真学

2023

李林考研数学系列

精讲精练880题

（数学一·试题分册）

蕴含6套卷和4套卷的解题思想

编著　李林

不靠押题靠实力

考研数学　就选李林！

“880题是一套凝结我大量**心血和功力**的习题集，不偏不怪，会让你有一种考研题就会这么考的感觉。”

扫码领取视频课程

李林老师新浪微博

中国原子能出版社


高频考点108题
带 你 穿 越 数 学 时 空
45个考点深度透析
考情揭秘 有的放矢
45份考点知识清单
重点要点 靶向击破
200余道仿真题集训
涵盖 高数 线代 概率
2023
李林考研数学系列
精讲精练880题
（数学二·试题分册）
蕴含6套卷和4套卷的解题思想
编著 李林
不靠押题靠实力
考研数学 就选李林！
中国原子能出版社
（数学二·解析分册）
精讲精练880题
带 你 逃 离 数 学 迷 宫
李林年度大作·高数/线代/概率一网打尽
基础题
与真题难度持平
综合题
略难于真题
拓展题
用来冲刺高分

真学

李林考研数学系列

精讲精练880题

（数学一·试题分册）

蕴含6套卷和4套卷的解题思想

编著　李林

不靠押题靠实力

考研数学　就选李林！

“
880题是一套凝结我大量**心血和功力**的习题集，
不偏不怪，会让你有一种考研题就会这么考的感觉。
”

扫码领取视频课程　　李林老师新浪微博

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

李林考研数学系列精讲精练880题. 数学一/李林编著. ——北京：中国原子能出版社，2021.1(2022.1重印)

ISBN 978-7-5221-1196-4

Ⅰ. ①李… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ. ①O13—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2021)第011766号

李林考研数学系列精讲精练880题. 数学一

出版发行	中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路43号 100048)
责任编辑	付 凯
特约编辑	刘 亮
印　　刷	河北鹏润印刷有限公司
经　　销	全国新华书店
开　　本	787mm×1092mm 1/16
印　　张	24.5　　**字　数** 622千字
版　　次	2021年1月第1版 2022年1月第3次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5221-1196-4　　**定　价** 79.80元

网址：http://www.aep.com.cn　　**E-mail：atomep123@126.com**

发行电话：010—68452845

目　录

试题分册

高等数学

线性代数

概率统计

高等数学

李林考研数学系列

第一章 函数、极限、连续

基础题

一、选择题

(1) 函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x},x\in(-\infty,+\infty)$,是(　　).

A. 单调函数　　B. 周期函数　　C. 偶函数　　D. 有界函数

(2) 设函数 $f(x)=\cos(\sin x),g(x)=\sin(\cos x)$,则当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,(　　).

A. $f(x)$ 单调增加,$g(x)$ 单调减少　　B. $f(x)$ 单调减少,$g(x)$ 单调增加

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 都单调增加　　D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 都单调减少

(3) 设函数 $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$,则(　　).

A. $f(x)$ 为偶函数　　B. $f(x)$ 为奇函数

C. $f(x)$ 为无界函数　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$

(4) 设当 $x\to+\infty$ 时,$f(x),g(x)$ 都是无穷大,则当 $x\to+\infty$ 时,下列结论正确的是(　　).

A. $f(x)-g(x)$ 是无穷小　　B. $f(x)+g(x)$ 是无穷大

C. $\frac{g(x)}{f(x)}\to1$　　D. $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)}$ 是无穷小

(5) 当 $x\to0$ 时,$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是(　　).

A. 无穷大　　B. 无穷小

C. 有界但非无穷小　　D. 无界但非无穷大

(6) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,则(　　).

A. $a=1,b=1$　　B. $a=-1,b=1$

C. $a=1,b=-1$　　D. $a=-1,b=-1$

(7) 设当 $x\to0$ 时,$(x-\sin x)\tan x$ 是比 $\ln(1+x^n)$ 高阶的无穷小,而 $\ln(1+x^n)$ 是比 x^2 高阶的无穷小,则 $n=$(　　).

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

(8) 设 $f(x)=\ln^2x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{2}}(x>1)$,则当 x 充分大时,(　　).

A. $f(x)<g(x)<h(x)$　　B. $g(x)<h(x)<f(x)$

C. $h(x)<g(x)<f(x)$　　D. $g(x)<f(x)<h(x)$

(9) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 均不存在,则下列选项正确的是(　　).

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 不存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必不存在

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 不存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必存在

C. 若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$必不存在

D. 若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$必存在

(10) 函数 $f(x)=\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$ 在 $x=0$ 处为(　　).

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

二、填空题

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}=$ ________.

(2) 当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则 $a=$ ________.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

(4) 设 $a>0$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^P(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})$ 存在，则 P 的取值范围为________.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{e^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$ ________.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{e^{x^4}-1}=$ ________.

(7) 设 $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3-\tan x$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则 $a+b+c+d=$ ________.

三、解答题

(1) 设 $f(x)$ 是定义在 $(-a,a)$ 内的函数，证明：$f(x)$ 可以表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

(2) 设函数 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，其中 a,b,c 均为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$ 的表达式，并证明 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-a,a)$ 内有定义，其中 $a>0$，且对任意 $x_1,x_2\in(-a,a)$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$，证明：$F(x)=f(x)+x$ 在 $(-a,a)$ 内单调增加.

(4) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(5) 求下列极限：

(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x\sin x}{x^2+x\sin\dfrac{1}{x}}$；　(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x$ (a,b,c 为正数)；

(Ⅲ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(e^{2x}-x^2)-2x}$；　(Ⅳ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{x}}-e^3}{x}$；

(Ⅴ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^3}$；　(Ⅵ) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$；

(Ⅶ) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)^{\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}}$；　(Ⅷ) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$.

(6) 求下列极限：

(Ⅰ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$；

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$;

(Ⅲ) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$;

(Ⅳ) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$;

(Ⅴ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$.

(7) 求 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在$(0,2\pi)$内的间断点，并指出其类型.

(8) 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的连续性.

(9) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $a<c<d<b$，证明：在(a,b)内必存在一点 ξ，使得 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$，其中 m,n 为任意给定的自然数.

(10) 设 $x_1=\sqrt{a}(a>0)$，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

(11) 设 $x_1=a\geqslant 0$，$y_1=b\geqslant 0$，$a\leqslant b$，$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

综合题

一、选择题

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^k-\left(1+\frac{1}{x}\right)}=a\neq 0$ 成立的充要条件是(　　).

A. $k\neq 1$　　B. $k>1$　　C. $k>0$　　D. 与 k 无关

(2) 已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^p}=c\neq 0$，则(　　).

A. $p=3,c=-\frac{4}{3}$　　B. $p=-3,c=\frac{4}{3}$

C. $p=\frac{4}{3},c=3$　　D. $p=-\frac{4}{3},c=-3$

(3) 设当 $x\to 0$ 时，

$$\alpha(x)=\tan x-\sin x,\beta(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2},\gamma(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t\,dt$$

都是无穷小，将它们关于 x 的阶数从低到高排列，正确的顺序为(　　).

A. $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)$　　B. $\alpha(x),\gamma(x),\beta(x)$

C. $\gamma(x),\alpha(x),\beta(x)$　　D. $\beta(x),\alpha(x),\gamma(x)$

(4) 设 $y=y(x)$ 是方程 $y''+2y'+y=e^{3x}$ 的解，且满足 $y(0)=y'(0)=0$，则当 $x\to 0$ 时，与 $y(x)$ 为等价无穷小的是(　　).

A. $\sin x^2$　　B. $\sin x$　　C. $\ln(1+x^2)$　　D. $\ln\sqrt{1+x^2}$

(5) 设 $F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\neq 0$，$f(0)=0$，

则(   ).

A. $x=0$ 是 $F(x)$ 的连续点　　B. $x=0$ 是 $F(x)$ 的第一类间断点

C. $x=0$ 是 $F(x)$ 的第二类间断点　　D. 以上说法均错误

(6) 设 $f(x)=\begin{cases}(x+1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}, & x\neq\pm1,\\ 0, & x=\pm1,\end{cases}$ 则 $f(x)$(   ).

A. 在 $x=1,x=-1$ 处都连续　　B. 在 $x=1,x=-1$ 处都间断

C. 在 $x=-1$ 处间断，$x=1$ 处连续　　D. 在 $x=-1$ 处连续，$x=1$ 处间断

(7) 下列结论中错误的是(   ).

A. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>1$，则存在 $M>1$，当 n 充分大时，有 $a_n>M$

B. 设 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则当 n 充分大时，有 $a_n<b_n$

C. 设 $M\leqslant a_n\leqslant N(n=1,2,\cdots)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $M\leqslant a\leqslant N$

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq0$，则当 n 充分大时，$a_n>a-\dfrac{1}{n}$

(8) 设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 为两个数列，则下列说法正确的是(   ).

A. 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 无界，则 $\{x_n+y_n\}$ 无界

B. 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 无界，则 $\{x_ny_n\}$ 无界

C. 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 中，一个有界，一个无界，则 $\{x_ny_n\}$ 无界

D. 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均为无穷大；则 $\{x_ny_n\}$ 一定为无穷大

(9) 下列极限存在的是(   ).

A. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$　　B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)^x$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}[n+(-1)^n(n+1)]$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

(10) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为连续的奇函数，a 为常数，则必为偶函数的是(   ).

A. $\int_0^x\mathrm{d}u\int_a^u tf(t)\mathrm{d}t$　　B. $\int_a^x\mathrm{d}u\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$

C. $\int_0^x\mathrm{d}u\int_a^u f(t)\mathrm{d}t$　　D. $\int_a^x\mathrm{d}u\int_0^u tf(t)\mathrm{d}t$

(11) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+2^{tx}}{1+2^{tx}}$，则 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x=0$ 处(   ).

A. 可导　　B. 间断点　　C. 不可导但连续　　D. 无法判定

(12) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^3-1)\sin x}{|x|(1+x^2)}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x\in(-\infty,+\infty)$，则(   ).

A. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界

B. 存在 $X>0$，当 $|x|<X$ 时，$f(x)$ 有界，当 $|x|>X$ 时，$f(x)$ 无界

C. 存在 $X>0$，当 $|x|<X$ 时，$f(x)$ 无界，当 $|x|>X$ 时，$f(x)$ 有界

D. 对任意 $X>0$，当 $|x|\leqslant X$ 时，$f(x)$ 有界，但在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界

二、填空题

(1) 当 $x\to0$ 时，$f(x)=3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 是关于 x 的______阶无穷小.

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})\sin x^2}{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}=$______.

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$，当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{\sin^2 x}f(t)\mathrm{d}t$ 是关于 x 的 n 阶无穷小，则 $n=$ ________.

(4) 设 $a_n=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=$ ________.

(5) 设 $k\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2nk+1}{n(1-2k)}\right]^n=$ ________.

(6) 设 $0<a_1<a_2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^{-n}+a_2^{-n})^{\frac{1}{n}}=$ ________.

(7) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=0$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

(8) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{a[x]+\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right\}=b$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

(9) 已知连续函数 $y=f(x)$ 关于点 $(a,0)(a\neq 0)$ 对称，则对常数 c，$I=\int_{-c}^{c}f(a-x)\mathrm{d}x=$ ________.

三、解答题

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$，且 $|q|<1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(2) 设 $a_k=2^{\frac{1}{2^k}}$，$u_n=a_1a_2\cdots a_n(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(3) 设数列 $x_n=(1+a)^n+(1-a)^n$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\begin{cases}1+|a|, & a\neq 0,\\ 1, & a=0.\end{cases}$$

(4) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(a_i>0,i=1,2,\cdots,k)$.

(5)（Ⅰ）设 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_{n+2}=\dfrac{1}{2}(3x_{n+1}-x_n)(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（Ⅱ）设 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_{n+2}=\dfrac{1}{2}(x_n+x_{n+1})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(6) 设 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n(n=1,2,\cdots)$.

（Ⅰ）证明：方程 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有且仅有一个实根 x_n；

（Ⅱ）设 $x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，满足 $f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}$，证明：$\arccos\dfrac{1}{n}<x_n<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{2}$.

