4=0.1,$$

故 A 正确.

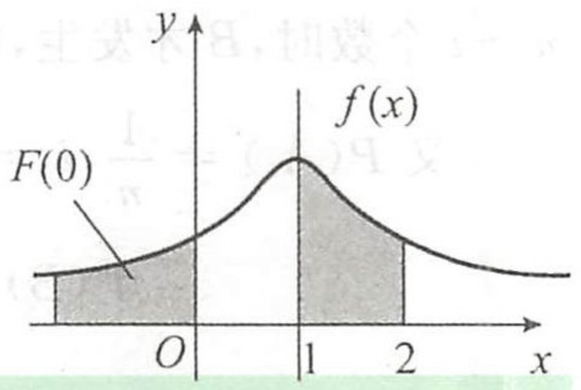


图 17-1

【注】 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a-x)=f(a+x)$.

二、填空题

(1) $\mathrm{e}^{-8\lambda}$.

解 利用指数分布的无记忆性,得 $P\{X>16\mid X>8\}=P\{X>8\}=\mathrm{e}^{-8\lambda}$.

【注】 指数分布的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 无记忆性是指:

$$P\{X>m+n\mid X>m\}=P\{X>n\}(m,n\text{ 均大于 }0).$$

(2) 0.8.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

解　由 $X\sim N(2,\sigma^2)$，知 X 的概率密度曲线 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\sigma^2}}$ 关于直线 $x=2$ 对称，

因此　$P\{X<2\}=P\{X\geqslant 2\}=0.5$，$P\{0<X<2\}=P\{2\leqslant X<4\}=0.3$，

故　$P\{X>0\}=1-P\{X\leqslant 0\}=1-\big(P\{X<2\}-P\{0<X<2\}\big)$

$=1-0.5+0.3=0.8.$

(3)$\Phi(1)$.

解　由已知，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，在 $x=\mu=1$ 处，$f(x)$ 取得最大值

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}},$$

故 $\mu=1,\sigma=2$，即 $X\sim N(1,4)$，所以 $P\{X<3\}=P\left\{\dfrac{X-1}{2}<1\right\}=\Phi(1)$.

(4)$e^{-\lambda t}$.

解　$\{Y>t\}$ 表示相继两次故障之间的时间间隔超过 t，故在时长为 t 的时间间隔内没有发生故障，所以 $P\{Y>t\}=P\{X=0\}$，而 X 是服从参数 λt 的泊松分布，故

$$P\{Y>t\}=P\{X=0\}=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}.$$

(5)$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$

解　由 $Y=|X|$ 取值非负，故当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y>0$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{|X|\leqslant y\}=P\{-y\leqslant X\leqslant y\}$$

$$=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\int_0^y\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

于是

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

三、解答题

(1) 解　(Ⅰ)分布函数的定义：$F(x)=P\{X\leqslant x\}$.

当 $x<-1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $-1\leqslant x<1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=-1\}=0.2$；

当 $1\leqslant x<2$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=0.2+0.3=0.5$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{\Omega\}=1$，故

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.2, & -1\leqslant x<1,\\ 0.5, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

(Ⅱ)$P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}=1-P\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}=1-F\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-0.2=0.8.$

(Ⅲ)$P\{-1\leqslant X\leqslant 2\}=P\{X=-1\}+P\{-1<X\leqslant 2\}$

$=P\{X=-1\}+F(2)-F(-1)=0.2+1-0.2=1.$

(2) 解　(Ⅰ)由分布函数 $F(x)$ 的性质，有

$$F(-a+0)=F(-a),\ F(a+0)=F(a),$$

得 $k_1=\dfrac{1}{2}$，$k_2=\dfrac{1}{\pi}$.

(Ⅱ)　$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<a,\\ 0, & |x|\geqslant a.\end{cases}$$

(Ⅲ)$P\left\{|X|<\dfrac{a}{2}\right\}=P\left\{-\dfrac{a}{2}<X<\dfrac{a}{2}\right\}=F\left(\dfrac{a}{2}\right)-F\left(-\dfrac{a}{2}\right)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{3}.$$

(3) 解　由已知，X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}(\lambda>0)$，令 Y 为对 X 作三

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

次独立重复观察中,事件$\{X>3\}$发生的次数,则$Y\sim B(3,p)$,且

$$p=P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-3\lambda}.$$

依题设,$$P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-p)^3=\frac{26}{27},$$

故$p=\frac{2}{3}$,由$p=\frac{2}{3}=e^{-3\lambda}$,得$\lambda=-\frac{1}{3}\ln\frac{2}{3}$.

(4)解　用定义法求分布函数$F_Y(y)$,$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\left\{\frac{1}{X}\leqslant y\right\}$.

当$y<0$时,$F_Y(y)=P\{\frac{1}{X}\leqslant y<0\}=P\{\frac{1}{y}\leqslant X<0\}=\int_{\frac{1}{y}}^{0}0dy=0$;

当$0<\frac{1}{y}<1$,即$y>1$时,

$$F_Y(y)=P\left\{\frac{1}{X}\leqslant y\right\}=P\left\{X\geqslant\frac{1}{y}\right\}=1-P\left\{X<\frac{1}{y}\right\}=1-\int_0^{\frac{1}{y}}3x^2dx=1-\frac{1}{y^3};$$

当$\frac{1}{y}>1$,即$0<y<1$时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{Y\leqslant 0\}+P\{0<Y\leqslant y\}\\&=P\{0<\frac{1}{X}\leqslant y\}=P\{X\geqslant\frac{1}{y}\}\\&=1-P\{X<\frac{1}{y}\}=1-(\int_0^1 3x^2dx+\int_1^{\frac{1}{y}}0dx)=0,\end{aligned}$$

故
$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\frac{1}{y^3}, & y>1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{3}{y^4}, & y>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(5)解　由已知,$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$,$y=-2\ln x$在$(0,1)$内单调减少,有反函数$x=e^{-\frac{y}{2}}$,用公式有$f_Y(y)=\begin{cases}f(e^{-\frac{y}{2}})\left|(e^{-\frac{y}{2}})'\right|, & 0<e^{-\frac{y}{2}}<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(6)解　用定义法,Y的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\sqrt[3]{X}\leqslant y\}\\&=P\{X\geqslant(1-y)^3\}=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}\\&=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{(1-y)^3}^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(1-y)^3\right],\end{aligned}$$

Y的概率密度为　$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6}.$$

综合题

一、选择题

(1)A.

解　$f(x)$作为随机变量的概率密度,必须满足:①$f(x)\geqslant 0$;②$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$.

对于A,$f(1-x)\geqslant 0$且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(1-x)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(1-x)d(1-x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1,$$

故A正确.

对于B,$\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{x}{2}\right)d\left(\frac{x}{2}\right)=2\neq 1$.

对于C,D,$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)dx$与$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x^2)dx$都不为1.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研　客服微信:KYFT104　QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(2) C.

解　依题设，有 $p_1 = P\{-2 \leqslant X_1 \leqslant 2\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$，

$$p_2 = P\{-2 \leqslant X_2 \leqslant 2\} = P\left\{-1 \leqslant \frac{X_2 - 0}{2} \leqslant 1\right\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1,$$

$$p_3 = P\{-2 \leqslant X_3 \leqslant 2\} = P\left\{-\frac{7}{3} \leqslant \frac{X_3 - 5}{3} \leqslant -1\right\} = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right),$$

又 $\Phi(x)$ 单调增加，所以 $p_1 = 2\Phi(2) - 1 > 2\Phi(1) - 1 = p_2$.

而 $\Phi(1) - \Phi(-1) > 0.68$，故

$$p_2 = \Phi(1) - \Phi(-1) > 0.68 > 0.5 = \Phi(0) > \Phi(-1) > p_3,$$

所以 C 正确.

【注】　根据 3σ 准则，可知 $\Phi(1) - \Phi(-1) > 0.68$.

(3) B.

解　若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

当 $X = \mu$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$，显然，$f(x)$ 的最大值与 μ 无关，故当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时，$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

当 $\sigma = 1$ 时，$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < 1$，从而 $0 \leqslant f(x) < 1$，故 B 正确.

当 $\sigma < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 时，$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} > 1$，所以 A，C，D 不正确.

二、填空题

(1) $\mu, \frac{1}{2}$.

解　由 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则其概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，则

$$F''(x_0) = f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-(x_0-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{-2(x_0 - \mu)}{2\sigma^2} = 0,$$

故 $x_0 = \mu$，$F(x_0) = y_0 = \frac{1}{2}$.

(2) 1.

解
$$\begin{aligned} F(\mu - x\sigma) + F(\mu + x\sigma) &= P\{X \leqslant \mu - x\sigma\} + P\{X \leqslant \mu + x\sigma\} \\ &= P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leqslant -x\right\} + P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leqslant x\right\} \\ &= \Phi(-x) + \Phi(x) = [1 - \Phi(x)] + \Phi(x) = 1. \end{aligned}$$

(3) $1 - 3e^{-2}$.

解　由已知，　$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \cdots,$

依题设，$\lambda e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$，解得 $\lambda = 2$，$\lambda = 0$（舍去），所以

$$\begin{aligned} P\{X > 1\} &= 1 - P\{X \leqslant 1\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} \\ &= 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - 3e^{-2}. \end{aligned}$$

(4) $\frac{1}{5}$.

解　依题设，

$$P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1} p = pq^{k-1} \left(q = 1 - p = \frac{1}{4}\right),$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X = 2n\} = pq + pq^3 + \cdots + pq^{2n-1} + \cdots$$

$$= pq \cdot \frac{1}{1 - q^2} = \frac{q}{1 + q} = \frac{1}{5}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

(5) e.

解　由分布律的性质,有 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=1$,故

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a}{k!}e^{-2}=ae^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=ae^{-2}\cdot e=ae^{-1}=1,$$

所以 $a=e$.

【注】 ① $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x(-\infty<x<+\infty)$.

② 泊松分布 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots$,可知,当 $\lambda=1$ 时,有 $P\{X=k\}=\frac{1}{k!}e^{-1}$,对照已知条件,得 $a=e$.

(6) $\frac{a^2-b^2}{2(\ln a-\ln b)}$.

解　依题意,有 $\frac{X-0}{\sigma}\sim N(0,1)$,故

$$P\{a<X<b\}=P\left\{\frac{a}{\sigma}<\frac{X}{\sigma}<\frac{b}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\frac{b}{\sigma}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\int_{-\infty}^{\frac{a}{\sigma}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right]\xlongequal{\text{记}}f(\sigma),$$

所以
$$f'(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(-\frac{b}{\sigma^2}\right)-e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(-\frac{a}{\sigma^2}\right)\right].$$

令 $f'(\sigma)=0$,得 $be^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}=ae^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$,取对数,得 $\ln b+\frac{-b^2}{2\sigma^2}=\ln a+\frac{-a^2}{2\sigma^2}$,解得

$$\sigma^2=\frac{a^2-b^2}{2(\ln a-\ln b)}.$$

(7) $1-\frac{1}{e}$.

解法 1　利用指数分布的无记忆性进行计算.

由于 $X\sim e(1)$,且当 $s,t>0$ 时,有 $P\{X>s+t\mid X>t\}=P\{X>s\}$,故

$$P\{X\leqslant k+1\mid X>k\}=1-P(X>k+1\mid X>k)=1-P\{X>1\}$$

$$=1-e^{-1}=1-\frac{1}{e}.$$

解法 2　直接利用条件概率进行计算.

$$P\{X\leqslant k+1\mid X>k\}=1-P\{X>k+1\mid X>k\}=1-\frac{P\{X>k+1,X>k\}}{P\{X>k\}}$$

$$=1-\frac{P\{X>k+1\}}{P\{X>k\}}=1-\frac{\int_{k+1}^{+\infty}e^{-t}dt}{\int_{k}^{+\infty}e^{-t}dt}=1-\frac{e^{-(k+1)}}{e^{-k}}=1-\frac{1}{e}.$$

三、解答题

(1) 解　由已知,X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $y=1-e^{-2x}$ 是单调增加函数,其反函数为 $x=-\frac{\ln(1-y)}{2}$.

令 $G(y)$ 是 Y 的分布函数,则

$$G(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-e^{-2X}\leqslant y\}$$

$$=\begin{cases}0, & y<0,\\ P\left\{X\leqslant-\frac{\ln(1-y)}{2}\right\}, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$$

$$g_Y(y)=G'(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

即 Y 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号: 神灯考研　客服微信: KYFT104　QQ群: 118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

【注】 结论：设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，且严格单调增加，则 $Y=F(X)$ 服从均匀分布（见《李林考研数学系列概率论与数理统计辅导讲义》第二章）.

(2) 解　$Y=\sin X$ 的值域为 $[-1,1]$.

当 $-1\leqslant y<1$ 时，

$$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\sin X\leqslant y\}=P\{X\in D\},$$

其中 $$D=\{x\mid \sin x\leqslant y\}=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}[2k\pi-\pi-\arcsin y,\ 2k\pi+\arcsin y],$$

故 $$F(y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2k\pi-\pi-\arcsin y}^{2k\pi+\arcsin y}f(x)\mathrm{d}x.$$

当 $y<-1$ 时，$F(y)=0$；当 $y\geqslant 1$ 时，$F(y)=1$. Y 的概率密度为 $f_Y(y)=F'(y)$，即

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left[f(2k\pi+\arcsin y)+f(2k\pi-\pi-\arcsin y)\right]\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & -1\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(3) 解　用定义法，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}$.

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时，
$$F_Y(y)=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$$
$$=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y}),$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数.

当 $x\leqslant 0$ 时，$F(x)=\Phi(x)$，故 $F(-\sqrt{y})=\Phi(-\sqrt{y})$；

当 $x>0$ 时，

$$F(x)=\frac{1}{2}+\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2x}),$$

故 $F(\sqrt{y})=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{y}})$，所以

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{y}})-\Phi(-\sqrt{y}), & y>0,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[\mathrm{e}^{-2\sqrt{y}}+\varphi(-\sqrt{y})\right], & y>0.\end{cases}$$

拓展题

解答题

解　$y=x^2+1(-1<x<1)$ 不是单调函数，用定义法.

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2+1\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y-1\}.$$

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $1\leqslant y<2$ 时，
$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y-1}\leqslant X\leqslant\sqrt{y-1}\}$$
$$=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}(1-|x|)\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{y-1}}(1-x)\mathrm{d}x$$
$$=1-(1-\sqrt{y-1})^2;$$

当 $y\geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=1$，故

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ 1-(1-\sqrt{y-1})^2, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}-1, & 1<y<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

第十八章　多维随机变量及其分布

基础题

一、选择题

(1)A.

解　记 $A=\{X\leqslant x_0\}$,$B=\{Y\leqslant y_0\}$,由分布函数的定义,知

$$F(x_0,y_0)=P\{X\leqslant x_0,Y\leqslant y_0\},$$

故
$$\begin{aligned}P\{X>x_0,Y>y_0\}&=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-P(A)-P(B)+P(AB)\\&=1-P\{X\leqslant x_0\}-P\{Y\leqslant y_0\}+P\{X\leqslant x_0,Y\leqslant y_0\}\\&=1-F(x_0,+\infty)-F(+\infty,y_0)+F(x_0,y_0).\end{aligned}$$

(2)A.

解　由 X,Y 相互独立,$X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(1,1)$,知

$$X+Y\sim N(0+1,1+1)=N(1,2),$$

所以 $X+Y$ 的概率密度曲线关于 $\mu=1$ 对称,故 $P\{X+Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$.

【注】　设 $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,且 X_1 与 X_2 相互独立,则

$$aX_1+bX_2\sim N\left(a\mu_1+b\mu_2,(a\sigma_1)^2+(b\sigma_2)^2\right),$$

其中 a,b 为不全为零的实数.

二、填空题

(1) $\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}$.

解　由已知,得

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{4}+b,$$

$$P\{X+Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=a+b.$$

又 $a+b+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=a+b+\dfrac{1}{2}=1$,知 $a+b=\dfrac{1}{2}$,于是

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=b.$$

因为 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立,所以

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}\cdot P\{X+Y=1\},$$

即 $b=\left(\dfrac{1}{4}+b\right)\cdot\dfrac{1}{2}$,得 $b=\dfrac{1}{4}$,$a=\dfrac{1}{4}$.

(2) $\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2\lambda z}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$

解　依题设,X 与 Y 的分布函数均为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{\min\{X,Y\}\leqslant z\}=1-P\{\min\{X,Y\}>z\}\\&=1-P\{X>z,Y>z\}=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}\\&=1-[1-F(z)]^2=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2\lambda z}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0,\end{cases}\end{aligned}$$

可见 $\min\{X,Y\}$ 服从参数为 2λ 的指数分布.

(3) $\dfrac{1}{16}$.

解　依题设,X,Y 的概率密度均为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

故 $P\{X>3\}=P\{Y>3\}=\dfrac{1}{4}$.

$$P\{(X>3)\cup(Y>3)\}=1-P\{X\leqslant 3,Y\leqslant 3\}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= 1 - P\{\max\{X,Y\} \leqslant 3\} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16},$$

所以
$$P\{\min\{X,Y\} > 3\} = P\{X > 3, Y > 3\}$$
$$= P\{X > 3\} + P\{Y > 3\} - P\{(x > 3) \cup (Y > 3)\}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{7}{16} = \frac{1}{16}.$$

(4) $0.4e^{-1.6} + 0.6e^{-0.6}$.