(7)（Ⅰ）证明：方程 $x=1+2\ln x$ 在 $(e,+\infty)$ 内有唯一实根 ξ；

（Ⅱ）取 $x_0\in(e,\xi)$，令 $x_n=1+2\ln x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

(8) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$，证明：

（Ⅰ）至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{2}\right)$；

（Ⅱ）至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)(n\geqslant 2$ 为自然数).

(9) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}[\sin(\pi\sqrt{n^2+1})\cdot\sin(\pi\sqrt{n^2+n})]=0$.

(10) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x[(3+2\tan t)^t-3^t]\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{3x^3}-1}$.

(11) 设 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n$.

(Ⅰ) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求值；

(Ⅱ) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(12) 设 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$，证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$ 存在.

(13) 设 $x_1>0$，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\ln(\mathrm{e}^{x_n}-1)-\ln x_n$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求值.

(14) 求下列极限：

(Ⅰ) 当 $|x|<1$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$；

(Ⅱ) 当 $|x|\neq 0$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$；

(Ⅲ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdots(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}$.

(15) 求下列极限：

(Ⅰ) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=\dfrac{1}{2}(a>0, a\neq 1)$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$；

(Ⅱ) 设 $f(x)$ 是三次多项式，且有 $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to 4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1(a\neq 0)$，求 $\lim\limits_{x\to 3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

(16) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内有最大值.

拓 展 题

解答题

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $|f'(x)|<1$，当 $x\in[a,b]$ 时，有 $a<f(x)<b$，$F(x)=\dfrac{1}{2}[x+f(x)]$，证明：

(Ⅰ) 存在 $x^*\in(a,b)$，使得 $F(x^*)=x^*$；

(Ⅱ) 对 $x_0\in[a,b]$，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=F(x_n)(n=0,1,2,\cdots)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$.

(2)(Ⅰ) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数. 证明：

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)\ (k=1,2,\cdots);$$

(Ⅱ) 证明：$\ln(1+n)\leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\leqslant 1+\ln n$，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{\ln n}$.

第二章 一元函数微分学及其应用

李林考研数学系列

基础题

一、选择题

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2\cdot\varphi(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 可导　　B. 连续，但不可导

C. 极限存在，但不连续　　D. 极限不存在

(2) 设 $f'(x)$ 存在，a,b 为任意实数，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+a\Delta x)-f(x-b\Delta x)}{\Delta x}=$(　　).

A. $(a+b)f'(x)$　　B. $(a-b)f'(x)$

C. $af'(x)$　　D. $bf'(x)$

(3) 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 连续且可导　　B. 右连续但右导数不存在

C. 右连续且右导数存在　　D. 右极限存在且右导数存在

(4) $f(x)=(x^2+3x+2)\,|\,x^3-x\,|$ 不可导点的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(5) 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是(　　).

A. $f(x)=|x|\sin|x|$　　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. $f(x)=\cos|x|$　　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

(6) 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是 Δx 的(　　)无穷小.

A. 等价　　B. 同阶　　C. 低阶　　D. 高阶

(7) 设 $f(-x)=-f(x)$，且在 $(0,+\infty)$ 内，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内必有(　　).

A. $f'(x)<0,f''(x)<0$　　B. $f'(x)<0,f''(x)>0$

C. $f'(x)>0,f''(x)<0$　　D. $f'(x)>0,f''(x)>0$

(8) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 不可导　　B. 可导且 $f'(0)\neq 0$

C. 有极小值　　D. 有极大值

(9) $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(10) 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则下列选项正确的是(　　).

A. x_0 是 $f(x)$ 的极值点　　B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　D. $(x_0,f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点

(11) 设 $f(x)$ 有一阶连续导数,$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的(　　).

A. 必要非充分条件　　B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分又非必要条件

(12) 设 $f(x)$ 有任意阶导数,且 $f'(x)=f^2(x)$,则 $f^{(n)}(x)=$(　　)$(n>3)$.

A. $n!f^{n+1}(x)$　　B. $nf^{n+1}(x)$

C. $f^{2n}(x)$　　D. $n!f^{2n}(x)$

(13) 设 $y=\ln(1-2x)$,则 $y^{(10)}=$(　　).

A. $\dfrac{-9!}{(1-2x)^{10}}$　　B. $\dfrac{9!}{(1-2x)^{10}}$

C. $\dfrac{-9!\cdot 2^{10}}{(1-2x)^{10}}$　　D. $\dfrac{10!\cdot 2^{9}}{(1-2x)^{10}}$

(14) 设 $\delta>0$,$f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内有定义,当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时,有 $|f(x)|\leqslant x^2$,则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

A. 间断点　　B. 连续但不可导点

C. 可导点且 $f'(0)=0$　　D. 可导点且 $f'(0)\neq 0$

(15) 设 $f(x)$ 连续,且 $f'(x_0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得(　　).

A. 对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0)$,有 $f(x)>f(x_0)$

B. 对任意 $x\in(x_0,x_0+\delta)$,有 $f(x)>f(x_0)$

C. $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内单调减少

D. $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内单调增加

(16) 已知 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-2$ 处取得极值,且与直线 $y=-3x+3$ 相切于点 $(1,0)$,则(　　).

A. $a=1,b=-8,c=6$　　B. $a=-1,b=-8,c=-6$

C. $a=1,b=8,c=-6$　　D. $a=-1,b=8,c=-6$

(17) 设 $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)(x+3)}{\sqrt{1+x^2}}$,则 $f(x)$(　　).

A. 在 $x=1,x=-3$ 处取得极大值,在 $x=-1$ 处取得极小值

B. 在 $x=-1$ 处取得极大值,在 $x=1,x=-3$ 处取得极小值

C. 在 $x=-1,x=1,x=-3$ 处都取得极小值

D. 在 $x=-1,x=-3,x=1$ 处都取得极大值

(18) 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 渐近线的条数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(19) 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线条数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(20) 曲线 $y=\sqrt{x^2-a^2}$ 的渐近线的条数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题

(1) $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

(2) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=2$，$f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\ln(1+x^2)}=$ ________.

(3) 设 $y=f(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\dfrac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=$ ________.

(4) 设函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right]=2$，则 $f(x)$ 的一阶麦克劳林展开式为________.

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$f''(x)$ 的图形如图 2-1 所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为________.

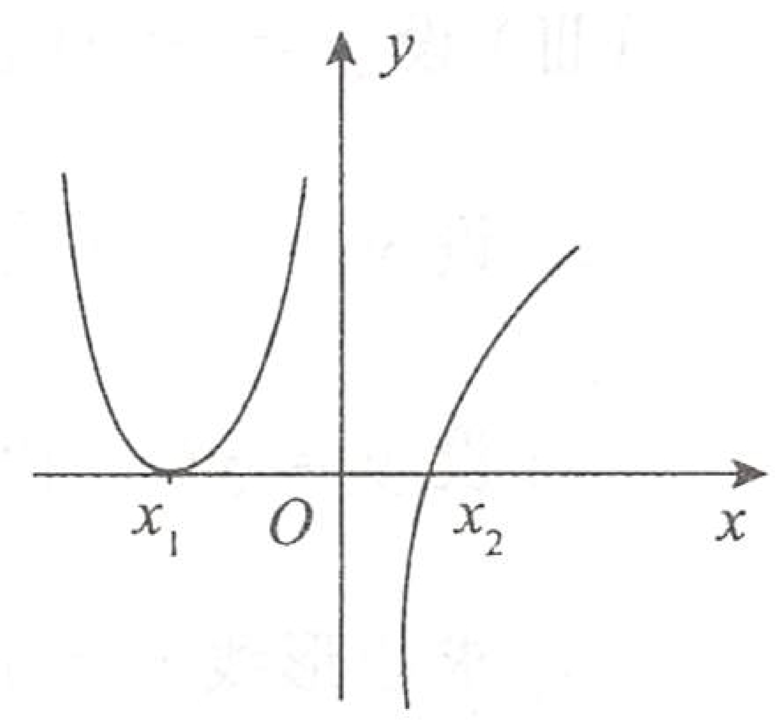


图 2-1

(6) 设 $f'(0)$ 存在，$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{1-\cos f(x)}{\sin x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，则 $f'(0)=$ ________.

(7) 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x\cos x$ 与 ax^b 为等价无穷小，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

(8) 当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^x+\ln(1-x)-1$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$ ________.

(9) 曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的上凸区间是________.

(10) 曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

(11) 设 $f(x)=n^2\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-(1+n)x$ 在 $x=x_n$ 处有水平切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{x_n}=$ ________.

(12) 设 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2\end{cases}(t\geqslant 0)$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)-3\right]=$ ________.

(13) 设连续函数 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处满足 $\Delta y=\Delta x+o(\Delta x)$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{\mathrm{e}^x}f(t)\mathrm{d}t}{x^2+\ln(1+x^3)}=$ ________.

(14) 设 $f(x)=x(2x-1)(3x-2)\cdots(100x-99)$，则 $f'(0)=$ ________.

(15) 设 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x^3)]=\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=$ ________.

(16) 设 $f(x)=\dfrac{x^{10}}{1-x}$，则 $f^{(10)}(x)=$ ________.

(17) 设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为________.

(18) 设 $f(x)=\cos|x|+x^2|x|$ 在 $x=0$ 处存在的最高阶导数的阶数为________.

(19) 曲线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t\,(a>0)$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的曲率 $=$ ________.

三、解答题

(1) 计算下列函数的导数：

(Ⅰ) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x}}}$； (Ⅱ) $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}(a>0)$；

(Ⅲ) $y=2^{|\sin x|}$； (Ⅳ) $y=\ln|\tan x+\sec x|$.

(2) 求下列函数的导数：

(Ⅰ) $y=(1+x^2)^{\sin x}$； (Ⅱ) $y=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$.

(3) 求下列函数的微分：

(Ⅰ) $y=\varphi\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)$，其中 φ 可导，求 $\mathrm{d}y$；

(Ⅱ) 设 $y=y(x)$ 由 $\mathrm{e}^{x+y}-y\sin x=0$ 确定，求 $\mathrm{d}y$；

(Ⅲ) 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t,\\y=5t^2+1\end{cases}$ 确定，求 $\mathrm{d}y$.

(4) 设 $y=y(x)$ 由方程 $\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(5) 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\y=1-\cos t\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(6) 求心形线 $r=1-\cos\theta$ 在对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

(7) 设 $f(x)=\begin{cases}x^k\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\0, & x=0.\end{cases}$

(Ⅰ) 当 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导；

(Ⅱ) 当 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，但导函数不连续；

(Ⅲ) 当 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处导函数连续.

(8) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f'(1)=1$，证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，并求 $f(x)$.

(9) 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f^{(n)}(0)$.

(10) 设气体以 100 cm^3/s 的速率注入球状气球，求当半径为 10 cm 时，气球半径增加的速率.(设气体压力不变)

(11) 一动点 P 在曲线 $9y=4x^2$ 上运动，已知点 P 横坐标变化速率为 30 cm/s，当点 P 经过(3,4)时，从原点到点 P 的距离 S 变化率为多少？(设坐标轴的单位长为 1 cm)

(12) 设 $f(x)$ 二阶可导，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$.

(13) 证明：$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\1-x^2, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 满足拉格朗日中值定理，并求满足定理的 ξ 的值.

(14) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：

(Ⅰ) 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$；

(Ⅱ) 至少存在一点 $\eta\in(a,b)$，使得 $2\eta f(\eta)-f'(\eta)=0$.

(15) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，且 $f(a)=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $af(\xi)+(\xi-b)f'(\xi)=0$.

(16) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，证

明：至少存在一点 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$.

(17) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

(18) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f''(x)\leqslant 0$，$f(0)=0$，证明：对任意 $x_0\in[0,1]$，有 $f(x_0)\leqslant 2f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)$.

(19) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，且 $f(x)$ 不恒等于 x，证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)>1$.

(20) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)-f(0)=\dfrac{1}{2}$，证明：存在不同的两点 ξ 和 $\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=1$.

(21) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant 1$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最小值，证明：

$$|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant 1.$$

(22) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为常数. 证明：存在相异的 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)\cdot f'(\eta)<0$.

(23) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=2\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x$，证明：

(Ⅰ) 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$；

(Ⅱ) 对 $\forall\lambda\in\mathbf{R}$，至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)-\lambda f'(\eta)=0$.

(24) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $2\eta f'(\xi)=(b+a)f'(\eta)$.

(25) 设 a,b 为正数，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{a\mathrm{e}^b-b\mathrm{e}^a}{a-b}=\mathrm{e}^{\xi}(1-\xi)$.

(26) 证明下列不等式：

(Ⅰ) 当 $0<x<\pi$ 时，有 $\sin\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{\pi}$；

(Ⅱ) 当 $\mathrm{e}<a<b$ 时，有 $a^b>b^a$；

(Ⅲ) 当 $x>0$ 时，有 $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$；

(Ⅳ) 若 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，有 $f(x)\geqslant x$.

(27) 求函数 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间与极值，并求其渐近线.

(28) 设 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ x+2, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的单调区间与极值.

(29) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t\ln t,\\ y=\dfrac{1}{t}\ln t\end{cases}$ $(t\geqslant 1)$ 确定，求 $y=y(x)$ 的单调区间、凹凸区间、极值和拐点.

(30) 求曲线 $y=\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$ 的全部渐近线.

(31) 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点的曲率半径最小？求出该点的曲率半径.

(32) 证明：方程 $2^x-x^2-1=0$ 有且仅有三个不同实根.

(33) 证明：方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

(34) 讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 交点的个数.

综 合 题

一、选择题

(1) 设 $f(x)$ 在 $(1-\delta,1+\delta)(\delta>0)$ 内存在导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$，则(　　).

A. 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内，均有 $f(x)<x$

B. 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内，均有 $f(x)>x$

C. 在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)<x$；在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)>x$

D. 在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)>x$；在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)<x$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，$f(0)=0$，$f''(x)<0$，当 $0<a<x<b$ 时，有(　　).

A. $af(x)>xf(a)$　　　　B. $bf(x)>xf(b)$

C. $xf(x)>bf(b)$　　　　D. $xf(x)>af(a)$

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f(x)$ 在 $x=a$ 处取得最小值，在 $x=b$ 处取得最大值，则(　　).

A. $f'_+(a)<0$ 且 $f'_-(b)<0$　　　　B. $f'_+(a)>0$ 且 $f'_-(b)<0$

C. $f'_+(a)\geqslant 0$ 且 $f'_-(b)\geqslant 0$　　　　D. $f'_+(a)<0$ 且 $f'_-(b)>0$

(4) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(0)=f(1)$，$f''(x)\neq 0$，则下列选项正确的是(　　).

A. 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$

B. 在 $(0,1)$ 内，$f'(x)\neq 0$

C. 存在唯一一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$

D. 至少存在不同两点 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

(5) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义，则 $F(x)=f(x)\,|\sin x|$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在

B. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

D. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 均存在，且 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

(6) 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有四阶连续导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$，且 $f^{(4)}(x_0)<0$，则(　　).

A. $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值

B. $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

C. $(x_0,f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点

D. $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调减少

(7) 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=1$，则(　　).

A. 当 n 为奇数时，x_0 是 $f(x)$ 的极大值点

B. 当 n 为奇数时，x_0 是 $f(x)$ 的极小值点

C. 当 n 为偶数时，x_0 是 $f(x)$ 的极小值点

D. 当 n 为偶数时，x_0 是 $f(x)$ 的极大值点

(8) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，则下列命题正确的是(　　).

A. 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，则必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

B. 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$，则必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

C. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

D. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$，则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(9)设 $k>0$，方程 $\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内不同实根的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(10)设当 $x\neq 0$ 时，方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且只有一个实根，则(　　).

A. $|k|>\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$　　B. $|k|<\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$　　C. $k=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$　　D. $k=-\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$

(11)设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，$f(0)=0$，$f'(0)<0$，$f''(x)\geqslant M>0$，则方程 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内不同实根的个数为(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

(12)设可导函数 $f(x)$，$x\in[0,1]$ 满足 $f'(x)\geqslant M>0$，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqslant 0$，则在区间(　　)上，有 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{4}M$.

A. $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$　　B. $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$　　C. $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$　　D. $\left[\dfrac{3}{4},1\right]$

(13)设函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 有二阶连续导数，且 $f_1''(x)>0$，$f_2''(x)>0$，若曲线 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处有公切线 $y=g(x)$，且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率半径小于 $y=f_2(x)$ 的曲率半径，则在点 x_0 的某邻域内有(　　).

A. $g(x)\geqslant f_2(x)\geqslant f_1(x)$　　B. $g(x)\geqslant f_1(x)\geqslant f_2(x)$

C. $f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant g(x)$　　D. $f_1(x)\geqslant g(x)\geqslant f_2(x)$

二、填空题

(1)设函数 $f(x)=\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)-1\right]\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}x^2\right)-2\right]\cdots\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}x^{100}\right)-100\right]$，则 $f'(1)=$ ________.

(2)设 $f(x)=3x^2+kx^{-3}$，若对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)\geqslant 20$，则 k 至少为________.

(3)函数 $y=\mathrm{e}^{-x}\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)$（$n$ 为正奇数）的极大值为________.

(4)已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e},\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+k}{x-k}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$

则 $k=$ ________.

(5)设 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续，且其导函数 $f'(x)$ 的图形如图 2-2 所示，其中 $x=0$ 和 $x=x_5$ 是 $f'(x)$ 的铅直渐近线，则 $y=f(x)$ 极值点的个数为________，拐点的个数为________.

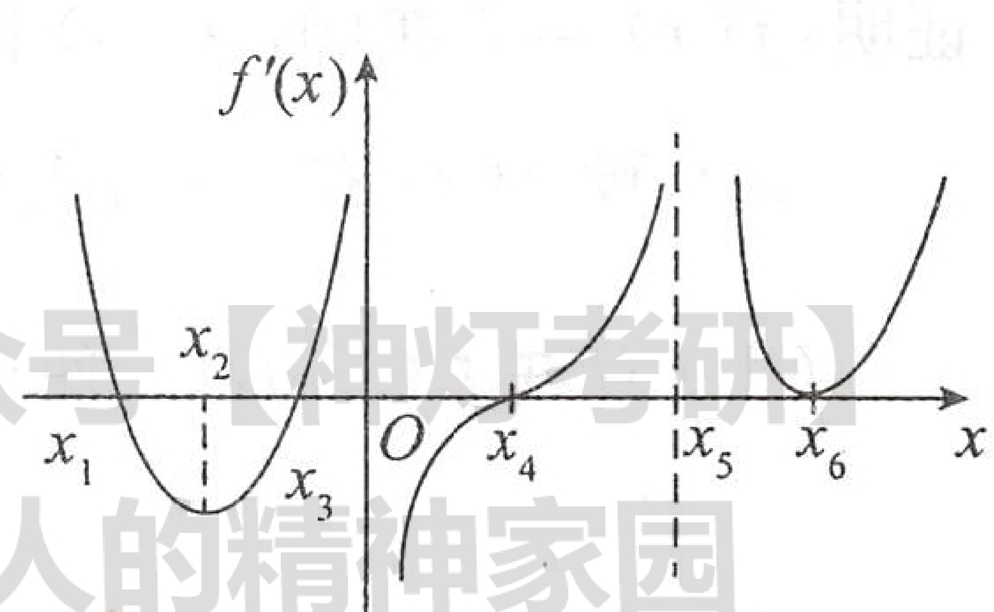


图 2-2

(6)设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $f(x_0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(x_0+\dfrac{1}{x}\right)}{f(x_0)}\right]^x=$ ________.

(7)设 $y=f(x)$ 在 x_0 处有三阶连续导数，$f'(x_0)=1$，$f''(x_0)=2$，$f'''(x_0)=3$，$y=$

$f(x)$ 有反函数 $x=g(y)$,且 $y_0=f(x_0)$,则 $g'''(y_0)=$ ________.

三、解答题

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} ax^2+b\sin x+c, & x\leqslant 0,\\ \ln(1+x), & x>0,\end{cases}$ 问 a,b,c 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶导数连续,但二阶导数不存在?

(2) 设 $z=f[\varphi(x)+y^2]$,其中 x,y 满足 $y+e^y=x$,f,φ 均具有二阶导数,求 $\frac{dz}{dx}$,$\frac{d^2z}{dx^2}$.

(3) 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数,$f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内满足

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小,且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

(4) 设 $f(x)=nx(1-x)^n$(n 为正整数),求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M(n)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$.

(5) 设 $f(x)=\begin{cases} |x|^p\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(Ⅰ) 当 p 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

(Ⅱ) 当 p 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导;

(Ⅲ) 当 p 为何值时,$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(6) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=1$,证明:

(Ⅰ) 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=0$;

(Ⅱ) 至少存在一点 $\eta\in(0,1)$,使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

(7) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=g(b)=0$,证明:至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)\int_\xi^b g(t)dt+g'(\xi)\int_a^\xi f(t)dt=0$.

(8) 在 $x=0$ 的右邻域内,用多项式 $e+ax+bx^2$ 近似表示函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$,使其误差是比 x^2 高阶的无穷小($x\to 0^+$),求 a,b 的值.

(9) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,证明:

(Ⅰ) 若 $f'_+(a)f'_-(b)<0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=0$;

(Ⅱ) 若 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$,则对介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的每个实数 μ,都存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=\mu$.

(10) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶导数,且 $f(a)=f(b)=0$,$f'_+(a)f'_-(b)>0$. 证明:在 (a,b) 内存在两点 ξ 与 η,使得 $f(\xi)=0$,$f''(\eta)=0$.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有二阶导数,$f(0)=0$,$f'_+(0)<0$,$f''(x)\geqslant M>0(x>0)$. 证明:$f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根.

(12) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,$f(x)\neq 0$,且 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x+1)}{x}$ 存在,证明:

(Ⅰ) 存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $\frac{1-e}{e\int_0^1 f(t)dt}=\frac{1}{e^\xi f(\xi)}$;

(Ⅱ) 存在 $\eta\in(0,1)$,使得 $e\int_0^1 f(t)dt=(e-1)e^\xi(\xi-1)f'(\eta)$.

(13) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,且 $|f(x)|\leqslant a$,$|f''(x)|\leqslant b$,其中 a,b 都是非负常数,c 是 $(0,1)$ 内任一点.

（Ⅰ）写出 $f(x)$ 在 $x=c$ 处带拉格朗日余项的一阶泰勒公式；

（Ⅱ）证明：$|f'(c)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$.

(14) 证明下列结论：

（Ⅰ）设 $f(x)=\int_0^x \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}+\int_0^{\frac{1}{x}}\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}(x>0)$，则 $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$；

（Ⅱ）当 $x\geqslant 1$ 时，$\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

(15) 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $(x-1)f''(x)=1-\mathrm{e}^{1-x}+2(x-1)f'(x)$，证明：当 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极值点时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(16) 求椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大和最小的点.

(17) 设曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的一条切线与 x 轴和 y 轴围成一个平面图形 D，如图 2-3 所示.

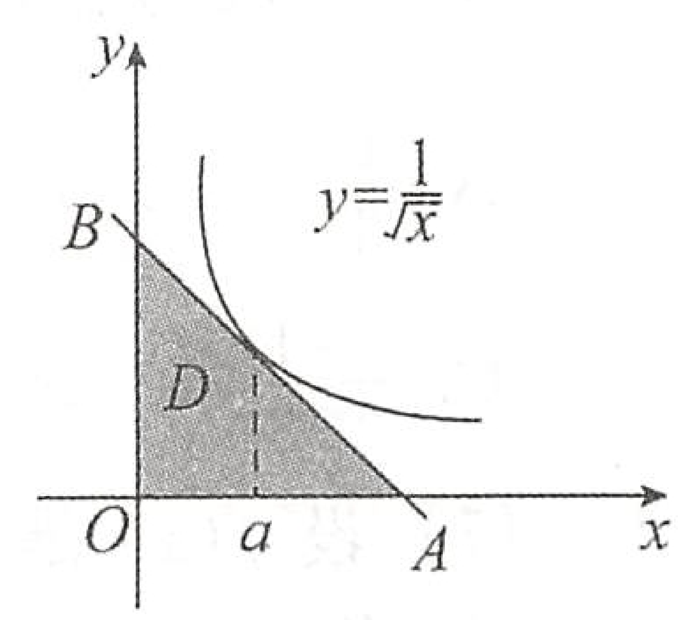


图 2-3

（Ⅰ）记切点的横坐标为 a，求切线方程和图形 D 的面积；

（Ⅱ）当切点沿曲线趋于无穷远时，该面积的变化趋势如何？

(18) 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$.