解　应用全概率公式，有

$$P\{X+Y \geqslant 1.6\}$$
$$= P\{Y=0\} \cdot P\{X+Y \geqslant 1.6 \mid Y=0\} + P\{Y=1\} \cdot P\{X+Y \geqslant 1.6 \mid Y=1\}$$
$$= 0.4P\{X \geqslant 1.6 \mid Y=0\} + 0.6P\{X \geqslant 0.6 \mid Y=1\}.$$

由于 X 与 Y 相互独立，故

$$P\{X \geqslant 1.6 \mid Y=0\} = P\{X \geqslant 1.6\} = 1 - P\{X < 1.6\} = e^{-1.6}.$$

同理，可得 $P\{X \geqslant 0.6 \mid Y=1\} = e^{-0.6}$，故

$$P\{X+Y \geqslant 1.6\} = 0.4e^{-1.6} + 0.6e^{-0.6}.$$

三、解答题

(1) 解　(Ⅰ) 随机变量取值情况如下：

(X,Y)	$(0,-1)$	$(0,1)$	$(1,-1)$	$(1,1)$
p_{ij}	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$
$2X+Y$	-1	1	1	3
$\max\{X,Y\}$	0	1	1	1
$\min\{X,Y\}$	-1	0	-1	1

故

$2X+Y$	-1	1	3
p_{ij}	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{16}$

$\max\{X,Y\}$	0	1
p_{ij}	$\frac{3}{16}$	$\frac{13}{16}$

$\min\{X,Y\}$	-1	0	1
p_{ij}	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$

(Ⅱ) $P\{\min\{X,Y\} \geqslant 0\} = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}$.

(Ⅲ) X 与 Y 的边缘分布律分别为

X	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Y	-1	1
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

显然满足 $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$，故 X 与 Y 相互独立.

(2) 解　(Ⅰ) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_{-x}^{x} 1\mathrm{d}y, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$= \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_{y}^{1} 1\mathrm{d}x, & 0 < y < 1, \\ \int_{-y}^{1} 1\mathrm{d}x, & -1 < y < 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

故 $f_Y(y)=\begin{cases}1-|y|, & |y|<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

(Ⅱ) $$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & |y|<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(Ⅲ) $$P\{X>\frac{1}{2}\mid Y>0\}=\frac{P\{X>\frac{1}{2},Y>0\}}{P\{Y>0\}}=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}1\mathrm{d}y}{\int_{0}^{1}(1-y)\mathrm{d}y}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}.$$

【注】 考虑到 $f(x,y)$ 的非零部分为常数1,可用面积求 $P\{X>\frac{1}{2},Y>0\}$ 和 $P\{Y>0\}$,如图18-1所示.

$P\{X>\frac{1}{2},Y>0\}$ 等于图中阴影部分的面积,$P\{Y>0\}$ 等于如图18-1中 $\triangle AOB$ 的面积,故

$$\frac{P\{X>\frac{1}{2},Y>0\}}{P\{Y>0\}}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}.$$

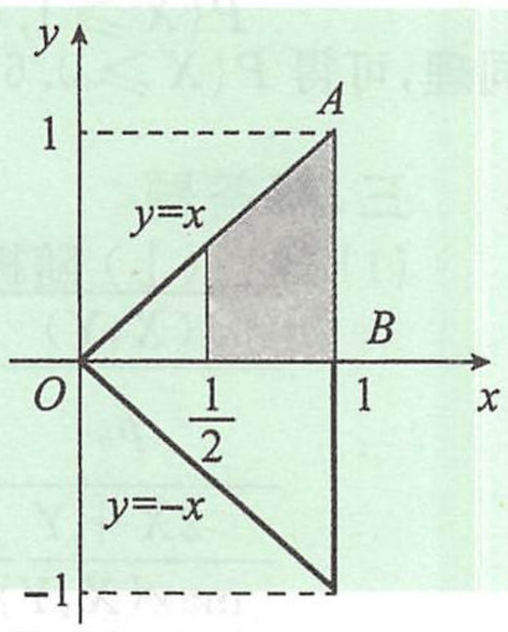


图 18-1

(3) 解 (Ⅰ)由

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-3y}\mathrm{d}y=\frac{k}{12}=1,$$

得 $k=12$,故

$$f(x,y)=\begin{cases}12\mathrm{e}^{-(4x+3y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

又由于 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}12\mathrm{e}^{-4x}\cdot\mathrm{e}^{-3y}\mathrm{d}y=4\mathrm{e}^{-4x},\ x>0,$$

故 $f_X(x)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 同理,可得 $f_Y(y)=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 显然,$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$,故 X 与 Y 相互独立.

(Ⅱ)由卷积公式,有 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x.$$

当 $z<0$ 时,$f_Z(z)=0$;当 $z\geqslant 0$ 时,

$$f_Z(z)=\int_{0}^{z}12\mathrm{e}^{-4x}\cdot\mathrm{e}^{-3(z-x)}\mathrm{d}x=12\int_{0}^{z}\mathrm{e}^{-3z}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=12\mathrm{e}^{-3z}(1-\mathrm{e}^{-z}).$$

(4) 解 由 X 与 Y 相互独立,有

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_1\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_1x-\lambda_2y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

$$P\{Z=1\}=P(X\leqslant Y)=\iint\limits_{x\leqslant y}\lambda_1\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_1x-\lambda_2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\lambda_1\lambda_2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_1x}\mathrm{d}x\int_{x}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_2y}\mathrm{d}y=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2},$$

$$P\{Z=0\}=1-P\{Z=1\}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2},$$

分布函数为 $$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}, & 0\leqslant z<1,\\ 1, & z\geqslant 1.\end{cases}$$

(5) 解 (Ⅰ) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

由于 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故 X 与 Y 不相互独立.

（Ⅱ）　　$F(x,y)=F\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$.

考虑一点(x,y)的分布函数.

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$；当 $0\leqslant y<x<+\infty$ 时，如图 18-2(a) 所示，

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\int_0^y\mathrm{d}y\int_0^y x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x=1-\left(\frac{1}{2}y^2+y+1\right)\mathrm{e}^{-y};$$

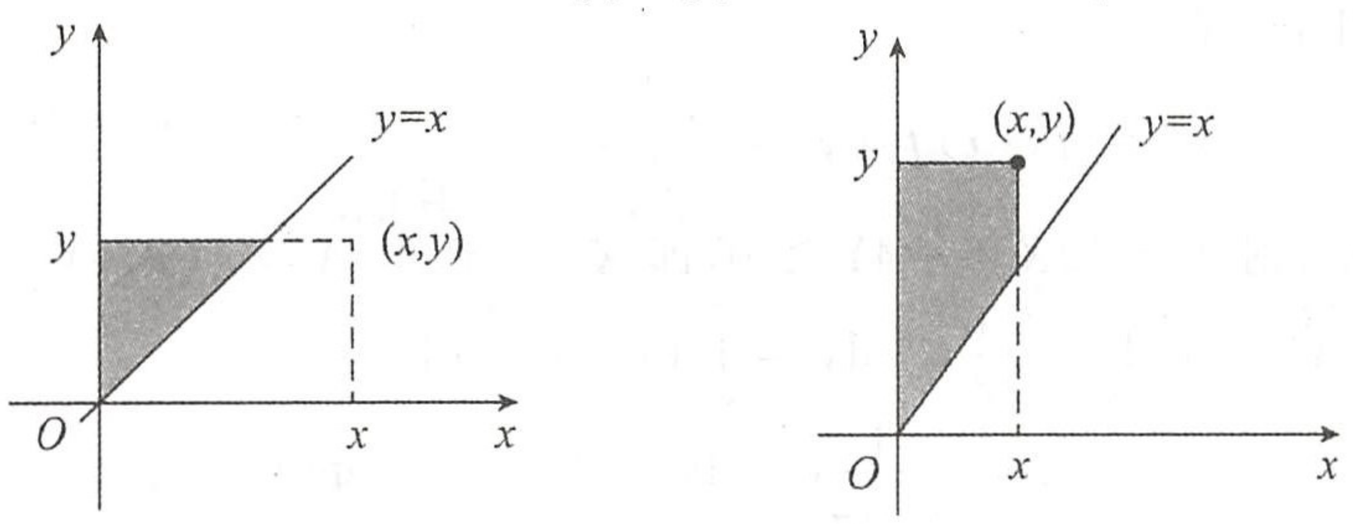


图 18-2

当 $0\leqslant x<y<+\infty$ 时，如图 18-2(b) 所示，

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\int_0^x\mathrm{d}x\int_x^y x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-y}.$$

（Ⅲ）求 $f_Z(z)$ 用卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x.$$

当 $z<0$ 时，$f_Z(z)=0$；当 $0<x<z-x$ 时，$f(x,z-x)$ 不为 0，即 $0<x<\dfrac{z}{2}$，故当 $z\geqslant 0$ 时，如图 18-3 所示，

$$f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}x\mathrm{e}^{-(z-x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{e}^{-z}x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-z}+\left(\frac{z}{2}-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}.$$

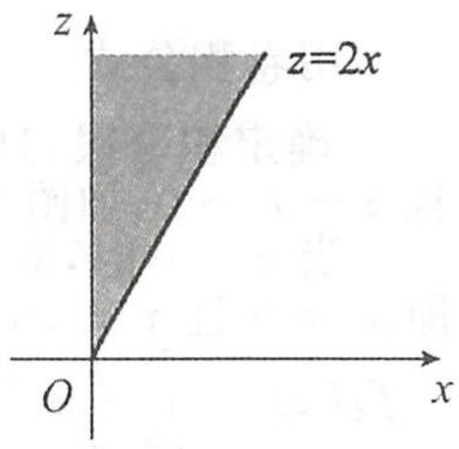


图 18-3

(6) 解　由 X 与 Y 相互独立，知(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4}{x^2y^2}, & x>2,y>2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

用定义法，$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\dfrac{X}{Y}\leqslant z\}$.

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P(\varnothing)=0$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，如图 18-4 所示，

$$F_Z(z)=P\{\frac{X}{Y}\leqslant z\}=P\{(X,Y)\in G\}$$

$$=\int_{\frac{2}{z}}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_2^{zy}\frac{4}{x^2y^2}\mathrm{d}x=\int_{\frac{2}{z}}^{+\infty}\left(\frac{2}{y^2}-\frac{4}{zy^3}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\left(-\frac{2}{y}+\frac{4}{2zy^2}\right)\Big|_{\frac{2}{z}}^{+\infty}=z-\frac{z}{2}=\frac{z}{2};$$

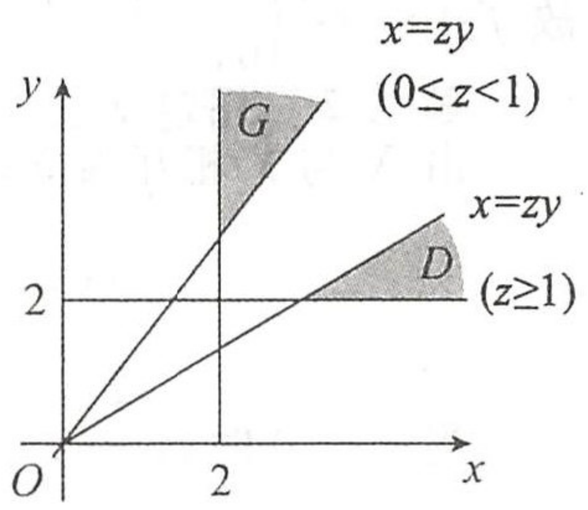


图 18-4

当 $z\geqslant 1$ 时，$F_Z(z)=P\{\dfrac{X}{Y}\leqslant z\}=1-P\{(X,Y)\in D\}$

$$=1-\int_2^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{zy}^{+\infty}\frac{4}{x^2y^2}\mathrm{d}x$$

$$=1-\int_2^{+\infty}\frac{4}{y^3z}\mathrm{d}y=1+\frac{4}{2y^2z}\Big|_2^{+\infty}=1-\frac{1}{2z},$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

故分布函数为 $$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{z}{2}, & 0\leqslant z<1,\\ 1-\dfrac{1}{2z}, & z\geqslant 1,\end{cases}$$

概率密度为 $$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant z<1,\\ \dfrac{1}{2z^2}, & z\geqslant 1.\end{cases}$$

(7) 解 (Ⅰ)依题设,可知 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

由 X 与 Y 相互独立,得

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ)k 有实根,则 $\Delta=(2X)^2-4Y\geqslant 0$,即 $X^2\geqslant Y$,令 $A=\{(x,y)\mid x^2\geqslant y\}$,则

$$P(A)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\mathrm{d}y=\int_0^1(1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})\mathrm{d}x$$

$$=1-\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=1-\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-\Phi(0)]\approx 0.1445,$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数.

(8) 解法 1 依题设,X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{y}{3}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

用卷积公式 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x.$$

确定积分限,只需确定 $f_X(x)f_Y(z-x)$ 的非零取值区域,即 $x>0$ 且 $z-x>0$,如图 18-5 所示.

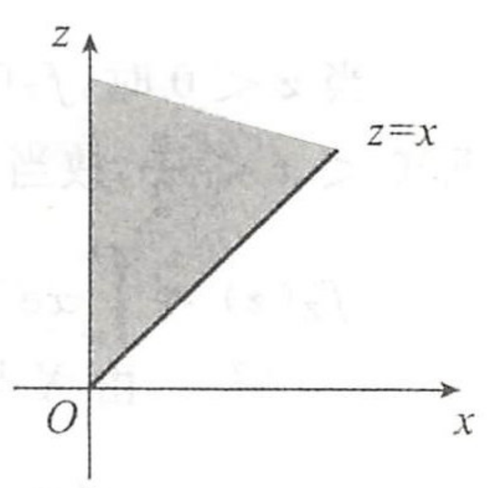


图 18-5

当 $z<0$ 时,即 $x<z<0$,有 $f_X(x)=0$,$f_Z(z)=0$;当 $z>0$ 时,即 $x>0$ 且 $x<z$,而

$$f_Z(z)=\int_0^z\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{z-x}{3}}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{z}{3}}\int_0^z\mathrm{e}^{-\frac{x}{6}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\frac{z}{3}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{z}{6}}),$$

故 $f_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{z}{3}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{z}{6}}), & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$

解法 2 用定义法.

由 X 与 Y 相互独立,故 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}.$$

当 $z<0$ 时,$x+y\leqslant z$ 与区域 $x>0,y>0$ 无公共部分,故

$$F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}=P(\varnothing)=0.$$

当 $z>0$ 时,$F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 $D:x+y\leqslant z,x>0,y>0$,如图 18-6 所示,故

$$F_Z(z)=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^z(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{z}{3}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x}{6}})\mathrm{d}x$$

$$=1+2\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}-3\mathrm{e}^{-\frac{z}{3}},$$

所以 $$F_Z(z)=\begin{cases}1+2\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}-3\mathrm{e}^{-\frac{z}{3}}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0,\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{z}{3}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{z}{6}}), & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

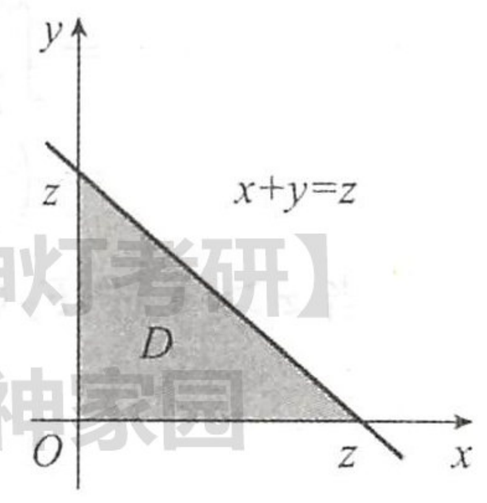


图 18-6

【注】 卷积公式画图是在 xOz(或 yOz)坐标中,定义法画图是在 xOy 坐标中.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(9) 解　用定义法.

由已知，(X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 故

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\}=\iint\limits_{xy\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P(\varnothing)=0$；当 $0\leqslant z<2$ 时，积分区域为区域 G 与 $xy\leqslant z$ 的公共部分，如图 18-7 所示的阴影部分，故

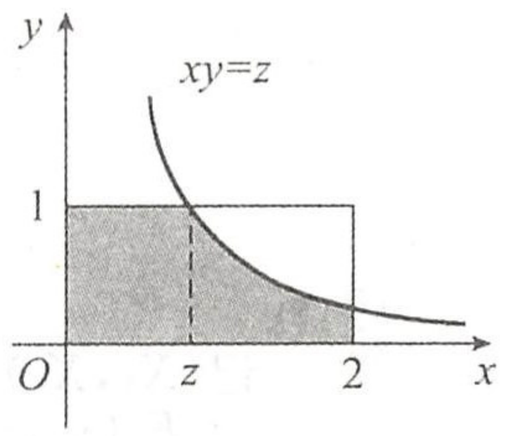


图 18-7

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{2}\mathrm{d}y+\int_z^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{z}{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y\\&=\int_0^z\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_z^2\frac{z}{2x}\mathrm{d}x=\frac{z}{2}(1+\ln 2-\ln z);\end{aligned}$$

当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=1$，所以

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \frac{z}{2}(1+\ln 2-\ln z), & 0<z<2,\\ 1, & z\geqslant 2,\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln z), & 0<z<2,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

(10) 解　依题意，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & -a\leqslant y\leqslant a,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

X 的概率密度为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

由于 X 与 Y 相互独立，由卷积公式，得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(z-y)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{2a}\mathrm{d}y,$$

为将其化为标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$，令 $\frac{z-y}{\sigma}=-t$，则 $\mathrm{d}y=\sigma\mathrm{d}t$，故

$$f_Z(z)=\int_{\frac{-a-z}{\sigma}}^{\frac{a-z}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\frac{1}{2a}\mathrm{d}t=\frac{1}{2a}\left[\Phi\left(\frac{a-z}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-a-z}{\sigma}\right)\right].$$

(11) 解　(Ⅰ) 由已知，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0,\end{cases}$$

$$P\left\{Z\leqslant-\frac{1}{2}\mid X=0\right\}=\frac{P\left\{X=0,Z\leqslant-\frac{1}{2}\right\}}{P\{X=0\}}=\frac{P\left\{X=0,Y\geqslant\frac{1}{2}\right\}}{P\{X=0\}}$$

$$=\frac{P\{X=0\}\cdot P\{Y\geqslant\frac{1}{2}\}}{P\{X=0\}}=P\left\{Y\geqslant\frac{1}{2}\right\}=1-\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

(Ⅱ) $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X-Y\leqslant z\}$

$$=P\{X=0\}\cdot P\{X-Y\leqslant z\mid X=0\}+P\{X=1\}\cdot P\{X-Y\leqslant z\mid X=1\}$$

$$=P\{X=0\}\cdot P\{Y\geqslant -z\mid X=0\}+P\{X=1\}\cdot P\{Y\geqslant 1-z\mid X=1\}.$$

由 X 与 Y 相互独立，知

$$P\{Y\geqslant -z\mid X=0\}=P\{Y\geqslant -z\}=\begin{cases}\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ 1, & z\geqslant 0,\end{cases}$$

$$P\{Y\geqslant 1-z\mid X=1\}=P\{Y\geqslant 1-z\}=\begin{cases}\mathrm{e}^{z-1}, & z<1,\\ 1, & z\geqslant 1,\end{cases}$$

故 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0.4\mathrm{e}^{z}+0.6\mathrm{e}^{z-1}, & z<0,\\ 0.4+0.6\mathrm{e}^{z-1}, & 0\leqslant z<1,\\ 1, & z\geqslant 1.\end{cases}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】 获取更多考研资源!