(19) 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实数，n 为正整数.

（Ⅰ）求 $f'(0)$；

（Ⅱ）若 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，证明：$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.

(20) 已知 $f(x)$ 可导，证明：曲线 $y=f(x)(f(x)>0)$ 与曲线 $y=f(x)\sin x$ 在交点处相切.

(21) 确定 k 的取值，使方程 $x^3+2x^2+x=k$ 有 3 个不同实根.

(22) 设 $R=R(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\geqslant 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3R\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)^2$ 的值.

(23) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有二阶连续导数，$f(0)=f'(0)=0$，且 $x\in[0,+\infty)$，有 $f''(x)>0$，设 $F(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴的截距 $(x>0)$，求 $\lim\limits_{x\to 0^+}[F(x)+F'(x)]$.

拓 展 题

解答题

(1) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)>0$，$u=u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{u(x)}$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$.

（Ⅰ）证明：$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{8}M(b-a)^2$；

（Ⅱ）证明：$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}M(b-a)$.

第三章　一元函数积分学及其应用

基础题

一、选择题

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)\neq 0$，若 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则 $\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=$ (　　).

A. $\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$　　B. $\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

C. $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$　　D. $-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则(　　).

A. 当 $f(x)$ 为奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数

B. 当 $f(x)$ 为偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数

C. 当 $f(x)$ 为周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数

D. 当 $f(x)$ 为单调函数时，$F(x)$ 必为单调函数

(3) 设 $F(x)$ 是 $\sin x^2$ 的一个原函数，则 $\mathrm{d}[F(x^2)]=$ (　　).

A. $\sin x^4\mathrm{d}x$　　B. $\sin x^2\mathrm{d}(x^2)$　　C. $2x\sin x^2\mathrm{d}x$　　D. $2x\sin x^4\mathrm{d}x$

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 2, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则(　　).

A. $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的跳跃间断点

B. $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的可去间断点

C. $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导

D. $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

(5) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，记 $M=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，$N=f(1)$，$P=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]$，则(　　).

A. $M<N<P$　　B. $N<M<P$

C. $P<M<N$　　D. $P<N<M$

(6) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x-ax}\int_b^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t=c$，且 $c\neq 0$，则(　　).

A. $a=1,\ b=0,\ c=-2$　　B. $a=1,\ b=-2,\ c=-2$

C. $a=0,\ b=1,\ c=-2$　　D. $a=1,\ b=1,\ c=1$

(7) 下列反常积分收敛的是(　　).

A. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x}}$　　B. $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\ln(1+x)}$

C. $\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$　　D. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

二、填空题

(1) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，当 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$F(x)>0$，$F(x)f(x)=\frac{\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}$，则 $f(x)=$ ________.

(2) 设对任意 x，有 $f(x+4)=f(x)$，且 $f'(x)=1+|x|$，$x\in[-2,2]$，$f(0)=1$，则 $f(9)=$ ________.

(3)（Ⅰ）设 $f(x)=\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t$，则 $f'(x)=$ ________；

（Ⅱ）设 $F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$，$f(x)$ 是连续函数，则 $F'(x)=$ ________；

（Ⅲ）设 $F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$，$f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}=$ ________；

（Ⅳ）设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，$\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=$ ________；

（Ⅴ）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 t\ln t\mathrm{d}t}{x^4}=$ ________；

（Ⅵ）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=$ ________.

(4) 函数 $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值为________.

(5) 曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体，将它在 $x=0$ 与 $x=\xi(\xi>0)$ 之间部分的体积记为 $V(\xi)$，且 $V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$，则 $a=$ ________.

(6) 曲线 $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}(a>0,0\leqslant\theta\leqslant 3\pi)$ 的弧长 $s=$ ________.

(7) 曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^x\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ 的全长 $s=$ ________.

(8) 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(\mathrm{e}+1)-x$ 及 $y=0$ 所围平面图形的面积 $S=$ ________.

(9) 设 D 是由曲线 $y=\sin x+1$ 与直线 $x=0$，$x=\pi$，$y=0$ 所围平面图形，则 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V=$ ________.

(10) 设 n 为正数，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{n-x}{n+x}\right)^{\frac{2}{x}}=\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x$，则 $n=$ ________.

三、解答题

(1) 求下列积分：

（Ⅰ）$\int\frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x$；　（Ⅱ）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1-x^4)}$；

（Ⅲ）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}$；　（Ⅳ）$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$；

(Ⅴ) $\int \dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x$;

(2) 求下列积分:

(Ⅰ) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt{x})}$; (Ⅱ) $\int \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$;

(Ⅲ) $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$; (Ⅳ) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$;

(Ⅴ) $\int \dfrac{\arctan\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$; (Ⅵ) $\int \sqrt{\dfrac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$.

(3) 求下列积分:

(Ⅰ) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^4 x}$; (Ⅱ) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$;

(Ⅲ) $\int \dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$; (Ⅳ) $\int \dfrac{3\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$;

(Ⅴ) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$; (Ⅵ) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}(a^2+b^2>0)$.

(4) 求下列积分:

(Ⅰ) $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$; (Ⅱ) $\int \dfrac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$;

(Ⅲ) $\int \dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$; (Ⅳ) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$;

(Ⅴ) $\int \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$; (Ⅵ) $\int \mathrm{e}^{2x}(1+\tan x)^2\mathrm{d}x$.

(5) 求下列积分:

(Ⅰ) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(x^2\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\cos x\right)\mathrm{d}x$; (Ⅱ) $\int_{-1}^{1}(2+\sin x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$;

(Ⅲ) $\int_{-2}^{2}(x+|x|)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$; (Ⅳ) $\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^2+x(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

(6) 求下列积分:

(Ⅰ) $\int_0^2 (x-1)^2\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$; (Ⅱ) $\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{-\cos x}-\mathrm{e}^{\cos x})\mathrm{d}x$.

(7) 求下列积分:

(Ⅰ) $\int_{-3}^{2}\min\{2,x^2\}\mathrm{d}x$; (Ⅱ) $\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t(x\geqslant -1)$;

(Ⅲ) $\int_{-1}^{1}|x-y|\mathrm{e}^x\mathrm{d}x(|y|\leqslant 1)$; (Ⅳ) $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\mathrm{d}x$.

(8) 求下列积分:

(Ⅰ) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x$; (Ⅱ) $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$;

(Ⅲ) $\int_0^{\pi}t\sin t\mathrm{d}t$; (Ⅳ) $\int_0^1\left[\sqrt{2x-x^2}+\sqrt{(1-x^2)^3}\right]\mathrm{d}x$.

(9) 求下列积分:

(Ⅰ) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}$; (Ⅱ) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

(10) 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上具有二阶导数 $(a>0)$，且 $f(x)>0$，$f''(x)>0$，证明：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x > af\left(\frac{a}{2}\right).$$

(11) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(12) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称，证明：

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(13) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且单调增加，证明：当 $0<a<b$ 时，有

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right].$$

(14) 求 $f(x)=\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值.

(15) 设点 $A(a,0)(a>0)$，梯形 $OABC$ 的面积为 S，曲边梯形 $OABC$ 的面积为 S_1，其曲边由 $y=\frac{1}{2}+x^2$ 确定，证明：$\frac{S}{S_1}<\frac{3}{2}$.

(16) 设曲线 $y=\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，直线 $y=k(0\leqslant k\leqslant 1)$ 与 $x=0$ 所围面积为 S_1，$y=\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$y=k$ 与 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围面积为 S_2，求 $S=S_1+S_2$ 的最小值.

(17) 设曲线 $y=\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$y=1$ 及 $x=0$ 所围平面图形为 D_1，$y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 及 $y=0$ 所围平面图形为 D_2.

(Ⅰ) 求 D_1 绕直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 旋转一周所得体积 V_1；

(Ⅱ) 求 D_2 绕 y 轴旋转一周所得体积 V_2.

(18) 设星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0)$.

(Ⅰ) 求所围面积 A；

(Ⅱ) 求弧长 L；

(Ⅲ) 求绕 x 轴旋转一周所得体积 V 和表面积 S.

(19) 设立体图形的底是介于 $y=x^2-1$ 和 $y=0$ 之间的平面区域，而它的垂直于 x 轴的任一截面是等边三角形，求立体体积 V.

综 合 题

一、选择题

(1) 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\cdot\sin t\mathrm{d}t$，则正确的是(　　).

A. $F(x)$ 为正的常数　　B. $F(x)$ 为负的常数　　C. $F(x)$ 不是常数　　D. $F(x)$ 恒为零

(2) 设 $\delta>0$，在 $(-\delta,\delta)$ 内有 $|f(x)|\leqslant x^2$，$f''(x)>0$，$I=\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\mathrm{d}x$，则(　　).

A. $I=0$　　B. $I>0$　　C. $I<0$　　D. 不能确定

(3) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)\mathrm{d}x$，则(　　).

A. $I_1<1<I_2$　　B. $I_2<1<I_1$　　C. $1<I_1<I_2$　　D. $I_1<I_2<1$

(4) 设 $f(x)$ 二阶可导,则下列结论正确的是(　　).

① 当 $f'(x)<0$ 时,则 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x<0$;

② 当 $f'(x)<0$ 时,则 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x>0$;

③ 当 $f''(x)>0$ 时,则 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x>0$;

④ 当 $f''(x)>0$ 时,则 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x<0$.

A. ②③　　B. ①②　　C. ②④　　D. ①④

(5) 设反常积分 $\int_{1}^{+\infty} x^k(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{d}x$ 收敛,则正确的是(　　).

A. $k>-1$　　B. $k<-1$　　C. $k>1$　　D. $k<1$

(6) 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2a-x)(a\neq 0)$,b 为常数,则 $\int_{-b}^{b} f(a-x)\mathrm{d}x=$(　　).

A. $2\int_{0}^{b} f(2a-x)\mathrm{d}x$　　B. $2\int_{-b}^{b} f(2a-x)\mathrm{d}x$　　C. $2\int_{0}^{b} f(a-x)\mathrm{d}x$　　D. 0

(7) 设 $\varphi(x)=\dfrac{x^2}{x-1}\int_{1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$,$f(x)$ 为连续函数,则 $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=$(　　).

A. 1　　B. $f(1)$　　C. 0　　D. 不存在

(8) 设 $f(x)$ 有连续导数,$f(0)=0$,$f'(0)=6$,$\alpha(x)=\int_{0}^{x^3} f(t)\mathrm{d}t$,$\beta(x)=\left[\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right]^3$,则当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是(　　).

A. 同阶无穷小　　B. 等价无穷小　　C. 高阶无穷小　　D. 低阶无穷小

(9) 设 $I=\dfrac{1}{s}\int_{0}^{s} f\left(t+\dfrac{x}{s}\right)\mathrm{d}x$,$s>0$,$t>0$,则正确的是(　　).

A. I 仅依赖于 s　　B. I 仅依赖于 t　　C. I 依赖于 s,t　　D. I 依赖于 s,t,x

(10) 设积分 $I=\int_{1}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}(p>0,q>0)$ 收敛,则(　　).

A. $p>1$ 且 $q<1$.　　B. $p>1$ 且 $q>1$　　C. $p<1$ 且 $q<1$　　D. $p<1$ 且 $q>1$

二、填空题

(1) $f(x)=\max\{1,x^2\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $F(0)=1$ 的一个原函数为________.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,若 $x_0\in[a,b]$,$x\in[a,b]$,则极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x}[f(t+\Delta x)-f(t)]\mathrm{d}t=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(3) 由曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴围成的平面图形的面积 $A=$________.

(4) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 围成的平面图形的面积为________.

(5) 已知 $f'(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^{-x}$,且 $f(1)=0$,则 $f(x)=$________.

(6) 已知 $f'(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$,$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,$f(0)=0$,则 $f(x)=$________.

(7) 设 $f(x)$ 连续,$g(x)=\int_{0}^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$,且 $g(1)=1$,$g'(1)=5$,则 $f(1)=$________.

(8) 设 $f(2)=\dfrac{1}{2}$,$f'(2)=0$,且 $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=1$,则 $I=\int_{0}^{1} x^2 f''(2x)\mathrm{d}x=$________.

(9) 设 $f(x)=\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{\cos t}\mathrm{d}t$,则 $I=\int_{0}^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x=$________.

(10) 设$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$,则 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=$ ________.

三、解答题

(1) 求下列积分：

(Ⅰ) 设 $f(x)=\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$,求 $I=\int_0^1 x^2 f(x)dx$;

(Ⅱ) 设 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$,求 $I=\int_0^1 xf(x)dx$.

(2) 设 $f(\sin^2 x)=\frac{x}{\sin x}$,求 $I=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx$.

(3) 计算积分 $I=\int e^{\sin x}\cdot\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$.

(4) 计算 $I=\int\frac{e^{-\sin x}\cdot\sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}dx$.

(5) 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$,求 $I=\int f(x)dx$.

(6) 设 $f'(x)=\arctan(x-1)^2$, $f(0)=0$,求 $I=\int_0^1 f(x)dx$.

(7) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{4-x^2u^2}du-2x}{\sqrt{1+2x^3}-1}$.

(8) 设 $f(x)$ 在$(-\infty,0]$上连续,且满足

$$\int_0^x tf(t^2-x^2)dt=\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

求函数 $f(x)$ 及其极值.

(9) 设 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内一阶可导,$g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数,且 $g(x)$ 连续,若

$$\int_1^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x-4e^2-\int_1^{x-1}f(t+1)dt,\ f(2)=1,$$

求 $f(x)$ 的表达式.

(10) 设 $f(x)$ 在$[1,2]$上可导,且$\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$, $f(1)=\frac{1}{2}$,证明:至少存在一点 $\xi\in(1,2)$,使得 $f'(\xi)=0$.

(11) 设 $f(x)$ 满足 $e^{-x}-\frac{x^2}{2}=1+\int_0^x f(t-x)dt$,求 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内的最值.

(12) 求 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值.

(13) 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$.

(14) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

(15) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$.

(16) 设$\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛,且 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{e^{-x}}{1+e^x}\int_0^{+\infty}f(x)dx$,求$\int_0^{+\infty}f(x)dx$.

(17) 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$,证明:$\frac{1}{2(n+1)} < a_n < \frac{1}{2(n-1)} (n \geqslant 2)$.

(18) 求积分 $I_n = \int_0^1 x \ln^n x \mathrm{d}x (n \geqslant 0$ 且为整数$)$ 的递推关系,并计算 I_n.

(19)(Ⅰ)求积分 $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \mathrm{d}x (n \geqslant 1, a > 0)$ 的递推关系;

(Ⅱ)计算 $I = \int \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} \mathrm{d}x$.

(20) 证明:$f(x) = \int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t \mathrm{d}t (x > 0)$ 的最大值为 $f(1)$,且

$$f(1) \leqslant \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

(21) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上有二阶连续导数,且 $f(b) = f'(b) = 0$,证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)^2 \mathrm{d}x.$$

(22) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导,且 $f''(x) > 0$,证明:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

(23) 设 $f(x)$ 在$[a,b](a<b)$上连续,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = 0$. 证明:至少存在不同的 $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$,使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

(24) 设 $f(x)$ 在$(-a,a)(a>0)$内连续,且 $f'(0) = A \neq 0$.

(Ⅰ)证明:对 $x \in (0,a)$,存在 $\theta \in (0,1)$,使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = x[f(\theta x) - f(-\theta x)];$$

(Ⅱ)证明:$\lim\limits_{x\to 0^+} \theta = \frac{1}{2}$.

(25) 设 $y = f(x)$ 在$[0,1]$上是非负连续函数.

(Ⅰ)证明:存在 $x_0 \in (0,1)$,使得在$[0,x_0]$上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积,等于在$[x_0,1]$上以 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积;

(Ⅱ)又设 $f(x)$ 在$(0,1)$内可导,且 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$,证明:(Ⅰ)中的 x_0 是唯一的.

(26) 设曲线 $y = f(x)$ 上任一点$(x, f(x))$处的切线斜率为 $a^2x^2 - 4ax + 3$,且 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值 0.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的其它极值;

(Ⅱ)证明:$0 \leqslant \int_0^1 \sqrt{f(ut)}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{3u}, u \in (0,1)$.

(27) 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,且满足 $f(x+T) = f(x), T>0, f(-x) = f(x)$.

(Ⅰ)证明:$\int_0^{nT} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{n^2 T}{2}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$($n$ 为正整数);

(Ⅱ)计算 $I = \int_0^{n\pi} x \mid \cos x \mid \mathrm{d}x$.

(28) 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有连续导数,证明:

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{1}{4a^2}\int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)]\mathrm{d}t = f'(0).$$

(29) 设曲线 $y = a\sqrt{x} (a > 0)$ 与 $y = \ln\sqrt{x}$ 在点(x_0,y_0)处有公切线.

(Ⅰ)求常数 a 及点(x_0,y_0);

（Ⅱ）求两曲线与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(30) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导，$f(a)>0$，$f'(x)>0$，$S_1(x)$ 与 $S_2(x)$ 为如图 3-1 所示阴影部分的面积，证明：存在唯一的 ξ，使得$\dfrac{S_1(\xi)}{S_2(\xi)}=k$（$k$ 为正的常数）.

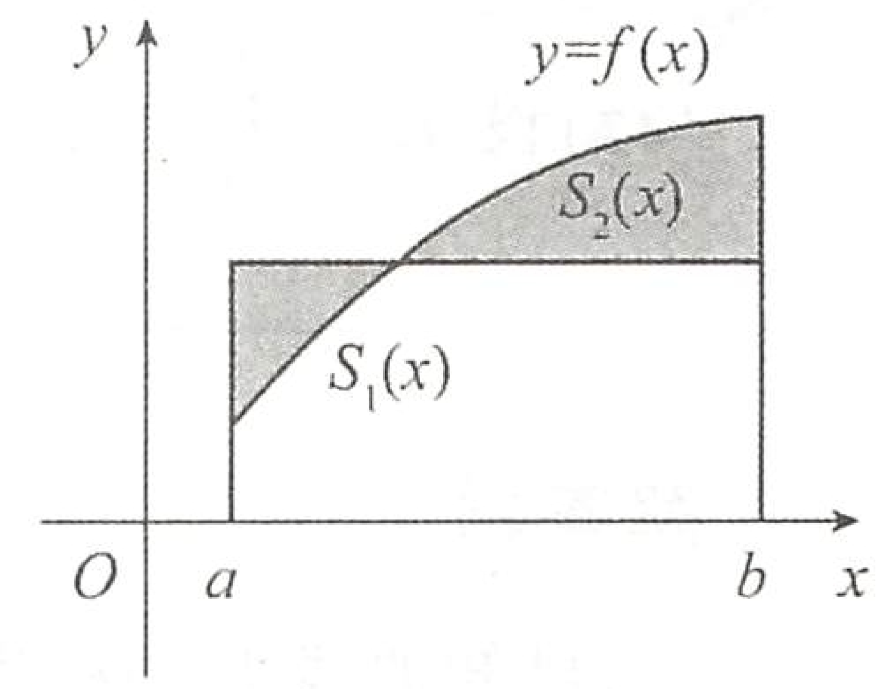


图 3-1

(31) 求曲线 $4y=\int_0^2 x\sqrt{12-x^2u^2}\,du\ (x\geqslant 0)$ 的全长.

(32) 设平面图形 D 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 确定，求图形 D 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

(33) 求曲线 $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}\ (x\geqslant 0)$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

(34) 设摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$(0\leqslant t\leqslant 2\pi,a>0)$ 与 x 轴所围平面图形为 D.

（Ⅰ）求 D 绕 x 轴，y 轴各旋转一周所得旋转体的体积；

（Ⅱ）求 D 绕直线 $y=2a$ 旋转一周所得旋转体的体积.

(35) 设 $f(x)=x^n\sqrt{1-x^2}$，$x\in[0,1]$ 与 $y=0$ 所围平面区域的面积为 S_n，$g(x)=\sin^{\frac{n}{2}}x$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$与 $y=0$ 所围平面区域绕 x 轴旋转一周所得体积为 $V_n\ (n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi S_n}{V_n}$.

(36) 将半径为 R 的球沉入水中，它与水面相切，设球的密度与水的密度相等，现将球从水中取出，问至少需要做功多少？

(37) 设如图 3-2(a)，3-2(b) 所示为同一等腰三角形薄板，已知其底为 $2b$、高为 h，将其垂直放入静水中，图(a) 是其底与水面相齐，图(b) 是其顶点与水面相齐，设图(a) 与图(b) 薄板一侧所受压力分别为 P_1 和 P_2，求$\dfrac{P_2}{P_1}$.

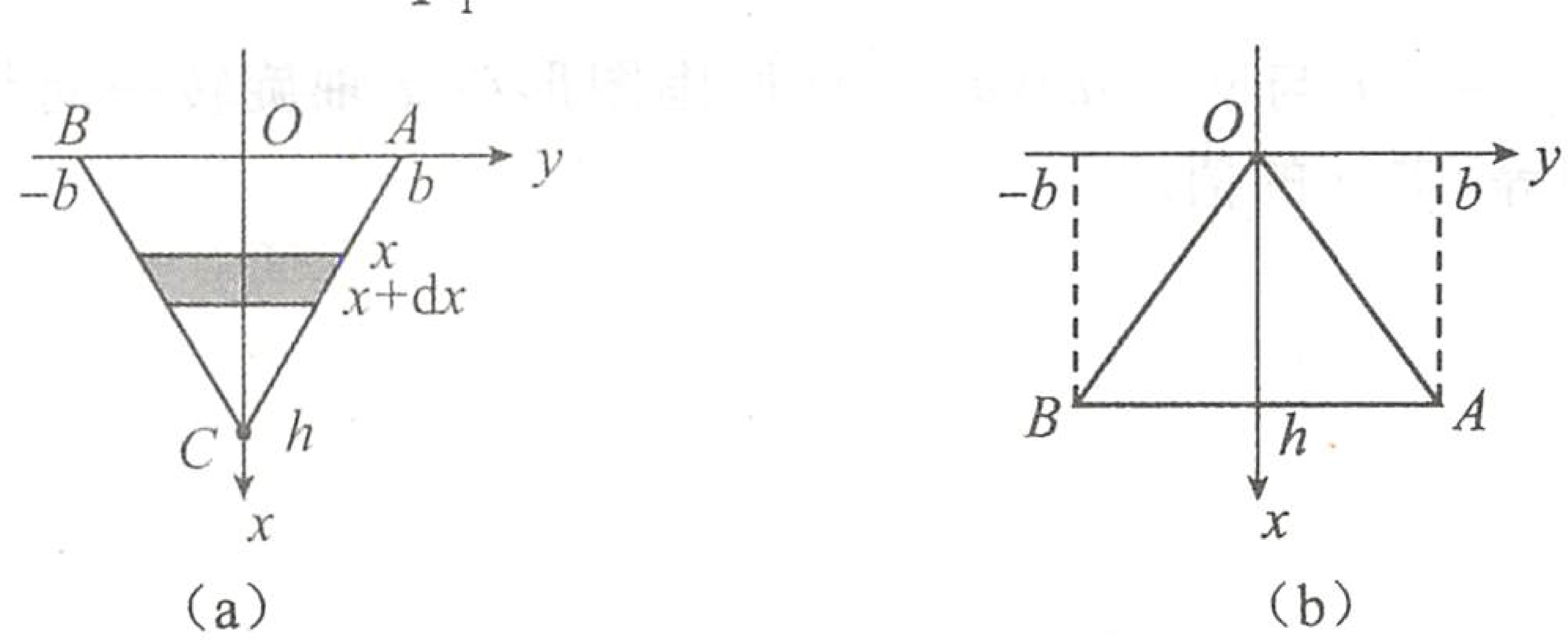


图 3-2

(38) 求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得旋转体的体积.