综合题

一、选择题

(1)D.

解
$$P\{X=Y\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=Y=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k,Y=k\}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}P\{Y=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}p^2\cdot(1-p)^{2(k-1)}$$
$$=p^2\sum_{k=1}^{\infty}[(1-p)^2]^{k-1}=p^2\cdot\frac{1}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2-p}.$$

(2)D.

解 记(X_1,X_2)的分布函数为$F_1(x_1,x_2)$,(Y_1,Y_2)的分布函数为$F_2(y_1,y_2)$,则
$$F_2(y_1,y_2)=P\{Y_1\leqslant y_1,Y_2\leqslant y_2\}=P\{2X_1\leqslant y_1,3X_2\leqslant y_2\}$$
$$=P\{X_1\leqslant\frac{1}{2}y_1,X_2\leqslant\frac{1}{3}y_2\}=F_1\left(\frac{1}{2}y_1,\frac{1}{3}y_2\right),$$

故
$$f_2(y_1,y_2)=\frac{\partial F_2(y_1,y_2)}{\partial y_1\partial y_2}=\frac{\partial F_1\left(\frac{1}{2}y_1,\frac{1}{3}y_2\right)}{\partial y_1\partial y_2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}f_1\left(\frac{1}{2}y_1,\frac{1}{3}y_2\right)=\frac{1}{6}f_1\left(\frac{1}{2}y_1,\frac{1}{3}y_2\right).$$

(3)C.

解 令$A_1=\{X\geqslant 0\}$,$A_2=\{Y\geqslant 0\}$,则A_1与A_2相互独立,且
$$P(A_1)=P(A_2)=\int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$
其中$\varphi(x)$为$N(0,1)$的概率密度,故
$$P\{\min\{X,Y\}\geqslant 0\}=P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{4},$$
C正确.

由X,Y相互独立且均服从$N(0,1)$,知$X+Y$,$X-Y$服从$N(0,2)$,故
$$P\{X+Y\geqslant 0\}=P\{X-Y\geqslant 0\}=\frac{1}{2},$$
$$P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=P(A_1\cup A_2)=1-P(\overline{A_1\cup A_2})$$
$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=\frac{3}{4},$$
选项A,B,D错误.

二、填空题

$\frac{15}{8\mathrm{e}}$.

解 记$U=\max\{X,Y\}$,依题设,有
$$P\{1<\max\{X,Y\}\leqslant 3\}=P\{1<U\leqslant 3\}=P\{U\leqslant 3\}-P\{U\leqslant 1\}$$
$$=P\{X\leqslant 3,Y\leqslant 3\}-P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}$$
$$=P\{X\leqslant 3\}\cdot P\{Y\leqslant 3\}-P\{X\leqslant 1\}\cdot P\{Y\leqslant 1\}.$$

而
$$P\{X\leqslant 3\}=1-P\{X=4\}=\frac{15}{16},$$
$$P\{X\leqslant 1\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\left(\frac{1}{2}\right)^4+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16},$$
$$P\{Y\leqslant 3\}=\sum_{k=0}^{3}\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}=\frac{8}{3}\mathrm{e}^{-1},$$
$$P\{Y\leqslant 1\}=2\mathrm{e}^{-1},$$

故
$$P\{1<U\leqslant 3\}=\frac{15}{16}\cdot\frac{8}{3}\mathrm{e}^{-1}-\frac{5}{16}\cdot 2\mathrm{e}^{-1}=\frac{15}{8\mathrm{e}}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

三、解答题

(1) 解　设 X 和 Y 分别表示两点的坐标，则 (X,Y) 服从均匀分布，其概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

所求问题归结为求 $Z=|X-Y|$ 的概率密度.

用定义法，$F_z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{|X-Y|\leqslant z\}$

$$=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D：$|x-y|\leqslant z$，如图 18-8 所示.

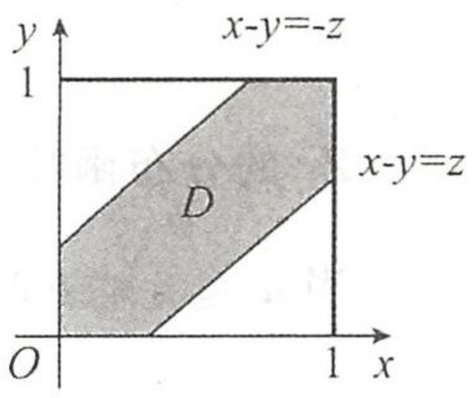


图 18-8

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $0\leqslant z\leqslant 1$ 时，

$$F_Z(z)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-2\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2=2z-z^2;$$

当 $z>1$ 时，D 为 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$，故 $F_Z(z)=1$，即

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 2z-z^2, & 0\leqslant z<1,\\ 1, & z\geqslant 1,\end{cases}$$

所以 $Z=|X-Y|$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2(1-z), & 0\leqslant z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 解　(U,V) 可能的值为 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$，依题设，(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

考虑到 $f(x,y)$ 的非零取值为常数 $\frac{1}{2}$，可直接利用面积进行求解，如图 18-9 所示，将区域 D 划分为三个三角形区域 D_1,D_2,D_3，其面积分别为 S_1,S_2,S_3 区域 D 的面积为 $S=S_1+S_2+S_3=2$，用面积求法，得

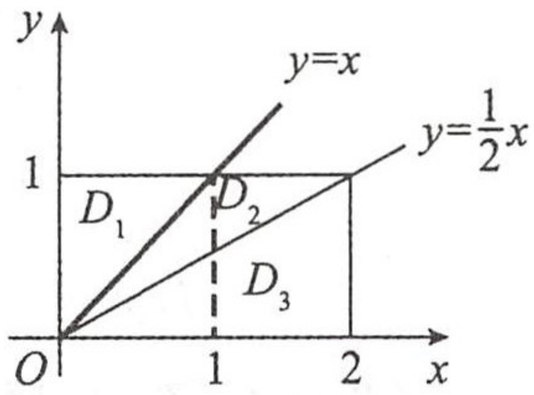


图 18-9

$$P\{X\leqslant Y\}=\frac{1}{2}\times S_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{4}.$$

同理，得 $P\{X>2Y\}=\frac{1}{2}$，$P\{Y<X\leqslant 2Y\}=\frac{1}{4}$. 故

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X\leqslant Y,X\leqslant 2Y\}=P\{X\leqslant Y\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X\leqslant Y,X>2Y\}=0,$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\leqslant 2Y\}=P\{Y<X\leqslant 2Y\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{U=1,V=1\}=1-\frac{1}{4}-0-\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

故

U \ V	0	1	U 的边缘
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
V 的边缘	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

显然 $p_{ij}\neq p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$，故 U 与 V 不相互独立.

(3) 解　(Ⅰ) 依题设，X 与 Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b,\end{cases}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & y<a,\\ \dfrac{y-a}{b-a}, & a\leqslant y<b,\\ 1, & y\geqslant b.\end{cases}$$

Z_1 的分布函数为 $F_{Z_1}(z)=P\{Z_1\leqslant z\}=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}$

$$=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=P\{X\leqslant z\}P\{Y\leqslant z\}.$$

当 $a\leqslant z\leqslant b$ 时,

$$F_{Z_1}(z)=\frac{z-a}{b-a}\cdot\frac{z-a}{b-a}=\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^2;$$

当 $z<a$ 时,$F_{Z_1}(z)=0$;当 $z>b$ 时,$F_{Z_1}(z)=1$,故

$$F_{Z_1}(z)=\begin{cases}0, & z<a,\\ \left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)^2, & a\leqslant z<b,\\ 1, & z\geqslant b,\end{cases}$$

$$f_{Z_1}(z)=F_{Z_1}'(z)=\begin{cases}\dfrac{2(z-a)}{(b-a)^2}, & a\leqslant z\leqslant b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

Z_2 的分布函数为

$$F_{Z_2}(z)=P\{Z_2\leqslant z\}=1-P\{Z_2>z\}=1-P\{\min\{X,Y\}>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}=1-[1-P\{X\leqslant z\}]^2$$

$$=\begin{cases}0, & z<a,\\ 1-\left(1-\dfrac{z-a}{b-a}\right)^2, & a\leqslant z<b,\\ 1, & z\geqslant b,\end{cases}$$

$$f_{Z_2}(z)=F_{Z_2}'(z)=\begin{cases}\dfrac{2(b-z)}{(b-a)^2}, & a\leqslant z\leqslant b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ)(Z_1,Z_2) 的联合分布函数为

$$F(z_1,z_2)=P\{Z_1\leqslant z_1,Z_2\leqslant z_2\}$$

$$=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z_1,\ \min\{X,Y\}\leqslant z_2\}.$$

当 $z_1<z_2$ 时,$F(z_1,z_2)=0$;当 $z_1>z_2$ 时,

$$F(z_1,z_2)=P\{(\max\{X,Y\}\leqslant z_1)\cap[\Omega-(\min\{X,Y\}>z_2)]\}$$

$$=P\{(\max\{X,Y\}\leqslant z_1)-[(\max\{X,Y\}\leqslant z_1)\cap(\min\{X,Y\}>z_2)]\}$$

$$=P\{\max(X,Y)\leqslant z_1\}-P\{(\max\{X,Y\}\leqslant z_1)\cap(\min\{X,Y\}>z_2)\}$$

$$=F_{Z_1}(z_1)-P\{(X\leqslant z_1,Y\leqslant z_1)\cap(X>z_2,Y>z_2)\}$$

$$=F_{Z_1}(z_1)-P\{z_2<X\leqslant z_1,z_2<Y\leqslant z_1\}.$$

由(Ⅰ)的结果,可得

$$F(z_1,z_2)=\begin{cases}0, & z_2<a,\\ \left(\dfrac{z_1-a}{b-a}\right)^2-\left(\dfrac{z_1-z_2}{b-a}\right)^2, & a\leqslant z_2\leqslant z_1<b,\\ 1-\left(\dfrac{b-z_2}{b-a}\right)^2, & a\leqslant z_2<b<z_1,\\ 1, & b\leqslant z_2<z_1,\end{cases}$$

故(Z_1,Z_2) 的联合概率密度为

$$f(z_1,z_2)=\frac{\partial^2F(z_1,z_2)}{\partial z_1\partial z_2}=\begin{cases}\dfrac{2}{(b-a)^2}, & a<z_2\leqslant z_1<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(4) 解 (Ⅰ)依题设,(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

二维随机变量(U,V) 有六个取值分别为$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)$,则

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X<0,X\geqslant\sqrt{3}Y\}=P(\varnothing)=0,$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{0\leqslant X<Y,X\geqslant\sqrt{3}Y\}=P(\varnothing)=0.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

考虑到 $f(x,y)$ 的非零取值为常数 $\frac{2}{\pi}$，可直接利用面积求解概率，如图 18-10 所示，$\angle AOD=\frac{\pi}{6}$，$\angle BOD=\frac{\pi}{4}$，$\angle COD=\frac{\pi}{2}$，可得

$$P\{U=1,V=1\}=P\{0\leqslant X<Y\}=\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\times 1^2=\frac{1}{4},$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X<0\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{U=2,V=0\}=P\{X\geqslant\sqrt{3}Y\}=\frac{1}{6},$$

$$P\{U=2,V=1\}=P\{Y\leqslant X<\sqrt{3}Y\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12},$$

故 (U,V) 的联合概率分布为

U \ V	0	1
0	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

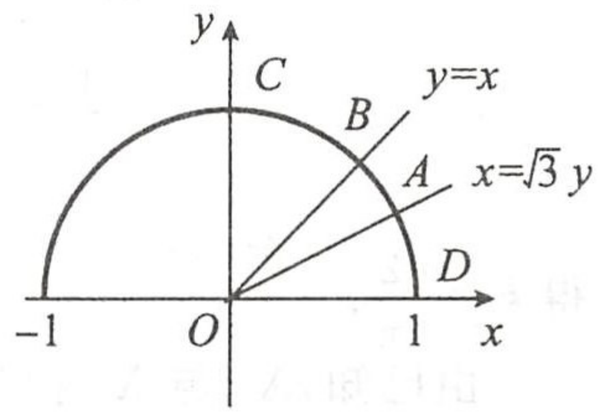


图 18-10

(Ⅱ) $P\{UV\neq 0\}=P\{U=1,V=1\}+P\{U=2,V=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$.

(5) 解　(Ⅰ) 当 $|x|<1$ 时，X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy)\mathrm{d}y=\frac{1}{2};$$

当 $|x|\geqslant 1$ 时，$f_X(x)=0$，故

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

同理，可得 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |Y|<1,\\ 0, & |Y|\geqslant 1,\end{cases}$$

显然，$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故 X 与 Y 不相互独立.

(Ⅱ) 设 $Z_1=X^2$ 与 $Z_2=Y^2$ 的分布函数分别为 $F_1(x)$ 与 $F_2(y)$，(Z_1,Z_2) 的分布函数为 $F(x,y)$.

当 $x<0$ 时，$F_1(x)=P\{X^2\leqslant x\}=0$；当 $0\leqslant x<1$ 时，

$$F_1(x)=P\{X^2\leqslant x\}=P\{-\sqrt{x}\leqslant X\leqslant\sqrt{x}\}=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\sqrt{x};$$

当 $x\geqslant 1$ 时，$F_1(x)=1$，所以

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \sqrt{x}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

同理，可得 $F_2(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \sqrt{y}, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$

下求 $F(x,y)$.

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$；

当 $0\leqslant x<1,y\geqslant 1$ 时，

$$F(x,y)=P\{X^2\leqslant x,Y^2\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant x\}=\sqrt{x};$$

当 $0\leqslant y<1,x\geqslant 1$ 时，

$$F(x,y)=P\{X^2\leqslant x,Y^2\leqslant y\}=P\{Y^2\leqslant y\}=\sqrt{y};$$

当 $0\leqslant x<1,0\leqslant y<1$ 时，

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

$$F(x,y)=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}(1+xy)\mathrm{d}y=\sqrt{xy};$$

当 $x\geqslant 1,y\geqslant 1$ 时,$F(x,y)=1$,故

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ \sqrt{x}, & 0\leqslant x<1,y\geqslant 1,\\ \sqrt{y}, & x\geqslant 1,0\leqslant y<1,\\ \sqrt{xy}, & 0\leqslant x<1,0\leqslant y<1,\\ 1, & x\geqslant 1,y\geqslant 1.\end{cases}$$

【注】 ① 可以验证:$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$,故 X^2 与 Y^2 相互独立.

② 此例说明:X^2 与 Y^2 独立 $\not\Rightarrow X$ 与 Y 独立.

③ 一般地:X 与 Y 独立 $\Rightarrow h(X)$ 与 $g(Y)$ 独立(h,g 为连续函数).

(6) 解 (Ⅰ)由

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x$$
$$=k\arctan\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=k\cdot\frac{\pi}{2}=1,$$

得 $k=\dfrac{2}{\pi}$.

由已知,X_1 与 X_2 相互独立且与 X 同分布,故

$$P\{X_1<0,X_2<1\}=P\{X_1<0\}\cdot P\{X_2<1\}$$
$$=\left(\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\right)\left(\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\right)=\frac{1}{\pi}\arctan\mathrm{e}.$$

(Ⅱ)(Y_1,Y_2) 的四个取值分别为(1,1),(1,0),(0,1),(0,0),则

$$P\{Y_1=1,Y_2=1\}=P\{X_1\leqslant 1,X_2\leqslant 1\}$$
$$=\left(\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\right)^2=\frac{4}{\pi^2}(\arctan\mathrm{e})^2,$$

$$P\{Y_1=1,Y_2=0\}=P\{X_1\leqslant 1,X_2>1\}$$
$$=P\{X_1\leqslant 1\}\cdot P\{X_2>1\}$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\cdot\left(1-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\right)$$
$$=\left(\frac{2}{\pi}\arctan\mathrm{e}\right)\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan\mathrm{e}\right),$$

$$P\{Y_1=0,Y_2=1\}=P\{Y_1=1,Y_2=0\}$$
$$=\left(\frac{2}{\pi}\arctan\mathrm{e}\right)\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan\mathrm{e}\right),$$

$$P\{Y_1=0,Y_2=0\}=P\{X_1>1,X_2>1\}$$
$$=P\{X_1>1\}\cdot P\{X_2>1\}$$
$$=\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan\mathrm{e}\right)^2.$$

拓展题

解答题

(1) 解 用定义法.

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\left\{Z\leqslant z,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}+P\left\{Z\leqslant z,X>\frac{1}{2}\right\}$$
$$=P\left\{Y\leqslant z,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}+P\left\{X\leqslant z,X>\frac{1}{2}\right\}$$
$$=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}\cdot P\{Y\leqslant z\}+P\left\{X\leqslant z,X>\frac{1}{2}\right\}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}F_Y(z), & z<\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}F_Y(z)+P\left\{\frac{1}{2}<X\leqslant z\right\}, & \frac{1}{2}\leqslant z<1,\\ \frac{1}{2}F_Y(z)+P\left\{\frac{1}{2}<X\leqslant 1\right\}, & z\geqslant 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}F_Y(z), & z<\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}F_Y(z)+z-\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\leqslant z<1,\\ \frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}, & z\geqslant 1.\end{cases}$$

(2) 解　（Ⅰ）求 Y 的边缘概率密度.

当 $y\leqslant 0$ 时，$f_Y(y)=0$；当 $y>0$ 时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{y}^{+\infty}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y},$$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$ 即 Y 服从参数为 λ 的指数分布.

（Ⅱ）X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

结合（Ⅰ），可得 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，由此可知，$X$ 与 Y 不相互独立.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

多考研资源!

第十九章　随机变量的数字特征

基础题

一、选择题

(1)A.

解　由于 X 服从参数为 2 的指数分布,故 $EX=\frac{1}{2}$. 又

$$E(\mathrm{e}^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\cdot 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$$
$$=2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

所以
$$EY=2EX+E(\mathrm{e}^{-2X})=2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

(2)B.

解　由 $X\sim B(n,p)$,可知 $EX=np$,$DX=np(1-p)$,故

$$\begin{cases}np=2.4,\\np(1-p)=1.44,\end{cases}$$

解得 $n=6$,$p=0.4$.

(3)A.

解　由 $DX=E(X^2)-(EX)^2\geqslant 0$,知 $E(X^2)\geqslant(EX)^2$.

C 与 D 均不一定成立,如 $X\sim N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$,

$$EX=\frac{1}{2},DX=\frac{1}{4},$$
$$E(X^2)=DX+(EX)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

则 $E(X^2)=EX=\frac{1}{2}$.

(4)D.

解　因为

$$E[(X-C)^2]=E[(X-\mu+\mu-C)^2]=E[(X-\mu)^2]+(\mu-C)^2,$$

其中 $(\mu-C)^2\geqslant 0$,所以 $E[(X-C)^2]\geqslant E[(X-\mu)^2]$,故 D 正确,

B 当且仅当 $\mu=C$ 时才成立.

(5)C.

解　因为 U 与 V 不相关 $\Leftrightarrow\mathrm{Cov}(U,V)=0$,由于

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U,V)&=\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)\\&=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y)=DX-DY=0,\end{aligned}$$

故 U,V 不相关的充要条件是 $DX=DY$.

而　$DX=E(X^2)-(EX)^2$,$DY=E(Y^2)-(EY)^2$,

故 C 正确.

(6)A.

解　由 $\rho_{XY}=1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1$,且 $a>0$,排除 B,C. 又

$$1=EY=E(aX+b)=aEX+b,$$

由于 $EX=0$,故 $b=1$,所以 A 正确.

【注】　结论:

$|\rho_{XY}|=1\Leftrightarrow$ 存在常数 $a(a\neq 0)$ 和 b,使得 $P\{Y=aX+b\}=1$,且

$$\rho_{XY}=\begin{cases}1, & a>0,\\-1, & a<0.\end{cases}$$

(见《李林考研数学系列概率论与数理统计辅导讲义》第四章)

(7)B.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

解　由于 $\arcsin X+\arccos X=\frac{\pi}{2}$，故 $Y_1+Y_2=\frac{\pi}{2}$，即 $Y_1=\frac{\pi}{2}-Y_2$，故 $\rho_{Y_1Y_2}=-1$.

(8)C.

解　依题设，可知试验为有放回摸球，故每次摸到红球的概率为 $\frac{3}{5}$，所以 $X\sim B\left(4,\frac{3}{5}\right)$，故 $EX=np=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$.

二、填空题

(1)$\frac{n}{N}$.

解　设 $A=\{$取得一球为白球$\}$，依题意，有 $P\{A\mid X=k\}=\frac{k}{N}$，$X$ 的取值可能为 $\{0,1,2,\cdots,N\}$，由全概率公式，得

$$P(A)=\sum_{k=0}^{N}P\{X=k\}\cdot P\{A\mid X=k\}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}kP\{X=k\}=\frac{EX}{N}=\frac{n}{N}.$$

(2)$\frac{3}{2}$.

解　由
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot\frac{1}{2}}},$$
知 $X\sim N\left(1,\frac{1}{2}\right)$，故 $EX=1$，$DX=\frac{1}{2}$，所以
$$E(X^2)=DX+(EX)^2=\frac{1}{2}+1^2=\frac{3}{2}.$$

(3)2.

解　先求 Y 的分布律.

Y 的所有可能取值为 1,2,3,4,5，由全概率公式得
$$P\{Y=k\}=\sum_{i=1}^{k}P\{X=i\}\cdot P\{Y=k\mid X=i\}=\frac{1}{5}\sum_{i=k}^{5}\frac{1}{i}(k=1,2,\cdots5),$$
故
$$EY=\sum_{k=1}^{5}k\cdot P\{Y=k\}=\sum_{k=1}^{5}\left(k\cdot\frac{1}{5}\sum_{i=k}^{5}\frac{1}{i}\right)=2.$$

(4)0.5.

解　先求 X 的概率密度，再求 EX.
$$f(x)=F'(x)=0.3\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+0.7\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3},$$
其中 $\varphi(x)$ 为 $X\sim N(0,1)$ 的概率密度.
$$\begin{aligned}EX&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}0.3\cdot\frac{1}{2}\cdot x\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}0.7\cdot\frac{1}{3}\cdot x\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right)\mathrm{d}x\\&=0.3\times\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)\mathrm{d}x+0.7\times\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right)\mathrm{d}x\\&=0.3\times\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+4)\varphi(t)\cdot2\mathrm{d}t+0.7\times\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}(3t-1)\varphi(t)\cdot3\mathrm{d}t\\&=0.3\times4+0.7\times(-1)=0.5.\end{aligned}$$

【注】　①$\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)\mathrm{d}t=\mu=0$.

② 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，则分布函数
$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$
即分布函数为 $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$，相应随机变量 X，有 $EX=\mu$.

③ 一般结论：若　$F(x)=k_1\Phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)+k_2\Phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)$，
当 $k_1+k_2=1$ 时，有 $EX=k_1\mu_1+k_2\mu_2$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

多考研资源!

(5) $\frac{1}{5}$.

解　由于

$$\begin{aligned}&\operatorname{Cov}\left(\frac{3X+Y}{2},\frac{X-2Y}{3}\right)\\&=\frac{1}{6}\operatorname{Cov}(3X+Y,X-2Y)\\&=\frac{1}{6}[3\operatorname{Cov}(X,X)+\operatorname{Cov}(Y,X)-6\operatorname{Cov}(X,Y)-2\operatorname{Cov}(Y,Y)]\\&=\frac{1}{6}[3DX-5\operatorname{Cov}(X,Y)-2DY]\\&=\frac{1}{6}(3\sigma^2-5\rho\sigma^2-2\sigma^2)=\frac{1}{6}\sigma^2(1-5\rho)=0,\end{aligned}$$

故 $\rho=\frac{1}{5}$.

三、解答题

(1) 解　(Ⅰ) 由 $P\{X^2=Y^2\}=1$,知 $P\{X^2\neq Y^2\}=0$,故

$$P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0.$$

又　$P\{X=1,Y=-1\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{3}$,

故(X,Y)的联合概率分布为

Y \ X	0	1
-1	0	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	0
1	0	$\frac{1}{3}$

(Ⅱ) 由(Ⅰ),知 XY 的概率分布为

XY	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

故 $E(XY)=0$.

又 $EX=\frac{2}{3}$,$EY=0$,故 $\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0$,所以 $\rho_{XY}=0$.

(2) 解　$E(X+Y-2Z)=EX+EY-2EZ=1+1-2\times(-1)=4$,

$$D(X+Y+Z)=DX+DY+DZ+2\operatorname{Cov}(X,Y)+2\operatorname{Cov}(X,Z)+2\operatorname{Cov}(Y,Z).$$

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=\sqrt{DX\cdot DY}\cdot\rho_{XY}=1\times0=0,$$

$$\operatorname{Cov}(X,Z)=\sqrt{DX\cdot DZ}\cdot\rho_{XZ}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Cov}(Y,Z)=\sqrt{DY\cdot DZ}\cdot\rho_{YZ}=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2},$$

故　$D(X+Y+Z)=1+1+1+0+2\times\frac{1}{2}+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=3.$

(3) 解　由 X,Y 相互独立,可知

$$Z=X-Y\sim N\left(1-1,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right),$$

即 $Z\sim N(0,1)$.

$$\begin{aligned}E(|Z|)&=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz\\&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left[2\int_0^{+\infty}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{2-1}\cdot e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}d\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]\end{aligned}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$E(|Z|^2) = E(Z^2) = DZ + (EZ)^2 = 1 + 0 = 1,$$

故 $$D(|X-Y|) = D(|Z|) = E(|Z|^2) - [E(|Z|)]^2 = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

【注】 ① 计算$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$可以凑微分，也可用 Γ 函数：

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx \xrightarrow{\text{令 } x = y^2} 2\int_0^{+\infty} y^{2\alpha-1} e^{-y^2} dy,$$

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \Gamma(n+1) = n!\ (n \text{ 为正整数}).$$

② 本题若用二维随机变量函数的期望公式

$$E(|X-Y|) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |x-y| f_X(x) f_Y(y) dx dy,$$

计算量较大.

(4) 解 （Ⅰ） $$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 0 \text{（奇函数）},$$

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = E(X^2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-x} dx = 2.$$

（Ⅱ） $$\mathrm{Cov}(X, |X|) = E(X|X|) - EX \cdot E(|X|) = E(X|X|).$$

而 $$E(X|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} x|x| f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x|x| \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 0,$$

故 $\mathrm{Cov}(X, |X|) = 0$，即 X 与 $|X|$ 不相关.

（Ⅲ）对任意给定的 $0 < a < +\infty$，显然事件$\{|X| \leqslant a\}$包含于事件$\{X \leqslant a\}$，且

$$P\{X \leqslant a\} < 1,\ P\{|X| \leqslant a\} > 0,$$

故 $$P\{X \leqslant a, |X| \leqslant a\} = P\{|X| \leqslant a\}.$$

但 $$P\{X \leqslant a\} \cdot P\{|X| \leqslant a\} < P\{|X| \leqslant a\},$$

从而 $$P\{X \leqslant a, |X| \leqslant a\} \neq P\{X \leqslant a\} \cdot P\{|X| \leqslant a\},$$

因此，X 与 $|X|$ 不相互独立.

【注】 ① 本题验证 X 与 $|X|$ 不相互独立，是用定义证明的，若用两个随机变量 X 与 Y 的联合概率密度 $f(x,y)$ 是否等于 $f_X(x) \cdot f_Y(y)$ 来证明，则会带来烦琐的计算.

② 本题也可看出：X, Y 不相关$\nRightarrow X, Y$ 相互独立.

(5) 解 （Ⅰ）用定义法.

$$F_Z(z) = P\{XY \leqslant z\} = P\{XY \leqslant z, Y = -1\} + P\{XY \leqslant z, Y = 1\}$$

$$= P\{-X \leqslant z, Y = -1\} + P\{X \leqslant z, Y = 1\}$$

$$= P\{Y = -1\} \cdot P\{X \geqslant -z\} + P\{Y = 1\} \cdot P\{X \leqslant z\}$$

$$= \frac{1}{4}(1 - P\{X < -z\}) + \frac{3}{4}P\{X \leqslant z\}$$

$$= \frac{1}{4}[1 - \Phi(-z)] + \frac{3}{4}\Phi(z)$$

$$= \frac{1}{4}\Phi(z) + \frac{3}{4}\Phi(z) = \Phi(z),$$

故 $Z = XY$ 服从标准正态分布，其概率密度为

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, -\infty < z < +\infty.$$

（Ⅱ） $$\mathrm{Cov}(Z, X) = \mathrm{Cov}(XY, X) = E(XY \cdot X) - E(XY) \cdot EX$$

$$= E(X^2Y) - EX \cdot EY \cdot EX.$$

又 $$EX = 0,\ E(X^2Y) = E(X^2) \cdot EY\ (X^2 \text{ 与 } Y \text{ 相互独立}),$$

$$E(X^2) = DX + (EX)^2 = 1,\ EY = (-1) \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2},$$

故 $$\mathrm{Cov}(Z, X) = 1 \times \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

(6) 解 （Ⅰ）由 X, Y 相互独立，知 $2X + Y \sim N(2 \times 1 - 2, 2^2 + 1^2)$，即 $Z \sim N(0, 5)$，

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

故 $Z=2X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}e^{-\frac{z^2}{10}},-\infty<z<+\infty.$$

(Ⅱ) $$E(|2X+Y|)=E(|Z|)=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{10}}|z|dz$$

$$=\frac{2}{\sqrt{10\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{10}}dz=\sqrt{\frac{10}{\pi}},$$

$D(|2X+Y|)=D(|Z|)=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2=E(Z^2)-[E(|Z|)]^2.$

而 $E(Z^2)=DZ+(EZ)^2=5+0=5$,所以 $D(|2X+Y|)=5-\frac{10}{\pi}$.

(7) 解 (Ⅰ)依题设,(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}.$

考虑到 $f(x,y)$ 的非零部分取值为常数 $\frac{1}{4}$,可用面积来计算 $P\{X+Y\leqslant z\}$,如图 19-1 所示,

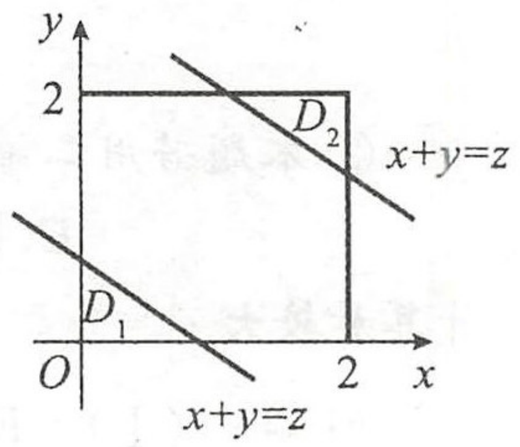


图 19-1

$$F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{S_{D_1}}{S_D}, & 0\leqslant z<2,\\ \frac{S_D-S_{D_2}}{S_D}, & 2\leqslant z<4,\\ 1, & z\geqslant 4\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{z^2}{8}, & 0\leqslant z<2,\\ 1-\frac{(4-z)^2}{8}, & 2\leqslant z<4,\\ 1, & z\geqslant 4,\end{cases}$$

故 $$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{z}{4}, & 0<z\leqslant 2,\\ 1-\frac{z}{4}, & 2<z\leqslant 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ) $$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}z^2\cdot f_Z(z)dz=\int_0^2\frac{z^3}{4}dz+\int_2^4\left(z^2-\frac{z^3}{4}\right)dz=\frac{14}{3}.$$

【注】 由题目条件可判别(X,Y)的两个分量X与Y相互独立(见《李林考研数学系列概率论与数理统计辅导讲义》),且均服从$[0,2]$上的均匀分布,故

$$EX=EY=\frac{2+0}{2}=1,$$

$$DX=DY=\frac{1}{3},E(X+Y)=2,$$

$$D(X+Y)=DX+DY=\frac{2}{3},$$

故 $$E(Z^2)=E[(X+Y)^2]=D(X+Y)+[E(X+Y)]^2=\frac{2}{3}+4=\frac{14}{3}.$$

综合题

一、选择题

(1) C.

解 $E(XY)=EX\cdot EY\Leftrightarrow X,Y$ 不相关,不一定能得 X,Y 相互独立,故排除 A,B.

而 $D(X+Y)=DX+DY\Leftrightarrow X,Y$ 不相关 $\Leftrightarrow E(XY)=EX\cdot EY$,故 C 正确.

$D(XY)=E[(XY)^2]-[E(XY)]^2=E[(XY)^2]-(EX\cdot EY)^2,$

$DX\cdot DY=[E(X^2)-(EX)^2][E(Y^2)-(EY)^2]$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= E(X^2)\cdot E(Y^2) - E(X^2)(EY)^2 - (EX)^2E(Y^2) + (EX)^2(EY)^2,$$

故 D 不一定成立.

【注】 当 X,Y 相互独立时，有结论：

$$D(XY) = DXDY + (EX)^2DY + (EY)^2DX.$$

事实上，由 X,Y 相互独立，知 X^2 与 Y^2 相互独立（反之不一定成立），故

$$\begin{aligned} D(XY) &= E[(XY)^2] - [E(XY)]^2 = E(X^2)\cdot E(Y^2) - (EX)^2\cdot(EY)^2 \\ &= [DX + (EX)^2][DY + (EY)^2] - (EX)^2\cdot(EY)^2 \\ &= DXDY + (EX)^2DY + (EY)^2DX. \end{aligned}$$

(2) A.

解　判别 X 与 Y 是否相关，需计算 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

由 $X \sim N(0,1)$，知

$$EX = 0,\ DX = 1,\ E(X^2) = DX + (EX)^2 = 1,\ E(X^3) = 0,$$
$$E(XY) = E[X(X^2 + X + 1)] = E(X^3) + E(X^2) + EX = 0 + 1 + 0 = 1,$$

所以

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY = 1 - 0 = 1 \neq 0,$$

故 X 与 Y 不是不相关，即 X 与 Y 相关，由此知 X 与 Y 一定不独立.

【注】 ① 由 X,Y 独立 $\not\Rightarrow$ X,Y 不相关，根据逆否命题，若 X 与 Y 相关，则 X,Y 不独立.

② 若 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X,Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ X,Y 不相关.

③ 注意到 ① 中的“不一定”，既不相关又不独立的两个随机变量是存在的.

事实上，X 与 Y 不相关，只能说明 X 与 Y 没有线性关系，至于 X 与 Y 是否独立，要视具体情况.

(3) A.

解　$\rho_{YZ} = \dfrac{\mathrm{Cov}(Y,Z)}{\sqrt{DY}\cdot\sqrt{DZ}}$. 又

$$\mathrm{Cov}(Y,Z) = \mathrm{Cov}(Y,aX+b) = a\mathrm{Cov}(X,Y),$$
$$DZ = D(aX+b) = a^2DX,$$

故

$$\rho_{YZ} = \frac{a\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DY}\sqrt{a^2DX}} = \frac{a}{|a|}\rho_{XY}.$$

又 X,Y 相关，知 $\rho_{XY} \neq 0$，所以 $\rho_{YZ} = \rho_{XY} \Leftrightarrow \dfrac{a}{|a|} = 1$，即 $a > 0$.