(39) 设心形线 $r=4(1+\cos\theta)$ 与 $\theta=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 所围图形为 D，求 D 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积.

(40) 设 D 位于曲线 $y=\dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\ (\alpha>0,2\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域.

（Ⅰ）求 D 的面积 $S(\alpha)$；

（Ⅱ）求 $S(\alpha)$ 的最小值.

(41) 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续且单调减少，$f(x)\geqslant 0$，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,dx$

$(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

(42) 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$，$b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n x\,\mathrm{d}x$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$.

拓 展 题

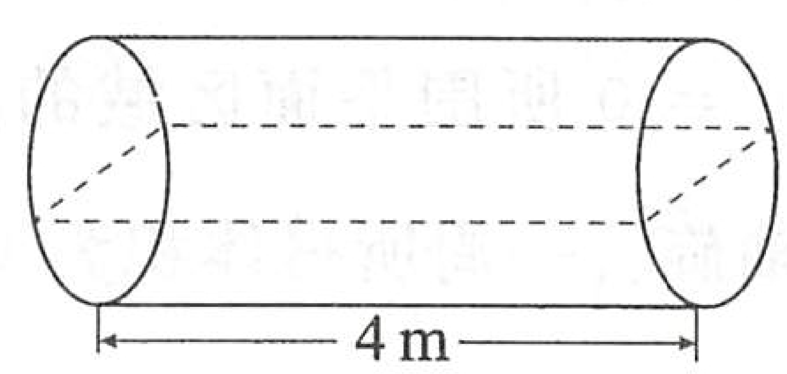
解答题

(1) 已知曲线 L 的极坐标方程为 $r=1+\cos\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$.

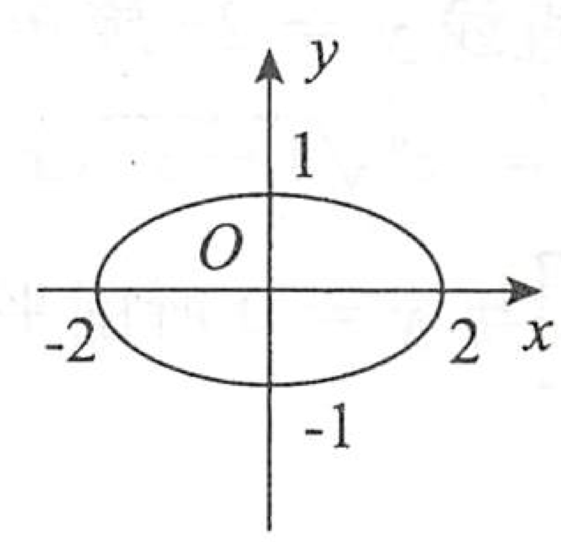
(Ⅰ) 求曲线 L 在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 对应点处的切线 T 的直角坐标方程；

(Ⅱ) 求曲线 L、切线 T 与 x 轴所围图形的面积.

(2) 如图 3-3(a) 所示，在水平放置的椭圆底柱形容器内存放液体(密度为 ρ kg/m³)，容器长为 4 m，椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$(单位：m)，即如图 3-3(b).



(a)



(b)

图 3-3

(Ⅰ) 当液面在过点 $(0,y)(-1\leqslant y\leqslant 1)$ 处的水平线时，问容器内液体的体积是多少？

(Ⅱ) 当容器内存满了液体后，平均每分钟从容器顶端抽出 0.16 m³ 的液体，当液面降至 $y=0$ 处时，求液体下降的速度；

(Ⅲ) 问抽出全部液体需做多少功？

(3) 已知曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=ax(a>0)$ 所围图形绕 x 轴旋转一周与绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积相等，求 a 的值.

李林考研数学系列

第四章　空间解析几何

基 础 题

一、选择题

(1)设向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,1),\boldsymbol{b}=(-1,0,2),\boldsymbol{c}=(0,k,-3)$ 共面，则 $k=$(　　).

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

(2)设直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3,\end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为(　　).

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

(3)设直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+2=0,\\2x-y-10z-1=0,\end{cases}$ 平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 L(　　).

A. 平行于平面 π　　B. 在平面 π 上

C. 垂直于平面 π　　D. 与平面 π 斜交

(4)方程 $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ 表示(　　).

A. 旋转双曲面　　B. 双叶双曲面

C. 双曲柱面　　D. 锥面

(5)设非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 满足 $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|$，则必有(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$　　B. $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$

C. $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$　　D. $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$

二、填空题

(1)设向量 $\boldsymbol{a}=(-1,3,0),\boldsymbol{b}=(3,1,0),|\boldsymbol{c}|=r$(常数). 当 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 时，r 的最小值为________.

(2)设向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1),\boldsymbol{b}=(1,-2,3),\boldsymbol{c}=(2,1,2)$，向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{r}=14$，则 $\boldsymbol{r}=$ ________.

(3)过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程为________.

(4)点 $P(1,-1,2)$ 到平面 $\pi:2x-y+5z-12=0$ 的距离 $d=$ ________.

(5)点 $P(1,-1,0)$ 到直线 $L:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{2}$ 的距离 $d=$ ________.

(6)直线 $L_1:\begin{cases}x-1=0,\\y=z\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y=0,\\z+2=0\end{cases}$ 之间的距离 $d=$ ________.

(7)直线 $L:\begin{cases}x+2y-3z=2,\\2x-y+z=3\end{cases}$ 在平面 $z=0$ 上的投影为________，在平面 $z=1$ 上的投影为________.

(8)过点 $A(1,1,-1),B(-2,-2,2)$ 和 $C(1,-1,2)$ 三点的平面方程为________.

(9)曲线 $\begin{cases}x^2+2z^2=4,\\y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面方程为________.

(10) 曲线$\begin{cases} z=2x^2+3y^2, \\ z=12-x^2-3y^2 \end{cases}$在 xOy 面上的投影曲线方程为________.

(11) 设$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$均为单位向量,其夹角为$\frac{\pi}{6}$,则以$\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}$与$3\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$为邻边的平行四边形的面积为________.

(12) 设$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$是非零常向量,$|\boldsymbol{\beta}|=2$($|\boldsymbol{\beta}|$表示$\boldsymbol{\beta}$的模),$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$之间的夹角为$\frac{\pi}{3}$,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{\alpha}+x\boldsymbol{\beta}|-|\boldsymbol{\alpha}|}{x}=$________.

三、解答题

(1) 求平行于平面 $x+y+z=9$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切的平面方程.

(2) 设平面π与点$P(1,2,1)$的距离为1,且过直线$L:\begin{cases} 3x-2y+2=0, \\ x-2y-z+6=0, \end{cases}$求平面$\pi$的方程.

(3) 设平面π过直线$L:\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0, \end{cases}$且与平面$\pi_1:x-4y-8z+12=0$的夹角为$45°$,求平面$\pi$的方程.

(4) 求直线$L:\frac{x+2}{3}=\frac{2-y}{1}=\frac{z+1}{2}$在平面$\pi:2x+3y+3z-8=0$上的投影直线方程.

(5) 求过点$(-1,2,3)$,垂直于直线$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$且平行于平面$7x+8y+9z+10=0$的直线方程.

(6) 求与直线$L_1:x+2=3-y=z+1$和$L_2:\frac{x+4}{2}=y=\frac{z-4}{3}$都垂直相交的直线方程.

(7) 求直线$L_1:\frac{x-3}{2}=y=\frac{z-1}{0}$与$L_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=z$的公垂线方程.

(8) 求直线$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$绕$z$轴旋转一周所得的旋转曲面方程.

(9) 求直线$L:\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{1}$绕直线$\begin{cases} x=2, \\ y=3 \end{cases}$旋转一周所得的曲面方程.

拓 展 题

解答题

求满足下列条件的动点的轨迹方程,并说明它们分别表示什么曲面.

(Ⅰ) 动点到坐标原点的距离等于它到平面 $z=4$ 的距离;

(Ⅱ) 动点到坐标原点的距离等于它到点$(2,3,4)$的距离的一半;

(Ⅲ) 动点到点$(0,0,5)$的距离等于它到 x 轴的距离;

(Ⅳ) 动点到 x 轴的距离等于它到 yOz 面的距离的两倍.

李林考研数学系列

第五章 多元函数微分学及其应用

基础题

一、选择题

(1) 设 $f(x,y)=\arcsin\sqrt{x^2+y^4}$，则下列选项正确的是(　　).

A. $f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 存在　　B. $f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 存在

C. $f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 不存在　　D. $f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 不存在

(2) 设 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 均存在，则下列选项正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$ 存在　　B. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)$ 存在　　D. $f(x,y)$ 在 $\mathring{U}(x_0,y_0)$ 内有定义

(3) 设方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，在此邻域内该方程(　　).

A. 可确定隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

B. 可确定隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

C. 可确定隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

D. 只能确定隐函数 $z=z(x,y)$

(4) 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处取得极大值，则(　　).

A. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数小于零

B. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数大于零

C. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数等于零

D. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数不存在

(5) 设 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$，则 $f(x,y)$ 在点 $P\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 处(　　).

A. 取得极小值 $-\frac{e}{2}$　　B. 取得极大值 $-\frac{e}{2}$

C. 取得极大值 e　　D. 不取得极值

(6) 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f'_x(0,0)=1$，$f'_y(0,0)=1$，则(　　).

A. $dz\Big|_{(0,0)}=dx+dy$

B. 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $(1,0,1)$

C. 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为 $(1,1,1)$

D. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)$ 必存在

(7) 设 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则(　　).

A. $f'_x+f'_y=0$　　B. $f'_x-f'_y=0$　　C. $f'_x-f'_y=f$　　D. $f'_x+f'_y=f$

(8) 设曲面 S 由方程 $F(ax-bz,ay-cz)=0$ 所确定，F 有连续偏导数，a,b,c 是不为零的常数，则曲面 S 上任一点的切平面都平行于直线(　　).

A. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$　　B. $\dfrac{x}{b}=\dfrac{y}{c}=\dfrac{z}{a}$　　C. $\dfrac{x}{c}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{a}$　　D. $\dfrac{x}{c}=\dfrac{y}{a}=\dfrac{z}{b}$

二、填空题

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ ________.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=$ ________.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 0}}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=$ ________.

(4) 设 $z=(1+xy)^y$,则 $dz\Big|_{(1,1)}=$ ________.

(5) 设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $f(1,2)=2,f'_x(1,2)=3,f'_y(1,2)=4,F(x)=f[x,f(x,2x)]$,则 $F'(1)=$ ________.

(6) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x=ze^{y+z}$ 确定,则 $dz\Big|_{(e,0)}=$ ________.

(7) 设 $\begin{cases}y=f(x,t),\\ F(x,y,t)=0,\end{cases}$ f,F 有一阶连续偏导数,则$\dfrac{dy}{dx}=$ ________.

(8) 设 $y=f(x,t),t=t(x,y)$ 由方程 $G(x,y,t)=0$ 确定,f,G 可微,则$\dfrac{dy}{dx}=$ ________.

(9) 设 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+g(e^x,\sin y)$,$f$ 有二阶连续导数,g 有二阶连续偏导数,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

(10) 设 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数,$y=f(e^x,\cos x)$,则$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$ ________.

(11) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 确定,则 $dz\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$ ________.

(12) 设 $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$,则$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,2)}=$ ________.

(13) 设 $z(x,y)$ 的全微分 $dz=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$,则 $z(x,y)=$ ________.

(14) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z+\ln z-\displaystyle\int_y^x e^{-t^2}dt=0$ 确定,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

(15) 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$,$f$ 具有二阶连续偏导数,g 具有二阶连续导数,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

(16) 曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $P(2,1,4)$ 处的切平面方程为________,法线方程为________.

(17) 曲线 L:$\begin{cases}x^2+y^2=10,\\ x^2+z^2=10\end{cases}$ 在点 $P(3,1,1)$ 处的切线方程为________,法平面方程为________.