(4) D.

解　由 $X \sim U\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，知 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

故

$$EU = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi},$$
$$E(U^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$
$$DU = E(U^2) - (EU)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}.$$

同理，可得 $EV = \dfrac{2}{\pi}$，$DV = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}$. 又

$$E(UV) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi},$$
$$\mathrm{Cov}(U,V) = E(UV) - EU\cdot EV = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} < 0,$$

故

$$-1 < \rho_{UV} = \frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{DU}\cdot\sqrt{DV}} < 0.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

二、填空题

(1) 2.

解　根据概率分布的性质，$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{C}{k!} = Ce = 1$，可得 $C = \mathrm{e}^{-1}$.

注意到 X 服从泊松分布，

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,2,\cdots),$$

对比 $P\{X=k\}=\frac{e^{-1}}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$，知 $\lambda=1$，即 $X\sim P(1)$，故

$$EX=DX=\lambda=1,$$

所以 $$E(X^2)=DX+(EX)^2=1+1^2=2.$$

【注】 常用分布的期望、方差公式应记住，利用方差公式 $DX=E(X^2)-(EX)^2$ 求 $E(X^2)$ 是常用方法.

(2) $\left|\frac{1}{2}-\frac{a}{12}\right|$.

解 由已知，$X\sim U(0,a)$，则 $EX=\frac{a}{2}$，$DX=\frac{a^2}{12}$.

当 $6<a\leqslant 12$ 时，$P\left\{\frac{a}{2}<X<\frac{a^2}{12}\right\}=\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a^2}{12}}\frac{1}{a}dx=\frac{a}{12}-\frac{1}{2}$；

当 $a\leqslant 6$ 时，$P\left\{\frac{a^2}{12}<X<\frac{a}{2}\right\}=\frac{1}{2}-\frac{a}{12}$，故所求概率为 $\left|\frac{1}{2}-\frac{a}{12}\right|$.

(3) $1-\frac{1}{n}$.

解 由已知，X_n 与 $Y=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}\}$ 相互独立，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，记其分布函数分别为 $F_1(x),F_2(x),\cdots,F_n(x)$，概率密度分别为 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$，则

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{\min\{X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}\}\leqslant y\}\\&=1-P\{X_1>y\}\cdot P\{X_2>y\}\cdot\cdots\cdot P\{X_{n-1}>y\}\\&=1-[1-F_1(y)]^{n-1},\end{aligned}$$

故 $f_Y(y)=F_Y'(y)=(n-1)[1-F_1(y)]^{n-2}\cdot f_1(y)$，所以

$$\begin{aligned}P\{X_n>Y\}&=\iint\limits_{x>y}f_n(x)(n-1)f_1(y)[1-F_1(y)]^{n-2}dxdy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)dx\int_{-\infty}^{x}(n-1)f_1(y)[1-F_1(y)]^{n-2}dy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\left\{-[1-F_1(y)]^{n-1}\Big|_{-\infty}^{x}\right\}dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\{1-[1-F_1(x)]^{n-1}\}f_n(x)dx\\&=1+\frac{[1-F_1(x)]^n}{n}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

(4) $\frac{1}{\pi}\ln 2+\frac{1}{2}$.

解 用期望的定义计算.

$$E(\min\{|x|,1\})=\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{|x|,1\}\cdot f(x)dx.$$

当 $|x|\leqslant 1$ 时，$\min\{|x|,1\}=|x|$；当 $|x|\geqslant 1$ 时，$\min\{|x|,1\}=1$，所以

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{|x|,1\}f(x)dx&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{1+x^2}dx+\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\right]\\&=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\right]=\frac{1}{\pi}\ln 2+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(5) 10.

解 令 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 件产品为次品},\\0, & \text{第 } i \text{ 件产品为正品}\end{cases}(i=1,2,\cdots,150)$，则

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_{150}.$$

又因 X_i 的分布律为

X_i	0	1
p	$\frac{14}{15}$	$\frac{1}{15}$

$(i=1,2,\cdots,150)$，

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

所以 $EX_i=\frac{1}{15}$，故　　$EX=\sum_{i=1}^{150}EX_i=150\times\frac{1}{15}=10.$

(6) $-\frac{3}{5}$.

解　由题意，可知 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(1,2)$，$\rho_{XY}=0$，于是

$$EX=EY=1,DX=DY=2,$$

且 X 与 Y 相互独立.

由于 $\rho_{UV}=\frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}$，其中

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U,V)&=\mathrm{Cov}(X+2Y,X-2Y)\\&=\mathrm{Cov}(X,X)-2\mathrm{Cov}(X,Y)+2\mathrm{Cov}(Y,X)-4\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=\mathrm{Cov}(X,X)-4\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=DX-4DY=2-4\times2=-6,\end{aligned}$$

$$DU=D(X+2Y)=DX+4DY=2+4\times2=10,$$

$$DV=D(X-2Y)=DX+4DY=2+4\times2=10,$$

故 $\rho_{UV}=\frac{-6}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=-\frac{3}{5}$.

三、解答题

(1) 解　(Ⅰ) 依题设，$X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立，且都在(0,1)上服从均匀分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant0,\\x, & 0<x<1,\\1, & x\geqslant1.\end{cases}$$

$$d=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}-\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\xlongequal{\text{记}}X_{(n)}-X_{(1)},$$

其中 $X_{(n)}$ 的概率密度为

$$f_{(n)}(x)=n[F(x)]^{n-1}\cdot f(x)=\begin{cases}nx^{n-1}, & 0<x<1,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

$X_{(1)}$ 的概率密度为

$$f_{(1)}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}\cdot f(x)=\begin{cases}n(1-x)^{n-1}, & 0<x<1,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

故

$$EX_{(n)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_{(n)}(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x\cdot nx^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1},$$

$$EX_{(1)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_{(1)}(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x\cdot n(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1},$$

所以

$$Ed=EX_{(n)}-EX_{(1)}=\frac{n}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}.$$

(Ⅱ) 先求 Y 的分布，用 X 表示在(0,1)内任取的数，则 X 在(0,1)内服从均匀分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

记 $A=\left\{X>\frac{2}{3}\right\}$，则 $P(A)=P\left\{X>\frac{2}{3}\right\}=\int_{\frac{2}{3}}^1\mathrm{1d}x=\frac{1}{3}$.

由已知，$Y\sim B\left(n,\frac{1}{3}\right)$，所以

$$EY=n\cdot p=\frac{n}{3},\ DY=np(1-p)=\frac{2n}{9}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

【注】　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，其分布函数为 $F(x)$，则
①$\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为 $[F(x)]^n$；
②$\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为 $1-[1-F(x)]^n$.

(2) 解　(Ⅰ)　$DY_i=D(X_i-\overline{X})=D\left(X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nX_i\right)$

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】 获取更多考研资源!

$$= D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i - \frac{1}{n}\sum_{k\neq i}^{n} X_k\right]$$
$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 DX_i + \frac{1}{n^2}\sum_{k\neq i}^{n} DX_k$$
$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot 1 + \frac{1}{n^2}\cdot(n-1) = \frac{n-1}{n},$$

这里利用了 X_i 与 $\sum\limits_{k\neq i}^{n} X_k$ 相互独立.

(Ⅱ) $$\rho_{Y_1Y_n} = \frac{\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)}{\sqrt{DY_1}\cdot\sqrt{DY_n}}.$$

由(Ⅰ),知 $\sqrt{DY_1}\cdot\sqrt{DY_n} = \frac{n-1}{n}$,故

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n) &= E[(Y_1-EY_1)(Y_n-EY_n)]\\ &= E[(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})](EY_1 = EY_n = 0)\\ &= E(X_1X_n) + E(\overline{X}^2) - E(X_1\overline{X}) - E(X_n\overline{X})\\ &= EX_1\cdot EX_n + D\overline{X} + (E\overline{X})^2 - \frac{1}{n}E(X_1^2) - \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}E(X_iX_1) - \frac{1}{n}E(X_n^2) -\\ &\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}E(X_iX_n),\end{aligned}$$

而

$$D\overline{X} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i = \frac{1}{n^2}\cdot n = \frac{1}{n},$$
$$E(X_1^2) = DX_1 + (EX_1)^2 = 1+0 = 1,$$
$$E(X_n^2) = DX_n + (EX_n)^2 = 1+0 = 1,$$
$$\sum_{i=2}^{n}E(X_iX_1) = \sum_{i=2}^{n}(EX_i\cdot EX_1) = 0,\ \sum_{i=1}^{n-1}E(X_iX_n) = \sum_{i=1}^{n-1}(EX_i\cdot EX_n) = 0,$$

故 $$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n) = 0+\frac{1}{n}+0-\frac{1}{n}-0-\frac{1}{n}-0 = -\frac{1}{n},$$

所以 $$\rho_{Y_1Y_n} = \frac{-\frac{1}{n}}{\frac{n-1}{n}} = -\frac{1}{n-1}.$$

【注】 ①设 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)(i=1,2,\cdots,n)$,则 $E\overline{X} = \mu, D\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}$. 这是统计学中的基本结论.

②X,Y 相互独立 $\Rightarrow E(XY) = EX\cdot EY$, $D(X\pm Y) = DX+DY$.

(3) 解 (Ⅰ)由已知,$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$,所以

$$X\sim B\left(2,\frac{1}{3}\right), Y\sim B\left(2,\frac{1}{3}\right).$$

依题设,(X,Y) 有 9 个取值

$$(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2).$$

由 X,Y 的二项分布计算概率.

$$P\{X=0,Y=0\} = C_2^0\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$
$$P\{X=0,Y=1\} = C_2^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

同理可得

$$P\{X=0,Y=2\} = \frac{1}{9},\ P\{X=1,Y=0\} = \frac{2}{9},$$

微信公众号【神灯考研】 考研人的精神家园
微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{9},\ P\{X=1,Y=2\}=0,\ P\{X=2,Y=0\}=\frac{1}{9},$$
$$P\{X=2,Y=1\}=0,\ P\{X=2,Y=2\}=0.$$

故(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，X,Y的分布律为

X	0	1	2
p	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Y	0	1	2
p	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

由公式$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$，需计算$DX,DY,\mathrm{Cov}(X,Y)$.

$$EX=1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{2}{3},E(X^2)=1^2\times\frac{4}{9}+2^2\times\frac{1}{9}=\frac{8}{9},$$
$$DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{4}{9}.$$

同理
$$EY=\frac{2}{3},\ DY=\frac{4}{9},\ E(XY)=\frac{2}{9},$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{2}{9}-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{2}{9},$$

所以
$$\rho_{XY}=\frac{-\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}=-\frac{1}{2}.$$

(4) 解　（Ⅰ）由已知，X_1与X_2相互独立，故(X_1,X_2)的概率密度为

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda(x_1+x_2)}, & x_1>0,x_2>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设Y的分布函数为$F_Y(y)$，则当$y\leqslant 0$时，$F_Y(y)=0$；当$y>0$时，有

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{\min\{X_1,X_2\}\leqslant y\}=1-P\{X_1>y,X_2>y\}\\&=1-P\{X_1>y\}\cdot P\{X_2>y\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda y}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda y}\\&=1-\mathrm{e}^{-2\lambda y},\end{aligned}$$

故
$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}2\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

（Ⅱ）先求T的分布函数与概率密度.

当$t\leqslant 0$时，$F_T(t)=0$；当$t>0$时，有

$$F_T(t)=P\{T\leqslant t\}=P\{\max\{Y,X_3\}\leqslant t\}=P\{Y\leqslant t,X_3\leqslant t\}.$$

而$Y=\min\{X_1,X_2\}$与X_3相互独立，故

$$F_T(t)=P\{Y\leqslant t\}\cdot P\{X_3\leqslant t\}=(1-\mathrm{e}^{-2\lambda t})(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}),$$

所以
$$f_T(t)=F_T'(t)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}+2\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda t}-3\lambda\mathrm{e}^{-3\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

于是
$$\begin{aligned}ET&=\int_0^{+\infty}t\cdot(\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}+2\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda t}-3\lambda\mathrm{e}^{-3\lambda t})\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{3\lambda}=\frac{7}{6\lambda}.\end{aligned}$$

(5) 解　n个随机变量的函数的期望计算，先求Z的分布函数，从而得Z的概率密度，再用期望定义计算.

由已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$共同的分布函数为

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta.\end{cases}$$

Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}\leqslant z\}\\&=1-P\{\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}>z\}\\&=1-P\{X_1>z,X_2>z,\cdots,X_n>z\}\\&=1-P\{X_1>z\}P\{X_2>z\}\cdots P\{X_n>z\}\\&=1-[1-F(z)]^n\\&=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2n(z-\theta)}, & z>\theta,\\ 0, & z\leqslant\theta,\end{cases}\end{aligned}$$

于是 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2n\mathrm{e}^{-2n(z-\theta)}, & z>\theta,\\ 0, & z\leqslant\theta,\end{cases}$

故 $$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}zf_Z(z)\mathrm{d}z=\int_{\theta}^{+\infty}2nz\mathrm{e}^{-2n(z-\theta)}\mathrm{d}z=\theta+\frac{1}{2n}.$$

(6) 解 (Ⅰ) 依题设,Y_1 与 Y_2 均服从 0－1 分布,故

$$\begin{aligned}E(Y_1)&=P\{Y_1=1\}=1-P\{Y_1=0\}\\&=1-P\{X_1+X_2=1\}=1-3p(1-p)^2,\\E(Y_2)&=P\{Y_2=1\}=1-P\{Y_2=0\}\\&=1-P\{X_2-X_1=2\}=1-P\{X_1=0,X_2=2\}=1-p^2(1-p).\end{aligned}$$

Y_1Y_2 也服从 0－1 分布,故

$$\begin{aligned}P\{Y_1Y_2=0\}&=P\{(Y_1=0)\cup(Y_2=0)\}\\&=P\{Y_1=0\}+P\{Y_2=0\}-P\{Y_1=0,Y_2=0\}\\&=3p(1-p)^2+p^2(1-p),\end{aligned}$$

这里 $P\{Y_1=0,Y_2=0\}=P\{X_2+X_1=1,X_2-X_1=2\}=P\{\varnothing\}=0$,故

$$P\{Y_1Y_2=1\}=1-P\{Y_1Y_2=0\}=1-3p(1-p)^2-p^2(1-p),$$

所以 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=E(Y_1Y_2)-E(Y_1)E(Y_2)$

$$=0\cdot P\{Y_1Y_2=0\}+1\cdot P\{Y_1Y_2=1\}-[1-3p(1-p)^2]\cdot[1-p^2(1-p)]$$

$$=-3p^3(1-p)^3\xlongequal{\text{记}}f(p).$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ),知 $f(p)=-3p^3(1-p)^3$.令

$$f'(p)=-9p^2(1-p)^2\cdot(1-2p)=0,$$

得 $p=0$(舍去),$p=1$(舍去),$p=\frac{1}{2}$.

当 $p<\frac{1}{2}$ 时,$f'(p)<0$;当 $p>\frac{1}{2}$ 时,$f'(p)>0$,故 $p=\frac{1}{2}$ 是 $f(p)$ 在(0,1)内唯一的极小值点,也是最小值点,所以当 $p=\frac{1}{2}$ 时,$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)$ 取值最小.

【注】 求 $P\{X_1+X_2=1\}$,利用 X_1 与 X_2 相互独立.

$$X_1\sim B(1,p),X_2\sim B(2,p),$$

且 X_1 与 X_2 相互独立,则 $X_1+X_2\sim B(1+2,p)=B(3,p)$.

(7) 解 (Ⅰ) 由已知,Y 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

因此 Y 的分布函数为

$$F(y)=\int_{-\infty}^{y}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, & y>1.\end{cases}$$

令 $G(z)$ 是 $Z=X+Y$ 的分布函数,则当 $z<0$ 时,$G(z)=0$;当 $z\geqslant 2$ 时,$G(z)=1$;当 $0\leqslant z<2$ 时,

$$\begin{aligned}G(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}\\&=P\{X+Y\leqslant z,X=0\}+P\{X+Y\leqslant z,X=1\}\\&=P\{X=0,Y\leqslant z\}+P\{X=1,Y\leqslant z-1\}\\&=P\{X=0\}\cdot P\{Y\leqslant z\}+P\{X=1\}\cdot P\{Y\leqslant z-1\}\\&=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z-1\}\end{aligned}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}z+0, & 0\leqslant z<1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(z-1), & 1\leqslant z<2\end{cases}$$
$$=\frac{1}{2}z.$$

综上可得，Z 的分布函数为

$$G(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{z}{2}, & 0\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2,\end{cases}$$

Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=G'(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

即服从 $U[0,2]$.

（Ⅱ）由于

$$\rho_{XZ}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=\frac{E(XZ)-EX\cdot EZ}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}},$$

其中

$$EX=\frac{1}{2},EY=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2},EZ=\frac{0+2}{2}=1,$$
$$DX=p(1-p)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},$$
$$DZ=\frac{(2-0)^2}{12}=\frac{1}{3},$$
$$E(XZ)=E[X(X+Y)]=E(X^2)+E(XY)$$
$$=\frac{1}{2}+EX\cdot EY=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4},$$

故

$$\rho_{XZ}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\times 1}{\sqrt{\frac{1}{4}}\times\sqrt{\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

拓展题

解答题

(1) 解　（Ⅰ）由 X_1 与 X_2 相互独立及 $X_1\sim B(1,p),X_2\sim B(2,p)$，可知

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0,DX_1=p(1-p),DX_2=2p(1-p).$$

由于

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=\mathrm{Cov}(2X_1+X_2,X_1-X_2)=2DX_1-DX_2-\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$$
$$=2p(1-p)-2p(1-p)=0,$$

故

$$\rho_{Y_1Y_2}=\frac{\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)}{\sqrt{DY_1}\sqrt{DY_2}}=0.$$

（Ⅱ）由于

$$\{Y_1=0\}=\{2X_1+X_2=0\}=\{X_1=0,X_2=0\},$$
$$\{Y_2=0\}=\{X_1-X_2=0\}=\{X_1=0,X_2=0\}\cup\{X_1=1,X_2=1\},$$

且 $\{Y_1=0\}\subset\{Y_2=0\},P\{Y_2=0\}<1$，故

$$P\{Y_1=0,Y_2=0\}=P\{Y_1=0\},$$
$$P\{Y_1=0\}\cdot P\{Y_2=0\}<P\{Y_1=0\},$$

从而

$$P\{Y_1=0,Y_2=0\}\neq P\{Y_1=0\}\cdot P\{Y_2=0\},$$

即 Y_1 与 Y_2 不相互独立.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

【注】　此题说明两个随机变量不相关是它们相互独立的必要条件而非充分条件.