(18) 设$\dfrac{(x+ky)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某二元函数的全微分,则 $k=$ ________.

(19) 设 $f(x,y)$ 有连续偏导数,在 $P(1,-2)$ 处有 $f'_x(1,-2)=1,f'_y(1,-2)=-1$,则 $f(x,y)$ 在 $P(1,-2)$ 处增加最快的方向为________.

(20) 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $P(1,2,-2)$ 处的梯度 **grad** $u(P)=$ ________.

三、解答题

(1) 设 $u = f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$y = y(x)$，$z = z(x)$ 分别由方程 $e^{xy} - y = 0$ 和 $e^z - xz = 0$ 确定，求$\dfrac{du}{dx}$.

(2) 设 $y = y(x)$，$z = z(x)$ 由方程组$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3x, \\ 2x - 3y + 5z = 4 \end{cases}$确定，求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dz}{dx}$.

(3) 设曲面 S：$(x-y)^2 - z^2 = 1$，求坐标原点到 S 的最短距离.

(4) 求平面$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{5} = 1$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

(5) 求双曲线 $xy = 4$ 与直线 $2x + y = 1$ 之间的最短距离.

(6) 求函数 $z = x^3 - 3x^2 - 3y^2$ 在闭区域 D：$x^2 + y^2 \leqslant 16$ 上的最大值.

(7) 设椭圆$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y + z = 4 \end{cases}$上的点 (x,y,z) 到原点的距离为 d，求其最值以及使得 d 取最大和最小的点.

(8) 设 $u(x,y)$ 有二阶连续偏导数，利用变换 $\xi = x + ay$，$\eta = x + by$，将方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

化为$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$，求 a，b 的值.

(9) 设 $f(u)$ 有二阶连续导数，且 $z = f(e^x \sin y)$ 满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ze^{2x}$，求 $f(u)$.

综 合 题

一、选择题

(1) 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不可微，则下列命题一定不成立的是（　　）.

A. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续

B. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数均存在且偏导数连续

C. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数均存在且至少有一个不连续

D. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任何方向的方向导数均不存在

(2) 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)}{e^{x^2+y^2} - 1} = 1$，则（　　）.

A. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值　　B. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值

C. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不取得极值　　D. 不能确定 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极值

(3) 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y) - f(0,0)}{|x| + y^4} = -1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.

A. 取得极小值　　B. 取得极大值　　C. 不取得极值　　D. 无法确定是否取得极值

(4) 设 $f(x,y) = \begin{cases} y\arctan \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.

A. 连续但不可微　　B. 偏导数存在但不连续

C. 可微　　D. 连续但偏导数不存在

(5) 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，$f(0,0) = 0$，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = k(k \text{ 为常数}),$$

则当 $k>-1$ 时,(　　).

A. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微　　B. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值

C. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值　　D. $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ 都存在

(6) 设 $f(x,y)$ 可微,对任意的 x,y,有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,则使得 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是(　　).

A. $x_1<x_2, y_1>y_2$　　B. $x_1>x_2, y_1>y_2$

C. $x_1<x_2, y_1<y_2$　　D. $x_1>x_2, y_1<y_2$

(7) 设 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有二阶连续偏导数,且 $F(x_0,y_0)=0$, $F'_x(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x_0,y_0)>0$, $F''_{xx}(x_0,y_0)<0$,则由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 在 $x=x_0$ 处(　　).

A. 取得极小值　　B. 取得极大值

C. 不取得极值　　D. 不能确定是否取得极值

二、填空题

(1) 设 $z=z(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$,且 $z(x,0)=1$, $z'_y(x,0)=x$,则 $z(x,y)=$ ________.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数,满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=x+y$,且 $z(x,0)=x$, $z(0,y)=y^2$,则 $z(x,y)=$ ________.

(3) 设 $z=\dfrac{2x}{x^2-y^2}$,则 $\left.\dfrac{\partial^n z}{\partial y^n}\right|_{(2,1)}=$ ________.

(4) 设曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面平行于平面 $x+4y+6z=0$,则该切平面方程为________.

(5) 设可微函数 $f(x,y)$ 对任意 x,y,t,满足 $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$, $P_0(1,-2,2)$ 是曲面 $z=f(x,y)$ 上一点,且 $f'_x(1,-2)=4$,则曲面在 P_0 点处的切平面方程为________.

(6) 设 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$, $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$,则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=$ ________.

(7) 设 $u(x,y,z)=xy^2z^3$ 在点 $P(1,2,-1)$ 处沿曲面 $x^2+y^2=5$ 的外法线方向的方向导数为________.

三、解答题

(1) 已知 $x+y-z=\mathrm{e}^z$, $x\mathrm{e}^x=\tan t$, $y=\cos t$,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}$.

(2) 设 f 有一阶连续导数,证明:$z=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的充要条件是 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

(3) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{z}$ 确定的隐函数,其中 F 可微,求 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(4) 设 $y=g(x,z)$ 与 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(x-z,xy)=0$ 确定的函数,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(5) 求函数 $f(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$ 在条件 $x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

(6) 求椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0)$ 在第一卦限上的切平面与三个坐标面围成的

四面体的最小体积.

(7) 设函数 $f(x,y)=3x+4y-ax^2-2ay^2-2bxy$，问 a,b 满足什么条件时，$f(x,y)$ 有唯一的极大值和唯一的极小值？

(8) 设 $f(x,y)=e^{-x}(ax+b-y^2)$ 在点 $(-1,y_0)$ 处取得极大值，求 a,b 满足的条件.

(9) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

(10) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(x)>0$，$f'(0)=0$，证明：$z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的充分条件是 $f''(0)>0$ 且 $f(0)>1$.

(11) 已知 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=(y-x^2)dx+(x-1)dy$，且 $f(1,1)=-\dfrac{1}{3}$，求 $f(x,y)$ 在 $D:0\leqslant y\leqslant 7-x,\ 0\leqslant x\leqslant 7$ 上的最大值.

(12) 求曲线 $x^2+xy+y^2=1$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

(13) 设中心在原点的椭圆为 $x^2-4xy+5y^2=1$，求该椭圆的长半轴与短半轴.

(14) 设 $x=x(y)$，$z=z(y)$ 由方程组 $\begin{cases}F(y-x,y-z)=0,\\ G\left(xy,\dfrac{z}{y}\right)=0\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dx}{dy},\dfrac{dz}{dy}$.

(15) 已知曲面 $e^{2x-z}=f(\pi y-\sqrt{2}z)$，$f$ 可微. 证明：该曲面上任一点的切平面都平行于一条定直线.

(16) 设 α,β 为正数，且 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$，求 $f(x,y)=\dfrac{1}{\alpha}x^{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}y^{\beta}$ 在条件 $xy=1(x>0,y>0)$ 下的最小值.

(17) 求函数 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 在点 $P(x,y,z)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的方向导数，并讨论在哪些点该方向导数等于梯度的模.

拓 展 题

一、选择题

下列(　　)选项条件成立时，能够推出函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，且全微分 $df(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}=0$.

A. $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$

B. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

C. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta f=\dfrac{\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

D. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta f=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

二、解答题

设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，$f(0,0)=0$，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=1+k\ (k\ 为常数).$$

证明：(Ⅰ) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续；

(Ⅱ) 当 $k\neq -1$ 时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微；

(Ⅲ) 当 $k=-1$ 时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

第六章 重积分及其应用

基础题

一、选择题

(1) 设 D 为由直线 $x+y=\frac{1}{2}$，$x+y=1$ 与两坐标轴所围的区域，

$$I_1=\iint\limits_D[\ln(x+y)]^9\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ I_2=\iint\limits_D(x+y)^9\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ I_3=\iint\limits_D[\sin(x+y)]^9\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则(　　).

A. $I_1\leqslant I_2\leqslant I_3$　　B. $I_1\leqslant I_3\leqslant I_2$　　C. $I_3\leqslant I_2\leqslant I_1$　　D. $I_3\leqslant I_1\leqslant I_2$

(2) 设 D 为由 $y=x^2-4$ 和 $y=0$ 所围区域，$I=\iint\limits_D(kx+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则(　　).

A. $I=0$　　B. $I>0$

C. $I<0$　　D. I 的正负与 k 有关

(3) 设 D 是 xOy 平面上以 $A(1,1)$，$B(-1,1)$，$C(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $I=\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　).

A. 0　　B. $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

C. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　D. $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(4) 积分 $I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$(　　).

A. $\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

(5) 设 $D:x^2+y^2\leqslant x$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　).

A. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$　　B. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$　　D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(6) 将二重积分 $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 化为直角坐标系下的二次积分，则 $I=$(　　).

A. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$

B. $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

C. $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$

D. $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$

(7) 设 $V: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0, V_1$ 是 V 位于第一卦限的部分，则(　　).

A. $\iiint\limits_V z dV = 4\iiint\limits_{V_1} z dV$　　B. $\iiint\limits_V x dV = 4\iiint\limits_{V_1} x dV$

C. $\iiint\limits_V y dV = 4\iiint\limits_{V_1} y dV$　　D. $\iiint\limits_V xyz dV = 4\iiint\limits_{V_1} xyz dV$

二、填空题

(1) 二重积分 $I = \int_0^1 x^2 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy =$ ________.

(2) 二重积分 $I = \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy =$ ________.

(3) 二重积分 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 \sin y^2 dy =$ ________.

(4) 设 $D: x^2+y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0, f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且取正值，则 $I = \iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}} dxdy =$ ________.

(5) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx = A$，则 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy =$ ________.

(6) 设 $D: x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$，则 $I = \iint\limits_D \frac{1+x-y}{1+x^2+y^2} dxdy =$ ________.

(7) 设 $D: -1 \leqslant x \leqslant 0, 1-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant -x$，则 $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4-x^2-y^2}} =$ ________.

(8) 设 $D: 2x \leqslant x^2+y^2, 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 2$，则 $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} =$ ________.

(9) 设 $D: x^2+y^2 \leqslant 1$，则 $I = \iint\limits_D \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right) dxdy =$ ________.

(10) 设区域 D 由 $x = -\sqrt{2y-y^2}, x = -2, y = 0, y = 2$ 所围，则 $I = \iint\limits_D y dxdy =$ ________.

(11) 设 $D: x^2+y^2 \leqslant 2x$，则 $I = \iint\limits_D (2x+3y) dxdy =$ ________.

(12) 设 $V: x^2+y^2+z^2 \leqslant 2y-2x$，则 $I = \iiint\limits_V (x+y+z) dV =$ ________.

(13) 球体 $x^2+y^2+z^2 = R^2 (R>0)$ 被圆柱面 $x^2+y^2 = Rx$ 所截得含在圆柱面内的立体的体积为________.

(14) $r \leqslant 1$ 与 $r \leqslant 1+\cos\theta$ 所围平面区域的形心坐标为________.

(15) 设平面薄片(密度 $\rho = 1$)由 $y^2 = x^3$ 与直线 $y = x$ 所围，则 D 对 x 轴和 y 轴的转动

惯量分别为 $I_x=$ ________, $I_y=$ ________.

三、解答题

(1) 计算下列二重积分:

(Ⅰ) 设 D 由 $x-y=0, x+y=0$ 及 $x=1$ 所围,求 $I=\iint\limits_D xy(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(Ⅱ) 设 D 由 $y=\sqrt{x}, y=x$ 所围,求 $I=\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(Ⅲ) 设 D 由 $y=x^2(x\geqslant 0), y=1, x=0$ 所围,求 $I=\iint\limits_D \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(Ⅳ) 设 $D:-1\leqslant x\leqslant \sin y, |y|\leqslant \dfrac{\pi}{2}$,求 $I=\iint\limits_D x(\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, x^2+y^2\leqslant 2x, y\geqslant 0\}$,计算 $I=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(3) 设 $D:x^2+y^2\leqslant\sqrt{2}x, 0\leqslant y\leqslant x$,计算 $I=\iint\limits_D \left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(4) 设 $D:x^2+y^2\leqslant 9$,计算 $I=\iint\limits_D |x^2+y^2-4|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(5) 设 $D:1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x, y\geqslant 0$,计算 $I=\iint\limits_D \dfrac{y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(6) 设 $D:0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2$,计算 $I=\iint\limits_D [1+x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $[1+x+y]$ 表示不超过 $1+x+y$ 的最大整数.