(2) 解　（Ⅰ）由

$$P\{X\leqslant b\}=1-P\{X>b\}=\frac{3}{4},P\{X\leqslant a\}=\frac{1}{4},$$

知 $a<b$,故

$$P\{X_1=-1,X_2=-1\}=P\{X\leqslant a,X\leqslant b\}=P\{X\leqslant a\}=\frac{1}{4};$$

$$P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X\leqslant a,X>b\}=0;$$

$$P\{X_1=1,X_2=-1\}=P\{X>a,X\leqslant b\}=P\{a<X\leqslant b\}=\frac{1}{2};$$

$$P\{X_1=1,X_2=1\}=1-\frac{1}{4}-0-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

从而(X_1,X_2)的联合分布与边缘分布为

X_1 \ X_2	-1	1	X_1 的边缘
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
X_2 的边缘	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

(Ⅱ)由(Ⅰ),知

$$EX_1=\frac{1}{2},E(X_1^2)=1,EX_2=-\frac{1}{2},E(X_2^2)=1,$$

故 $DX_1=DX_2=\frac{3}{4},E(X_1X_2)=0$,从而

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-EX_1\cdot EX_2=\frac{1}{4},$$

$$D(X_1-X_2)=DX_1-2\mathrm{Cov}(X_1,X_2)+DX_2=1.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资料

李林考研数学系列　第二十章　大数定律与中心极限定理

基础题

一、选择题

(1)A.

解　由已知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，故 $X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2$ 也独立同分布，又

$$E(X_i^2) = a_2,\ D(X_i^2) = E(X_i^4) - [E(X_i^2)]^2 = a_4 - a_2^2.$$

根据独立同分布的中心极限定理，可知

$$Z_n \xlongequal{\text{记}} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - na_2}{\sqrt{n(a_4 - a_2^2)}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - a_2}{\sqrt{\frac{1}{n}(a_4 - a_2^2)}} = \frac{Y_n - a_2}{\sqrt{\frac{1}{n}(a_4 - a_2^2)}}$$

的极限分布为标准正态分布，故当 n 充分大时，Z_n 近似服从标准正态分布，所以 Y_n 服从 $N\left(a_2, \frac{a_4 - a_2^2}{n}\right)$.

(2)C.

解　列维－林德伯格中心极限定理的条件是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且期望与方差均存在.

满足选项 A，B 的随机变量的期望或方差不一定存在，故排除 A，B.

对于 D，有相同的期望与方差未必有相同的分布，故排除 D.

只有 C 正确，指数分布的期望与方差均存在.

(3)C.

解　依题设，可知 $X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2$ 独立同分布，根据辛钦大数定律，

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - E(X_i^2)\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

即样本的二阶原点矩依概率收敛于随机变量的二阶原点矩.

二、填空题

(1)0.648.

解　由 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 相互独立，及 $X_i \sim B(i, 0.2)$，可知 $\sum_{i=1}^{10} X_i \sim B(55, 0.2)$，所以

$$E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = 11,\ D\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = 8.8,$$

故

$$P\left\{6 < \sum_{i=1}^{10} X_i < 16\right\} = P\left\{\left|\sum_{i=1}^{10} X_i - 11\right| < 5\right\} \geqslant 1 - \frac{8.8}{5^2} = 0.648.$$

【注】 ① 在独立的条件下，二项分布具有可加性，即：设 $X \sim B(m, p)$，$Y \sim B(n, p)$，且 X 与 Y 相互独立，则　$X + Y \sim B(m+n, p)$.

② 切比雪夫不等式：　$P\{|X - EX| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$.

(2)$\frac{1}{12}$.

解
$$E(X+Y) = EX + EY = -2 + 2 = 0,$$
$$D(X+Y) = DX + DY + 2\rho_{XY}\sqrt{DX \cdot DY}$$
$$= 1 + 4 - 2 \times \frac{1}{2} \times 2 = 3,$$

故

$$P\{|X + Y - 0| \geqslant 6\} \leqslant \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

(3)3,2.

解　由已知,$EX=\dfrac{b-1}{2}$,$DX=\dfrac{(b+1)^2}{12}$.又 $P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant 1-\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$.

而已知

$$P\{|X-1|<\varepsilon\}\geqslant\frac{2}{3},$$

故 $EX=1=\dfrac{b-1}{2}$,得 $b=3$,$DX=\dfrac{16}{12}=\dfrac{4}{3}$,所以 $1-\dfrac{DX}{\varepsilon^2}=\dfrac{2}{3}$,故 $\varepsilon=2$.

(4)0.975.

解　令 $Y_i=X_{2i}-X_{2i-1}$,$i=1,2,\cdots,100$,则 Y_i 与 Y_i^2 的分布律分别为

Y_i	-1	0	1
p	0.25	0.5	0.25

Y_i^2	0	1
p	0.5	0.5

由于 $X_1,X_2,\cdots,X_{200}$ 相互独立且同分布,故 $Y_1^2,Y_2^2,\cdots,Y_{100}^2$ 也相互独立,且服从参数为 0.5 的 0－1 分布,由此可知 $\sum\limits_{i=1}^{100}Y_i^2$ 服从二项分布 $B(100,0.5)$.根据棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理,可知 $\sum\limits_{i=1}^{100}Y_i^2$ 近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,且

$$\mu=np=50,\sigma^2=np(1-p)=25,$$

故

$$P\Big\{\sum_{i=1}^{100}(X_{2i}-X_{2i-1})^2\leqslant 59.8\Big\}=P\Big\{\sum_{i=1}^{100}Y_i^2\leqslant 59.8\Big\}\approx\Phi\Big(\frac{59.8-50}{\sqrt{25}}\Big)$$
$$=\Phi(1.96)=0.975.$$

三、解答题

(1)解法 1　设至少要生产 m 件产品,记随机变量 X 为 m 件产品中合格品的件数,则依题设,$X\sim B(m,0.8)$,现要确定 m,使之满足 $P\left\{0.76<\dfrac{X}{m}<0.84\right\}\geqslant 0.90$,利用切比雪夫不等式,得

$$P\{0.76<\frac{X}{m}<0.84\}=P\{|X-0.8m|<0.04m\}$$
$$\geqslant 1-\frac{0.8m\times 0.2}{(0.04m)^2}=1-\frac{100}{m}\geqslant 0.90,$$

故 $m\geqslant 1\,000$,即至少要生产 1 000 件才能满足要求.

解法 2　利用棣莫弗—拉普拉斯定理估计 m 的值,当 n 比较大时,X 近似服从正态分布 $N(0.8m,0.16m)$,故

$$P\Big\{0.76<\frac{X}{m}<0.84\Big\}=P\Big\{\Big|\frac{X-0.8m}{0.4\sqrt{m}}\Big|<\frac{0.04m}{0.4\sqrt{m}}\Big\}$$
$$\approx 2\Phi(0.1\sqrt{m})-1\geqslant 0.90,$$

查正态分布表可得,$0.1\sqrt{m}\geqslant 1.65$,解得 $m\geqslant 272.25$,故 m 至少为 273.

【注】　比较解法 1 与解法 2,可知中心极限定理比切比雪夫不等式要精确.

(2)证　先求 X 的期望和方差.

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n!}\Gamma(n+2)$$
$$=\frac{1}{n!}(n+1)!=n+1,$$
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}x^{n+2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n!}\Gamma(n+3)$$
$$=\frac{1}{n!}(n+2)!=(n+1)(n+2),$$
$$DX=E(X^2)-(EX)^2=(n+1)(n+2)-(n+1)^2=n+1.$$

由切比雪夫不等式,

$$P\{0<X<2(n+1)\}=P\{-(n+1)<X-(n+1)<n+1\}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源

$$= P\{|X-(n+1)|<n+1\}$$
$$\geqslant 1-\frac{DX}{(n+1)^2}=1-\frac{n+1}{(n+1)^2}=\frac{n}{n+1}.$$

(3) 证 先验证满足大数定律的条件.

由已知

$$EX_i=0,\ E(X_i^2)=\frac{2i^2a^2\times 1}{2i^2}=a^2,$$

所以

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=0,$$

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{a^2}{n},$$

满足切比雪夫大数定律条件,故

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-0\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】获取更多考研资源!

第二十一章 数理统计的基本概念

基础题

一、选择题

(1)A.

解 由已知,

$$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2),\ \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1),$$

又$\frac{X_3 - 0}{\sigma} \sim N(0,1)$,故$\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$,所以

$$\frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2}{1}}} = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|} \sim t(1).$$

(2)D.

解 由已知,$X^2 \sim \chi^2(1)$,$Y^2 \sim \chi^2(1)$,知D正确.

由于没有X,Y相互独立的条件,所以A,B,C未必成立.

(3)C.

解 由$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{16}\right)$,故

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1),\ \frac{4(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1),$$

于是

$$P\{|X - \mu| < k\} = P\left\{\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < \frac{k}{\sigma}\right\} = 2\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right) - 1,$$

$$P\{|\overline{X} - \mu| < 4\} = P\left\{\left|\frac{4(\overline{X} - \mu)}{\sigma}\right| < \frac{4^2}{\sigma}\right\} = 2\Phi\left(\frac{4^2}{\sigma}\right) - 1,$$

其中$\Phi(x)$为$N(0,1)$的分布函数,故由已知,$\frac{k}{\sigma} = \frac{4^2}{\sigma}$,即$k = 4^2 = 16$.

(4)C.

解 依题设,知$\sum_{i=1}^{4} X_i \sim N(0,4)$,$\sum_{i=5}^{10} X_i \sim N(0,6)$,故

$$\frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{i=1}^{4} X_i \sim N(0,1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{i=5}^{10} X_i \sim N(0,1).$$

由χ^2分布的定义,知

$$\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{i=1}^{4} X_i\right)^2 \sim \chi^2(1),\ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{i=5}^{10} X_i\right)^2 \sim \chi^2(1),$$

根据χ^2分布的可加性,知

$$T = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4} X_i\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\sum_{i=5}^{10} X_i\right)^2 \sim \chi^2(2).$$

二、填空题

(1)35.

解 由$X \sim N(3.4, 6^2)$,知$\overline{X} \sim N\left(3.4, \frac{6^2}{n}\right)$,故$\frac{\overline{X} - 3.4}{6/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,所以

$$P\{1.4 < \overline{X} < 5.4\} = P\{-2 < \overline{X} - 3.4 < 2\}$$

$$= P\{|\overline{X} - 3.4| < 2\} = P\left\{\frac{|\overline{X} - 3.4|}{6/\sqrt{n}} < \frac{2\sqrt{n}}{6}\right\}$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号:神灯考研 客服微信:KYFT104 QQ群:118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - 1 \geqslant 0.95,$$

即 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geqslant 0.975 = \Phi(1.96)$.

由 $\Phi(x)$ 单调增加，知 $\frac{\sqrt{n}}{3} \geqslant 1.96$，即 $n \geqslant (1.96 \times 3)^2 \approx 34.57$，所以 n 至少应取 35.

(2)26.1.

解　依题设，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，$n = 10$，$\sigma^2 = 4^2$，故

$$P\{S^2 > a\} = P\left\{\frac{(10-1)S^2}{4^2} > \frac{(10-1)a}{4^2}\right\}$$
$$= P\left\{\frac{9S^2}{4^2} > \frac{9a}{16}\right\} = 0.1,$$

故 $\frac{9a}{16} = \chi^2_{0.1}(10-1) = \chi^2_{0.1}(9) = 14.684$，所以 $a \approx 26.1$.

(3)0.95.

解　由 $X \sim F(n,n)$ 及 F 分布的定义，知 $X \sim \frac{\frac{\chi^2(n)}{n}}{\frac{\chi^2(n)}{n}}$，故 $\frac{1}{X} \sim F(n,n)$，即 X 与 $\frac{1}{X}$ 都服从 $F(n,n)$，故 $P\{X > a\} = P\left\{\frac{1}{X} > a\right\}$，所以

$$P\left\{X > \frac{1}{a}\right\} = P\left\{\frac{1}{X} < a\right\} = 1 - P\left\{\frac{1}{X} > a\right\}$$
$$= 1 - P\{X > a\} = 1 - 0.05 = 0.95.$$

(4)2α.

解　由 $X \sim t(n)$，则 $X^2 \sim F(1,n)$，所以

$$P\{Y > k^2\} = P\{X^2 > k^2\} = P\{X > k\} + P\{X < -k\} = 2\alpha.$$

【注】　设 $t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n)$，则 $t^2 \sim F(1,n)$，$\frac{1}{t^2} \sim F(n,1)$，见《李林考研数学系列概率论与数理统计辅导讲义》.

三、解答题

(1) 解　由 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 独立同分布，且均服从 $N(0,2^2)$，故有

$$X_1 + X_2 \sim N(0, 2^2 + 2^2) = N(0,8),$$
$$X_3 + X_4 + X_5 \sim N(0, 2^2 + 2^2 + 2^2) = N(0,12),$$
$$X_6 + X_7 + X_8 + X_9 \sim N(0, 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2) = N(0,16),$$

从而

$$\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{8}} \sim N(0,1), \left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{8}}\right)^2 \sim \chi^2(1),$$
$$\frac{X_3 + X_4 + X_5}{\sqrt{12}} \sim N(0,1), \left(\frac{X_3 + X_4 + X_5}{\sqrt{12}}\right)^2 \sim \chi^2(1),$$
$$\frac{X_6 + X_7 + X_8 + X_9}{\sqrt{16}} \sim N(0,1), \left(\frac{X_6 + X_7 + X_8 + X_9}{\sqrt{16}}\right)^2 \sim \chi^2(1).$$

由独立性及 χ^2 分布的可加性，知

$$\frac{(X_1 + X_2)^2}{8} + \frac{(X_3 + X_4 + X_5)^2}{12} + \frac{(X_6 + X_7 + X_8 + X_9)^2}{16} \sim \chi^2(3),$$

故 $a = \frac{1}{8}, b = \frac{1}{12}, c = \frac{1}{16}$，自由度 $n = 3$.

(2) 解　由 $X \sim N(0,\sigma^2)$，知 $X_i \sim N(0,\sigma^2)$，$X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0,3\sigma^2)$，记

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$U=\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}\sim N(0,1),\ V=\sum_{i=4}^{10}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2=\frac{\sum_{i=4}^{10}X_i^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(7),$$

故 $U^2=\dfrac{(X_1+X_2+X_3)^2}{3\sigma^2}\sim\chi^2(1)$.

记 $W=\dfrac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{\sigma^2}\sim\chi^3(3)$，又 U 与 V 相互独立，则：

$$(\mathrm{I})T_1=\frac{\frac{U^2}{1}}{\frac{V}{7}}=\frac{7}{3}\cdot\frac{(X_1+X_2+X_3)^2}{X_4^2+\cdots+X_{10}^2}\sim F(1,7);$$

$$(\mathrm{II})T_2=\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{7}}}=\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{X_4^2+\cdots+X_{10}^2}}\sim t(7);$$

$$(\mathrm{III})T_3=\frac{\frac{W}{3}}{\frac{V}{7}}=\frac{7}{3}\cdot\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{X_4^2+\cdots+X_{10}^2}\sim F(3,7).$$（由已知，W 与 V 相互独立）

综合题

一、选择题

(1) C.

解　记 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则 S^2 为样本方差，由于 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$，故

$$T=\frac{\overline{X}-0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{\overline{X}}{\frac{S_1}{\sqrt{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{n(n-1)}\,\overline{X}}{S_1}\sim t(n-1).$$

(2) A.

解　由于 $E(X^2)=DX+(EX)^2$，而 DX 与 EX 的矩估计量分别为 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 与 $\overline{X}$，故 $E(X^2)$ 的矩估计量为

$$\overline{X}^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

(3) C.

解　先求 $\overline{X}-\overline{Y}$ 的分布.

由已知，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，$\overline{Y}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，且 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立，故 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(0,\dfrac{2\sigma^2}{n}\right)$，所以 $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma}\sim N\left(0,\dfrac{2}{n}\right)$.

当 n 固定时，

$$P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>\sigma\}=1-P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma}\right|\leqslant 1\right\}=1-\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]$$

$$=2\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right],$$

其中 $\Phi(x)$ 为 $N(0,1)$ 的概率分布函数，所以 $P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>\sigma\}$ 与 σ 无关，C 正确.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

二、解答题

(1) 解　$(\mathrm{I})T_1=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}X_i^2+\sum_{i=1}^{n}X_{2i-1}X_{2i}$

$$=\frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{2n-1}^2+X_{2n}^2)+X_1X_2+X_3X_4+\cdots+X_{2n-1}X_{2n}$$

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$= \frac{1}{2}(X_1+X_2)^2+\frac{1}{2}(X_3+X_4)^2+\cdots+\frac{1}{2}(X_{2n-1}+X_{2n})^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_{2i-1}+X_{2i}}{\sqrt{2}}\right)^2 \xlongequal{\text{记}} \sum_{i=1}^{n}Y_i^2.$$

由 $X_{2i-1}\sim N(0,1), X_{2i}\sim N(0,1)$，知 $X_{2i-1}+X_{2i}\sim N(0,2)$，故

$$Y_i=\frac{X_{2i-1}+X_{2i}}{\sqrt{2}}\sim N(0,1),$$

所以 $T_1=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\sim\chi^2(n)$.

(Ⅱ) $T_2=\dfrac{\sqrt{2n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{2n}X_i^2}}=\dfrac{X_1}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=2}^{2n}X_i^2}{2n-1}}}\sim t(2n-1)$（这里 $\sum_{i=2}^{2n}X_i^2\sim\chi^2(2n-1)$）.

(Ⅲ) 由 $\sum_{i=1}^{3}X_i^2\sim\chi^2(3)$，$\sum_{i=4}^{2n}X_i^2\sim\chi^2(2n-3)$，且相互独立，故

$$T_3=\frac{(2n-3)\sum_{i=1}^{3}X_i^2}{3\sum_{i=4}^{2n}X_i^2}=\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{3}X_i^2}{3}}{\dfrac{\sum_{i=4}^{2n}X_i^2}{2n-3}}\sim F(3,2n-3).$$

(2) 证　利用 t 分布的定义证明，令 $Y_1=X_2+X_3$，$Y_2=X_2-X_3$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)&=E(Y_1Y_2)-EY_1EY_2\\&=E[(X_2+X_3)(X_2-X_3)]\\&=E(X_2^2)-E(X_3^2)\\&=\sigma^2-\sigma^2=0,\end{aligned}$$

所以 Y_1, Y_2 相互独立且均服从 $N(0,2\sigma^2)$. 又由已知，Y_1, Y_2 与 X_1 独立，则

$$X_1+X_2+X_3=X_1+Y_1\sim N(0,3\sigma^2),$$

故 $\dfrac{1}{\sqrt{3}\sigma}(X_1+X_2+X_3)\sim N(0,1)$.

又 $\left(\dfrac{X_2-X_3}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$，且 $X_1+X_2+X_3$ 与 X_2-X_3 相互独立，故由 t 分布的定义，知

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{X_1+X_2+X_3}{|X_2-X_3|}\sim t(1).$$

(3) 解　(Ⅰ) 先确定 Y 服从的分布. 依题设，

$$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2),\ \overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right),$$

且 X_{n+1} 与 $\overline{X}$ 相互独立，故 $X_{n+1}-\overline{X}\sim N\left(0,\dfrac{n+1}{n}\sigma^2\right)$，所以

$$\left(\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\sigma}\right)^2=\frac{n}{(n+1)\sigma^2}(X_{n+1}-\overline{X})^2=Y\sim\chi^2(1).$$

由 χ^2 分布的性质，$EY=1$，$DY=2$.

(Ⅱ) 由已知，样本方差 S^2 与 $\overline{X}$ 独立，X_{n+1} 与 S^2 独立，且 $\overline{X}, X_{n+1}, S^2$ 相互独立，故 S^2 与 $(X_{n+1}-\overline{X})^2$ 也独立，所以

$$\frac{\dfrac{n}{(n+1)\sigma^2}(X_{n+1}-\overline{X})^2}{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(X_{n+1}-\overline{X})^2}{S^2}\sim F(1,n-1),$$

即 $k=\dfrac{n}{n+1}$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

李林考研数学系列

第二十二章　参数估计

基础题

解答题

(1) 解　由　$EX=\theta^2+2\cdot 2\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=-2\theta+3$，

得 $\theta=\dfrac{3-EX}{2}$，故 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{x}}{2}$. 又

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{1+2+1}{3}=\frac{4}{3},$$

所以 $\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$.

似然函数为 $L(\theta)=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2=2\theta^5(1-\theta)$. 取对数，得

$$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta),$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{5}{\theta}-\dfrac{1}{1-\theta}=0$，解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$.

(2) 解

$$\begin{aligned}EX&=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x;\lambda)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda^x\ln\lambda\mathrm{d}x\\&=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}(\lambda^x)=-x\lambda^x\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\lambda^x\mathrm{d}x\\&=\frac{\lambda^x}{\ln\lambda}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{\ln\lambda},\end{aligned}$$

即 $EX=-\dfrac{1}{\ln\lambda}$，解得 $\lambda=\mathrm{e}^{-\frac{1}{EX}}$，故 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{\overline{X}}}$，其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

(3) 解　(Ⅰ) 由

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot\sqrt{\theta}\cdot x^{\sqrt{\theta}-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1},$$

解得 $\theta=\left(\dfrac{EX}{1-EX}\right)^2$，故 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{\overline{x}}{1-\overline{x}}\right)^2$.

(Ⅱ) 似然函数为 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1}$. 取对数，得

$$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{n^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}$.

(4) 解　由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}}\mathrm{d}x=0,$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\frac{x}{\theta}=t}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta^2\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&=\theta^2\Gamma(3)=\theta^2\cdot 2!=2\theta^2,\end{aligned}$$

故 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}$. 又由 $\hat{\theta}^2=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$，得

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$E(\hat{\theta}^2)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x\right]=\theta^2.$$

(5) 解 （Ⅰ）由已知，似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0\leqslant x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant\theta,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

要使 $L(\theta)$ 最大，θ 应尽量小，但 $0\leqslant x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant\theta$，即 θ 应大于等于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的每一个，故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

（Ⅱ）$\hat{\theta}$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}n\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{\theta}=\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}, & 0\leqslant x\leqslant\theta,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$ 故

$$E(\hat{\theta})=\int_0^{\theta}x\cdot\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}\theta,$$

$$E(\hat{\theta}^2)=\int_0^{\theta}x^2\cdot\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+2}\theta^2,$$

所以 $$D(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}^2)-[E(\hat{\theta})]^2=\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

(6) 解 （Ⅰ）由已知，X 服从几何分布，故其分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},k=1,2,\cdots.$$

（Ⅱ） $$EX=\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p},$$

即 $p=\dfrac{1}{EX}$，故 $\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$ 为矩估计量.

设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的样本值，则似然函数为

$$L(p)=\prod^{n}p(1-p)^{x_k-1}=p^n(1-p)^{\sum_{k=1}^{n}x_k-n}.$$

取对数，得 $$\ln L(p)=n\ln p+\left(\sum_{k=1}^{n}x_k-n\right)\ln(1-p).$$

由 $$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\frac{n}{p}-\frac{1}{1-p}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k-n\right)=0,$$

解得 p 的最大似然估计量为 $\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$.

【注】 几何分布的期望和方差分别为 $EX=\dfrac{1}{p},DX=\dfrac{1-p}{p^2}(0<p<1)$，应牢记.

(7) 解 （Ⅰ）由已知，X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty,$$

似然函数为 $$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}}=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{10}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}x_i^2}.$$

取对数，得 $$\ln L(\sigma^2)=-\frac{10}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}x_i^2.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\sigma^2)}\ln L(\sigma^2)=0$，得 $-\dfrac{10}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{10}x_i^2=0$，故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i^2$.

（Ⅱ）由（Ⅰ），知 $X\sim N(0,\hat{\sigma}^2)$，则

$$EU=E\left(\sum_{i=1}^{6}X_i\right)=0,\ EV=E\left(\sum_{i=5}^{10}X_i\right)=0,$$

$$DU=D\left(\sum_{i=1}^{6}X_i\right)=6\hat{\sigma}^2,\ DV=D\left(\sum_{i=5}^{10}X_i\right)=6\hat{\sigma}^2.$$

又 $$\mathrm{Cov}(U,V)=\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{6}X_i,\sum_{j=5}^{10}X_j\right)=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=5}^{10}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=DX_5+DX_6=2\hat{\sigma}^2,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

其中，当 $i \neq j$ 时，$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$；当 $i = j$ 时，$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = DX_i = \hat{\sigma}^2$，故

$$\rho_{UV} = \frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}} = \frac{2\hat{\sigma}^2}{6\hat{\sigma}^2} = \frac{1}{3}.$$

(8) 解 （Ⅰ）似然函数为

$$L(\mu) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}x_i} e^{-\frac{1}{2}(\ln x_i - \mu)^2}, & x_i > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

取对数，得 $$\ln L(\mu) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n + \ln \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \mu)^2.$$

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\ln L(\mu) = \sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \mu) = 0$，得 μ 的最大似然估计量为 $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$.

（Ⅱ） $$F_Y(x) = P\{Y \leqslant x\} = P\{\ln X \leqslant x\} = P\{X \leqslant e^x\}$$

$$= \int_0^{e^x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} e^{-\frac{1}{2}(\ln t - \mu)^2} \mathrm{d}t \xlongequal{\ln t = u} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(u-\mu)^2} \mathrm{d}u,$$

故 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$，所以 $E(\ln X) = \mu$，故

$$E\hat{\mu} = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\ln X_i) = \mu.$$

(9) 解 由已知，$E\hat{\theta} = \sigma^2$，由于

$$E\left[k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2\right] = k\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1} - X_i)^2$$

$$= k\sum_{i=1}^{n-1}\{D(X_{i+1} - X_i) + [E(X_{i+1} - X_i)]^2\}$$

$$= k\sum_{i=1}^{n-1}(DX_{i+1} + DX_i) = 2(n-1)k\sigma^2 = \sigma^2,$$

故 $k = \frac{1}{2(n-1)}$.

(10) 证 依题意，得

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)\mathrm{d}x = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{3x^2}{\theta^3}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\theta,$$

$$E\left(\frac{4}{3}\overline{X}\right) = \frac{4}{3}E\overline{X} = \frac{4}{3}EX = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\theta = \theta,$$

所以 $\frac{4}{3}\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计量.

又 X 的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{x^3}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 1, & x \geqslant \theta, \end{cases}$$

$Y_n = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数 $F_{Y_n}(x)$ 为

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= P\{\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \leqslant x\} \\ &= P\{X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant x, \cdots, X_n \leqslant x\} \\ &= P\{X_1 \leqslant x\}P\{X_2 \leqslant x\}\cdots P\{X_n \leqslant x\} \\ &= [F(x)]^n, \end{aligned}$$

故 Y_n 的概率密度为

$$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = \begin{cases} n\left(\frac{x^3}{\theta^3}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{\theta^3} \cdot x^2 = \frac{3nx^{3n-1}}{\theta^{3n}}, & 0 \leqslant x \leqslant \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

所以 $$E(Y_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{Y_n}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{3nx^{3n-1}}{\theta^{3n}}\mathrm{d}x = \frac{3n}{3n+1}\theta,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

故 $E\left(\frac{3n+1}{3n}Y_n\right)=\frac{3n+1}{3n}\cdot\frac{3n}{3n+1}\theta=\theta$，即 $\frac{3n+1}{3n}Y_n$ 也是 θ 的无偏估计量.

(11) 解 由已知，X 的分布律为 $P\{X=x\}=p^x\cdot(1-p)^{1-x}$，$x=0,1$. 似然函数为

$$L(p)=p^x\cdot(1-p)^{1-x},x=0,1.$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\frac{x}{p}-\frac{1-x}{1-p}=0$，得唯一解 $p=x$，但 $x\notin\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$，因此 $\hat{p}=x$ 不能作为 p 的最大似然估计，用定义求.

由
$$L(p)=\begin{cases}p, & x=1,\\ 1-p, & x=0,\end{cases}$$
当 $x=0$ 时，$L(p)=1-p$ 关于 p 单调减少，故 $\hat{p}=\frac{1}{4}$；当 $x=1$ 时，$L(p)=p$ 关于 p 单调增加，故 $\hat{p}=\frac{3}{4}$，所以 p 的最大似然估计值为 $\hat{p}=\frac{2x+1}{4}$，$x=0,1$.

(12) 解 （Ⅰ）先写出 X 的概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}1, & \theta-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\theta+\frac{1}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x=\theta,$$

故 $\hat{\theta}_1=\overline{X}$ 为矩估计量.

（Ⅱ）似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(\theta)=\begin{cases}1, & \theta-\frac{1}{2}\leqslant x_i\leqslant\theta+\frac{1}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

$L(\theta)$ 是常值函数，仅取 0，1，所以只要满足 $\theta-\frac{1}{2}\leqslant x_i\leqslant\theta+\frac{1}{2}$ 的任何 θ 都使 $L(\theta)$ 取到最大值 1，由此得
$$\theta-\frac{1}{2}\leqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\},\ \theta+\frac{1}{2}\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\},$$
所以 $\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}-\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}+\frac{1}{2}$，因此满足 $\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}-\frac{1}{2}\leqslant g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\min_{1\leqslant i\leqslant 1}\{x_i\}+\frac{1}{2}$ 的任何统计量 $g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是 θ 的最大似然估计量，如取 $\hat{\theta}_2=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}+\frac{1}{2}$ 或 $\hat{\theta}_2=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}-\frac{1}{2}$.

【注】 由此题，知最大似然估计并不唯一.

(13) 解 注意到对任何总体 X，$\overline{X}$ 和 S^2 是总体 X 的期望和方差的无偏估计量.

（Ⅰ）由 X 服从泊松分布，故 $E\overline{X}=E(S^2)=\lambda$，于是
$$E[C\overline{X}+(1-C)S^2]=CE\overline{X}+(1-C)E(S^2)=C\lambda+(1-C)\lambda=\lambda,$$
即 T 是 λ 的无偏估计量.

（Ⅱ）先求 λ 的最大似然估计量. 泊松分布的概率密度为
$$P(x;\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}(x=0,1,2,\cdots),$$
似然函数为
$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i!}\right)\lambda^{n\overline{X}}\cdot\mathrm{e}^{-n\lambda}.$$
取对数，得
$$\ln L(\lambda)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i!}\right)+n\overline{X}\ln\lambda-n\lambda.$$
对 λ 求导，有
$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{n\overline{X}}{\lambda}-n=0\Rightarrow\hat{\lambda}=\overline{X}$$
为 λ 的最大似然估计量，由于 $P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X=0\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda}$ 是 λ 的单调函数，根据最大似然估计量的不变性，$1-\mathrm{e}^{-\overline{X}}$ 为 $P\{X\geqslant 1\}$ 的最大似然估计量.

(14) 解 （Ⅰ）由已知，X 的概率密度为 $f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

$$f_{X_{(n)}}(x)=F'_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以

$$E(2\overline{X})=E\Big(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)=\frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{\theta}{2}=\theta,$$

$$E\Big(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\Big)=\frac{n+1}{n}\int_0^\theta\frac{nx^n}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\theta=\theta,$$

故 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 是 θ 的无偏估计.

(Ⅱ) $$D(\hat{\theta}_1)=D(2\overline{X})=\frac{4}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n},$$

$$E(X_{(n)}^2)=\int_0^\theta\frac{nx^{n+1}}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+2}\theta^2,$$

故 $$D(\hat{\theta}_2)=\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2\{E(X_{(n)}^2)-[EX_{(n)}]^2\}=\frac{\theta^2}{n(n+2)},$$

当 $n\geqslant 2$ 时，$D(\hat{\theta}_2)<D(\hat{\theta}_1)$，故 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

【注】 $X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数 $F_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n}{\theta^n}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(15) 解 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，知 X 的概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(-\infty<x<+\infty),$$

似然函数为 $$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

取对数，得 $$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

由于 $$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\mu\Big)=0,\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0,\end{cases}$$

故最大似然估计量为 $\hat{\mu}=\overline{X}$，$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

(16) 解 $$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\mu|}\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}(t+\mu)\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t=\mu\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\mu,$$

故 μ 的矩估计值为 $\hat{\mu}=\overline{x}=\dfrac{1}{3}(1\,028+968+1\,007)=1\,001.$

似然函数为 $L(\mu)=\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^3\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{3}|x_i-\mu|}$. 取对数，得 $\ln L(\mu)=-3\ln 2-\sum\limits_{i=1}^{3}|x_i-\mu.$

要使 $\ln L(\mu)$ 最大，只要 $\sum\limits_{i=1}^{3}|x_i-\mu|$ 最小.

记 $$m=\sum_{i=1}^{3}|x_i-\mu|=|1\,028-\mu|+|968-\mu|+|1\,007-\mu|,$$

当 $\mu\leqslant 968$ 时，

$m=(1\,028-\mu)+(968-\mu)+(1\,007-\mu)=3(1\,001-\mu)\geqslant 3(1\,001-968)=99$；

当 $\mu\geqslant 1\,028$ 时，

$m=(\mu-1\,008)+(\mu-968)+(\mu-1\,007)=3(\mu-1\,001)\geqslant 3(1\,028-1\,001)=81$；

当 $986<\mu<1\,028$ 时，$m=(1\,028-\mu)+(\mu-968)+|1\,007-\mu|=60+|1\,007-\mu|$，

故当 $\mu=1\,007$ 时，m 最小，取值为 60，所以 μ 的最大似然估计值为 $\hat{\mu}=1\,007$.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(17) 解 （Ⅰ）当 λ_1 已知时，

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x;\lambda_1,\lambda_2)\mathrm{d}x = \int_{\lambda_1}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\lambda_2} e^{-\frac{x-\lambda_1}{\lambda_2}} \mathrm{d}x$$

$$\xrightarrow{x=\lambda_1+\lambda_2 y} \int_0^{+\infty} (\lambda_2 y + \lambda_1) e^{-y} \mathrm{d}y = \lambda_1 + \lambda_2,$$

用 $\overline{X}$ 替换 EX，得 λ_2 的矩估计量为 $\hat{\lambda}_2 = \overline{X} - \lambda_1$.

关于 λ_2 的似然函数为

$$L(\lambda_2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_2} e^{-\frac{x_i-\lambda_1}{\lambda_2}} = \frac{1}{\lambda_2^n} e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\lambda_1}{\lambda_2}}, \lambda_1 \leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n.$$

由

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda_2)}{\mathrm{d}\lambda_2} = -\frac{n}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \lambda_1) = 0,$$

解得 $\hat{\lambda}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \lambda_1)$ 是 λ_2 的最大似然估计量.

（Ⅱ）

$$EX = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_{\lambda_1}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\lambda_2} e^{-\frac{x-\lambda_1}{\lambda_2}} \mathrm{d}x$$

$$\xrightarrow{x=\lambda_1+\lambda_2 y} \int_0^{+\infty} (\lambda_2 y + \lambda_1)^2 e^{-y} \mathrm{d}y$$

$$= 2\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2,$$

则 $DX = E(X^2) - (EX)^2 = \lambda_2^2$.

令 $EX = \overline{X}$, $DX = \frac{n-1}{n}S^2$ ($S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 为样本方差），

故 $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \overline{X}, \\ \lambda_2^2 = \frac{n-1}{n}S^2, \end{cases}$ 所以 λ_1, λ_2 的矩估计量为

$$\hat{\lambda}_1 = \overline{X} - \sqrt{\frac{n-1}{n}S^2}, \hat{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{n-1}{n}S^2}.$$

关于 λ_1, λ_2 的似然函数为

$$L(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{\lambda_2^n} e^{-\frac{1}{\lambda_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\lambda_1)}, \lambda_1 \leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n,$$

取对数，求偏导数，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1} = \dfrac{n}{\lambda_2} = 0, & ① \\ \dfrac{\partial \ln L(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2} = -\dfrac{n}{\lambda_2} + \dfrac{1}{\lambda_2^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \lambda_1) = 0, & ② \end{cases}$$

由 ② 式，得 $\lambda_2 = \overline{x} - \lambda_1$. ① 式无解，用最大似然估计原理求 λ_1, λ_2 的最大似然估计量.

由 $L(\lambda_1,\lambda_2)$ 的表达式知，当 $\hat{\lambda}_1$ 使 $L(\lambda_1,\lambda_2) > 0$ 且使 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \lambda_1)$ 达到最小时，才能使 $L(\lambda_1,\lambda_2)$ 达到最大.

由 $x_i \geqslant \lambda_1 (i = 1,2,\cdots,n)$，即 $\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \geqslant \lambda_1$ 时，有 $L(\lambda_1,\lambda_2) > 0$，若使 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \lambda_1)$ 在 $\hat{\lambda}_1$ 处达到最小，应取 $\hat{\lambda}_1 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，故当 $\hat{\lambda}_1 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 时，有 $L(\lambda_1,\lambda_2) \leqslant L(\hat{\lambda}_1,\lambda_2)$.

当 $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1$ 时，由 ② 式，知 $\hat{\lambda}_2 = \overline{x} - \hat{\lambda}_1$，由 $\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\hat{\lambda}_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \ln L(\hat{\lambda}_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2^2} < 0, \end{cases}$ 故 $L(\hat{\lambda}_1,\lambda_2)$ 在 $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2$ 处达到最大，故有 $L(\hat{\lambda}_1,\lambda_2) \leqslant L(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2)$，从而知 λ_1, λ_2 的最大似然估计量为

$$\hat{\lambda}_1 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, \hat{\lambda}_2 = \overline{X} - \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}.$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

(18) 解 （Ⅰ）由已知，Y 的概率密度为 $f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}(-\infty<y<+\infty)$. 故

$$EX=E(e^Y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^y\cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy$$

$$\xlongequal{t=y-\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t+\mu}\cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

$$=e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}dt=e^{\mu+\frac{1}{2}}\cdot 1=e^{\mu+\frac{1}{2}}.$$

（Ⅱ）当置信度 $1-\alpha=0.95$，即 $\alpha=0.05$，标准正态分布的分位数 $\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}=\mu_{0.975}=1.96$.

由 $\overline{Y}\sim N\left(\mu,\frac{1}{4}\right)$，得 $P\{\overline{y}-1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}<\mu<\overline{y}+1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}\}=0.95$. 又

$$\overline{y}=\frac{1}{4}(\ln 0.5+\ln 1.25+\ln 0.8+\ln 2)=\frac{1}{4}\ln 1=0,$$

故 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\overline{y}-1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}},\ \overline{y}+1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}\right)=(-0.98,0.98).$$

（Ⅲ）由 e^x 严格单调增加，知 $EX=e^{\mu+\frac{1}{2}}$ 的 0.95 置信区间为

$$(e^{\overline{y}-0.98+\frac{1}{2}},e^{\overline{y}+0.98+\frac{1}{2}})=(e^{-0.48},e^{1.48}).$$

【注】 将 x_i 的样本值变形为 $y_i=\ln x_i$，利用 $\overline{Y}$ 的分布求出 $EX=E(e^Y)$ 以及 μ 的置信区间，而 EX 是 μ 的单值函数，从而求出 EX 的置信区间.

拓展题

解答题

(1) 解 （Ⅰ）用定义法求 $f_{Y_1}(y)$.

当 $y\geqslant 0$ 时，

$$F_{Y_1}(y)=P\{Y_1\leqslant y\}=P\{|X_1-\mu|\leqslant y\}$$

$$=P\{-y\leqslant X_1-\mu\leqslant y\}=P\{-\frac{y}{\sigma}\leqslant\frac{X_1-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{y}{\sigma}\}$$

$$=\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{y}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)-1;$$

当 $y<0$ 时，$F_{Y_1}(y)=0$，故

$$f_{Y_1}(y)=F_{Y_1}'(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sigma}\varphi\left(\frac{y}{\sigma}\right), & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0,\end{cases}$$

其中 $\Phi(x)$ 为 $N(0,1)$ 的分布函数，$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

（Ⅱ）

$$EY_1=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{Y_1}(y)dy=\int_0^{+\infty}\frac{2y}{\sigma}\varphi\left(\frac{y}{\sigma}\right)dy$$

$$=2\sigma\int_0^{+\infty}\frac{y}{\sigma}\varphi\left(\frac{y}{\sigma}\right)d\left(\frac{y}{\sigma}\right)$$

$$\xlongequal{\frac{y}{\sigma}=t}2\sigma\int_0^{+\infty}t\varphi(t)dt=2\sigma\int_0^{+\infty}t\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}d\left(\frac{t^2}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

故 $\sigma=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot EY_1$，所以 σ 的矩估计量为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\overline{Y}$，其中 $\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=Y$.

（Ⅲ）记 $Z_i=X_i-\mu\sim N(0,\sigma^2)$，则 $EZ_i=0$，$DZ_i=\sigma^2$，故

$$E(|X_i-\mu|)=E(|Z_i|)=EY_i=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

$$D(|X_i-\mu|)=D(|Z_i|)=E(|Z_i|^2)-(E|Z_i|)^2$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　客服微信：KYFT104　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源

$$= E(Z_i^2) - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right)^2$$
$$= DZ_i + (EZ_i)^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right)^2$$
$$= \sigma^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right)^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\sigma^2,$$

所以　　$EY = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} | X_i - \mu |\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(| Z_i |) = E(| Z_i |) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$

又 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，故

$$DY = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} | X_i - \mu |\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DY_i = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

【注】　此题(Ⅰ)(Ⅱ)实际上是2017年考题，事实上这是一个结论：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且均服从 $N(\mu, \sigma^2)$，$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} | X_i - \mu |$，则

$$EY = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,\ DY = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

(2) 解　(Ⅰ) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x;\theta)\mathrm{d}x$
$$= \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}\mathrm{d}x \xlongequal{x-\theta=t} 2\int_{0}^{+\infty} (t+\theta)\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$$
$$= \int_{0}^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t + \theta\int_{0}^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} (2t)^{2-1}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}(2t) - \theta \cdot \mathrm{e}^{-2t}\Big|_{0}^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \Gamma(2) + \theta = \frac{1}{2} \times 1 + \theta = \frac{1}{2} + \theta,$$

故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1 = \overline{X} - \frac{1}{2}$.

似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} 2^n \mathrm{e}^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_i > \theta (i = 1,2,\cdots,n), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $x_i > \theta$ 时，$L(\theta) > 0$，取对数，得

$$\ln L(\theta) = n\ln 2 - 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta).$$

因为 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 2n > 0$，所以 $L(\theta)$ 单调增加. 由于 θ 满足 $\theta < x_i (i = 1,2,\cdots,n)$，所以 θ 取 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的最小值，$L(\theta)$ 取得最大值，故 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}_2 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}.$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)，知 $\hat{\theta}_1 = \overline{X} - \frac{1}{2}$，则

$$E(\hat{\theta}_1) = E(\overline{X}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \theta - \frac{1}{2} = \theta,$$

故 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计量.

可求得 $\hat{\theta}_2 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

故
$$E(\hat{\theta}_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot 2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{x-\theta=u} \int_{0}^{+\infty} (u+\theta) \cdot 2n\mathrm{e}^{-2nu}\mathrm{d}u = \frac{1}{2n} + \theta \neq \theta,$$

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

所以$\hat{\theta}_2$不是θ的无偏估计量.

(Ⅲ)由(Ⅱ),知$E(\hat{\theta}_1)=\theta$,故取$\hat{\theta}_3=\hat{\theta}_1=\overline{X}-\frac{1}{2}$.

$E(\hat{\theta}_2)=\frac{1}{2n}+\theta$,取$\hat{\theta}_4=\hat{\theta}_2-\frac{1}{2n}$,则

$$E(\hat{\theta}_4)=E(\hat{\theta}_2)-\frac{1}{2n}=\theta,$$

这样选取得到θ的两个无偏估计量$\hat{\theta}_3$和$\hat{\theta}_4$.

下面比较$D(\hat{\theta}_3)$与$D(\hat{\theta}_4)$.

$$D(\hat{\theta}_3)=D\left(\overline{X}-\frac{1}{2}\right)=D(\overline{X})=\frac{DX}{n},$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty}x^2\cdot 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x-\theta=t}\int_0^{+\infty}(t+\theta)^2\cdot 2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}t^2\cdot 2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t+2\theta\int_0^{+\infty}t\cdot 2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t+\theta^2\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}+\theta+\theta^2,\end{aligned}$$

故 $$DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{1}{2}+\theta+\theta^2-\left(\frac{1}{2}+\theta\right)^2=\frac{1}{4}.$$

所以$D(\hat{\theta}_3)=\frac{1}{4n}$.

$$D(\hat{\theta}_4)=D\left(\hat{\theta}_2-\frac{1}{2n}\right)=D(\hat{\theta}_2),$$

又$D(\hat{\theta}_2)=E(\hat{\theta}_2^{\,2})-[E(\hat{\theta}_2)]^2$,而

$$\begin{aligned}E(\hat{\theta}_2^{\,2})&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty}x^2\cdot 2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x-\theta=t}\int_0^{+\infty}(t+\theta)^2\cdot 2n\mathrm{e}^{-2nt}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}t^2\cdot 2n\mathrm{e}^{-2nt}\mathrm{d}t+2\theta\int_0^{+\infty}t\cdot 2n\mathrm{e}^{-2nt}\mathrm{d}t+\theta^2\int_0^{+\infty}2n\mathrm{e}^{-2nt}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{(2n)^2}+\frac{2\theta}{2n}+\theta^2=\frac{1}{2n^2}+\frac{\theta}{n}+\theta^2,\end{aligned}$$

故 $$D(\hat{\theta}_2)=\frac{1}{2n^2}+\frac{\theta}{n}+\theta^2-\left(\frac{1}{2n}+\theta\right)^2=\frac{1}{4n^2}.$$

显然$D(\hat{\theta}_2)=\frac{1}{4n^2}<\frac{1}{4n}=D(\hat{\theta}_3)(n>1)$,所以$\hat{\theta}_4$比$\hat{\theta}_3$有效.

【注】 题中计算中用到$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x(\alpha>0)$.

$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$,$\Gamma(n+1)=n!$,$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$,$\Gamma(1)=1$.

Γ函数在考试中常用到.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研 客服微信：KYFT104 QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

李林考研数学系列

第二十三章　假设检验

基 础 题

一、选择题

A.

解　由 $P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\} = \alpha$，知 A 正确.

二、填空题

$\dfrac{\overline{X}\sqrt{n(n-1)}}{Q}$.

解　当 H_0 成立时，有 $\dfrac{\overline{X}-0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，而

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

即 $\dfrac{Q^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，且相互独立，故

$$T = \frac{\dfrac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{Q^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\overline{X}\sqrt{n(n-1)}}{Q} \sim t(n-1).$$

三、解答题

(1) 解　此题是方差 $\sigma^2 = 2.6^2$ 已知，检验假设

$$H_0: \mu \geqslant \mu_0 = 12,\ H_1: \mu < \mu_0 = 12.$$

选用统计量 $U = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，将

$$\overline{x} = 11.2,\ \mu_0 = 12,\ \sigma = 2.6,\ n = 100$$

代入计算，得 $U = -3.08$，而 $\alpha = 0.05$，故 $\Phi(U_0) = 1-\alpha = 0.95$，所以 $U_0 = 1.645$，从而

$$-U_0 = -1.645,\ U = -3.08 < -1.645,$$

故拒绝 H_0，即不能认为小头平均直径在 12 cm 以上.

(2) 解　设 $H_0: \sigma^2 \leqslant 15^2$，$H_1: \sigma^2 > 15^2$，统计量为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1),$$

当 $\alpha = 0.05$，$\chi^2_{0.05}(9) = 16.919$ 时，拒绝域为 $[16.919, +\infty)$.

又由于

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{9\times 30^2}{15^2} = 36,$$

且 $36 \in [16.919, +\infty)$，故 H_0 被拒绝，即机器生产不正常.

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

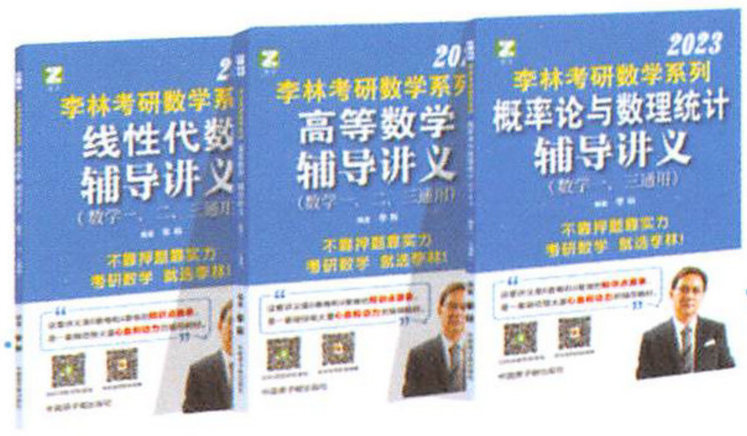
关注微信公众号【神灯考研】，获取更多考研资源！

李林考研数学 ～系列图书～

01

基础＋强化初期

三本讲义地毯式复习
覆盖全部大纲考点

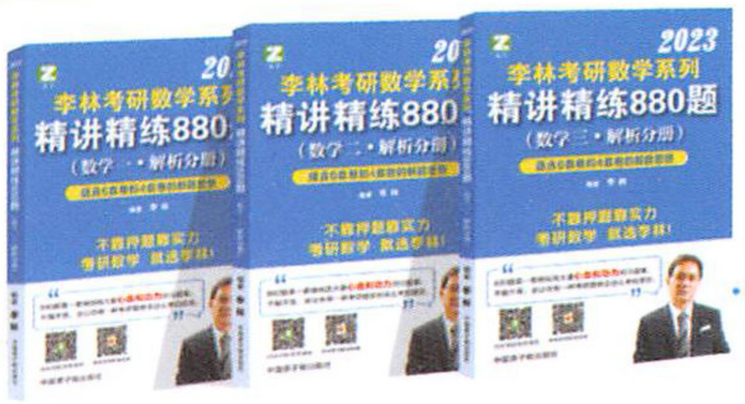


02

强化阶段

880题难度分级
题目紧扣大纲

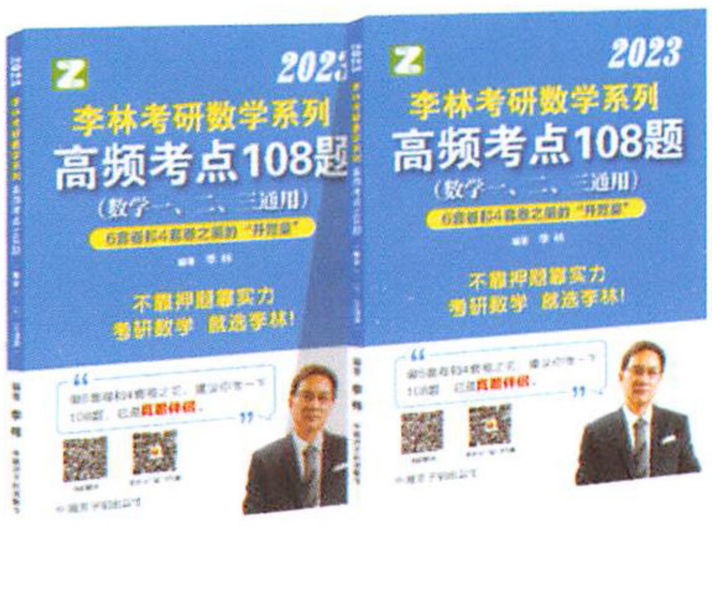
试题+解析



03

强化收尾

108题按考点分类
检验强化复习效果



04

冲刺阶段

6+4套卷冲刺
深度还原考场



微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园

微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451

关注微信公众号【神灯考研】，获取更多

策划：真学

真学
新浪微博

真学图书
微信公众号



作者简介：李林

扫地僧一样存在的实力派考研名师，原大连理工大学教师，考研辅导经验近20年，对考研数学命题规律了如指掌，对典型错误点评一针见血，李林老师高瞻远瞩，出版的图书题目新颖，不偏不怪，让学生有种考研题就会这么考的感觉。

“李林考研数学系列”图书致力于让学生做“性价比”高的题目，达到“精做一题，胜做十题”的效果，受到莘莘学子的广泛好评。

李林考研数学系列图书：

李林考研数学系列高等数学辅导讲义（数学一、二、三通用）
李林考研数学系列线性代数辅导讲义（数学一、二、三通用）
李林考研数学系列概率论与数理统计辅导讲义（数学一、三通用）
李林考研数学系列精讲精练880题（分数学一、数学二、数学三）
李林考研数学系列高频考点108题（数学一、二、三通用）
李林考研数学系列考前冲刺6套卷（分数学一、数学二、数学三）
李林考研数学系列考前预测4套卷（分数学一、数学二、数学三）

上架建议：考研

ISBN 978-7-5221-1196-4
9 787522 111964 01
定价：79.80元

微信公众号【神灯考研】
考研人的精神家园
微信公众号：神灯考研　　客服微信：KYFT104　　QQ群：118105451