(7) 计算 $I=\iint\limits_D \max\{x,y\}\cdot|y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D:0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$.

(8) 计算 $I=\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant 4$.

(9) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}, & 1\leqslant x\leqslant 3, \dfrac{\sqrt{3}}{3}x\leqslant y\leqslant x, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ D 由 $x=3, x=1, y=0, y=3$ 所围,计算 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(10) 计算 $I=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由下列双纽线所围.

(Ⅰ) $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$;

(Ⅱ) $(x^2+y^2)^2=2xy$.

(11) 设 V 由曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围,求 $I=\iiint\limits_V z\mathrm{d}V$.

(12) 设 V 是由曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 $z+1=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围的区域,计算 $I=\iiint\limits_V z^2\mathrm{d}V$.

(13) 求曲面 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 与 $x^2+y^2=4z$ 所围立体体积,

(14) 设 V 是由 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ 所围的区域,计算 $I=\iiint\limits_V z^2\mathrm{d}V$.

综合题

一、选择题

(1) $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，$I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\,dxdy$，$I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\,dxdy$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant 1$，则(　　).

A. $I_1>I_2>I_3$　　B. $I_1<I_2<I_3$　　C. $I_2>I_1>I_3$　　D. $I_3>I_1>I_2$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{n}\right)(n^2+j^2)}=$(　　).

A. $\dfrac{\pi}{4}\ln 2$　　B. $\dfrac{\pi}{8}\ln 2$　　C. $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$　　D. $\pi\ln 2$

(3) 积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr=$(　　).

A. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$　　B. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$　　D. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

二、填空题

(1) 设 $D:0\leqslant x\leqslant y\leqslant 2\pi$，则 $I=\iint\limits_D|\sin(x-y)|\,dxdy=$ ________.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $D:-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$，则 $I=\iint\limits_D f(y)f(x+y)\,dxdy=$ ________.

(3) 设 $D=\left\{(x,y)\left|\dfrac{x}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant\dfrac{y}{2}\right.\right\}$，则 $I=\iint\limits_D\dfrac{1}{xy}dxdy=$ ________.

(4) 积分 $I=\int_0^1 dy\int_0^{y^2}y\sin(1-x)^2dx=$ ________.

(5) 积分 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\theta}{2}}^{\pi}\theta^2e^{r^2}dr=$ ________.

(6) 交换积分顺序 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr\,(a>0)$ 为________.

(7)（选做）设 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，则 $I=\iint\limits_D y^2\,dxdy=$ ________.

(8) 设 V 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=1$，$z=2$ 所围成的立体，计算 $I=\iiint\limits_V\dfrac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz=$ ________.

(9) 积分 $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dz\int_0^{1-x-z}(1-y)e^{-(1-y-z)^2}dy=$ ________.

(10) 设 V 是由曲面 $x^2+y^2-2z^2=1$、平面 $z=1$ 及 $z=2$ 所围成的区域，则 $I=\iiint\limits_V z\,dV=$

________.

(11) 设 V 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围,则 $I=\iiint\limits_V (x+z)\mathrm{d}V=$ ________.

三、解答题

(1) 设 $D:|x|\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2$,计算 $I=\iint\limits_D |y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 计算积分

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x}\mathrm{e}^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{2-x}\mathrm{e}^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)\mathrm{d}y.$$

(3) 求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^6}\int_0^t \mathrm{d}x\int_x^t \sin(xy)^2\mathrm{d}y$.

(4) 计算 $I=\int_{\arctan\frac{1}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}}^{\frac{2}{\cos\theta}} r^2\cos\theta\mathrm{d}r$.

(5) 设可导函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,求极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{t^2-x^2}}^{\sqrt{t^2-x^2}}\left[f(\sqrt{x^2+y^2})+2y\right]\mathrm{d}y}{t^3}.$$

(6) 设 $F(t)=\begin{cases}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant t^2\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}} x\left[1-\dfrac{F(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & t\neq 0,\\ 0, & t=0,\end{cases}$ 求函数 $F(t)$ 的表达式.

(7) 设 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续导数,且

$$f(t)=2\iint\limits_D (x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+t^4, D:x^2+y^2\leqslant t^2,$$

求 $f(t)$.

(8) 设 $f(x,y)$ 在区域:$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 上连续,$f(0,0)=0$,且 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,$f'_y(0,0)=1$,求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{4}}}$.

(9) 设 $D:x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0,f(x,y)$ 在 D 上连续,且

$$f(x,y)=(x^2+y^2-x+y-1)+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

求 $f(x,y)$.

(10) 设 $f(x)$ 是连续正值函数,且单调减少,证明:$\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\dfrac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$.

(11) 设 D 为由摆线 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 及 x 轴所围的平面区域,求 D 的质心坐标.

(12) 设 $V:0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,求 $I=\iiint\limits_V (3x^2+5y^2+7z^2)\mathrm{d}V$.

(13) 设 $F(t)=\iiint\limits_V [z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}V$,$f(u)$ 连续,其中 $V:0\leqslant z\leqslant h,x^2+y^2\leqslant t^2$.

（Ⅰ）求$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$；

（Ⅱ）求$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^2}F(t)$.

(14) 设 V 是由平面 $z=0,z=1$ 及圆柱面 $x^2+y^2=2$ 所围成的图形，计算

$$I=\iiint\limits_V |z-\sqrt{x^2+y^2}|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(15) 某均匀物体由上、下两部分组成，上部分是半径为 a 的半球体，下部分是底面半径为 a、高为3的直圆锥体，且半球体的底面圆与圆锥的底面重合，问当 a 为何值时，此物体的质心恰好在球心位置？

(16) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上是连续正值函数，且 $f(x)$ 单调减少，$D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$，证明：$\iint\limits_D xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 0$.

(17) 设 $f(u)$ 在$[-1,1]$上连续，$D:|x|+|y|\leqslant 1$，证明：

$$\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u.$$

(18) 设 $D:x^2+y^2\leqslant 2tx,y\geqslant 0(t>0)$，$f(u)$ 在 $u=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，求

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(19) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上非负可导，且单调增加，$(\overline{x},\overline{y})$ 为 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ 的形心，证明：$\overline{x}\geqslant\dfrac{1}{2}(a+b)$.

拓 展 题

解答题

(1) 设 D 由 x 轴，曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$，$x=0,x=a(a>0)$ 围成，平面图形 D 的质心（形心）的横坐标为 $\overline{x}=\dfrac{2}{3}a$.

（Ⅰ）记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，证明：$F'(x)=\dfrac{2F(x)}{x}$；

（Ⅱ）求 $f(x)$.

(2) 设 D 是由曲线$\begin{cases}x=1-\cos t,\\ y=t-\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 y 轴所围平面区域，计算

$$I=\iint\limits_D(2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

第七章 微分方程及其应用

基础题

一、选择题

(1) 下列选项中(C为任意常数),是微分方程$\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=0$的通解的是( ).

A. $x^2+y^2=C^2$ B. $x^2-y^2=C^2$ C. $x^2+y^2=C$ D. $x^2-y^2=C$

(2) 设$y'+P(x)y=0$的一个特解为$y=\cos 2x$,则该方程满足$y(0)=2$的特解为( ).

A. $2\cos x$ B. $2\cos 2x$ C. $\cos 2x$ D. $\cos 2x+1$

(3) 微分方程$y''+2y'-3y=e^{-x}+x$的一个特解形式为( ).

A. $ae^{-x}+bx+c$ B. $axe^{-x}+x(bx+c)$

C. $axe^{-x}+bx+c$ D. $ae^{x}+x(bx+c)$

(4) 设$y_1(x),y_2(x)$是$y'+P(x)y=0$的两个不同特解,其中$P(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且$P(x)$不恒为0,则下列结论中错误的是( ).

A. $y_1(x)-y_2(x)=$常数 B. $C[y_1(x)-y_2(x)]$是方程的通解

C. $y_1(x)-y_2(x)$在任一点不为0 D. $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\equiv$常数$(y_1(x)\neq 0)$

(5) 设$y_1(x),y_2(x),y_3(x)$是微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的三个线性无关的解,$f(x)\neq 0$,则该方程的通解为( ).

A. $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_3(x)$

B. $C_1y_1(x)+(1-2C_1)y_2(x)+C_1y_3(x)$

C. $(C_1-C_2)y_1(x)+C_2y_2(x)+y_3(x)$

D. $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+C_3y_3(x)(C_1+C_2+C_3=1)$

二、填空题

(1) 微分方程$(y-x\sin x)dx+xdy=0$的通解为________.

(2) 微分方程$(1+y^2)dx+(2x-1)ydy=0$的通解为________.

(3) $y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$满足$y(1)=\frac{\pi}{6}$的特解为________.

(4) 微分方程$y'-6\frac{y}{x}+xy^2=0$(y不为常函数)的通解为________.

(5) 微分方程$(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0(y>0)$的通解为________.

(6) 微分方程$xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$的通解为________.

(7) 方程$y''+2y'+y=xe^x$满足$y(0)=0,y'(0)=0$的特解为________.

(8) 方程$y''-3y'+2y=10e^{-x}\sin x$满足当$x\to+\infty$时,$y(x)\to 0$的特解为________.

(9) 方程$(1-x^2)y''-xy'=0$满足$y(0)=0,y'(0)=1$的特解为________.

(10) 设二阶线性非齐次微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$有三个特解为x,e^x,e^{-x},

则该方程的通解为________.

(11) 设二阶常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 有特解 $y^*=e^{-x}(1+xe^{2x})$，则该方程的通解为________.

三、解答题

(1) 求 $x^2y''-y'^2=0$ 过点 $P(1,0)$，且在点 P 与 $y=x-1$ 相切的积分曲线.

(2) 求微分方程 $(x\cos y+\cos x)\dfrac{dy}{dx}-y\sin x+\sin y=0$ 的通解.

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=\cos x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，求 $f(x)$.

(4) 设 $f(x)$ 可导，对任何实数 x,y 满足 $f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)$，且 $f'(0)=e$，求 $f(x)$.

(5) 求微分方程 $y''+\dfrac{1}{2}y'^2=2y$ 满足 $y(0)=y'(0)=2$ 的特解.

(6) 求微分方程 $y'''-y'=0$ 的一条积分曲线，使此积分曲线在原点处有拐点，且以直线 $y=2x$ 为切线.

(7) 设 $f(u)$ 有二阶连续导数，$z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=x^2+y^2$，求 z 的表达式.

(8) 利用变换 $u=e^x$，求微分方程 $y''-(2e^x+1)y'+e^{2x}y=e^{3x}$ 的通解.

(9) 设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

(Ⅰ) 求曲线 L 的方程；

(Ⅱ) 求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围的面积最小.

(10) 设 $\overset{\frown}{OA}$ 是连接 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧，$P(x,y)$ 为 $\overset{\frown}{OA}$ 上任一点，曲线弧 $\overset{\frown}{OP}$ 与有向线段 $\overline{OP}$ 所围图形的面积为 x^2，求曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程.

综 合 题

一、选择题

(1) 下列方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是(　　).

A. $y'''-y''+y'-y=0$　　B. $y'''+y''+y'-y=0$

C. $y'''+y''-y'-y=0$　　D. $y'''-y''-y'-y=0$

(2) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2xe^x$，则非齐次微分方程 $y''+py'+qy=x$ 满足 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的特解为 $y=$(　　).

A. xe^x-x-2　　B. xe^x-x+2

C. $-xe^x+x+2$　　D. $-xe^x-x+2$

(3) 设 C 为任意常数，则以 $y=e^{Cx+x^2}$ 为通解的一阶微分方程为(　　).

A. $xy'-y\ln y=x^2y$　　B. $xy'+y\ln y=xy^2$

C. $xy'-y\ln y^2=xy$　　D. $xy'+y\ln y=xy$

(4) 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的两个解，若常数 λ,μ，使得 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是对应的齐次微分方程的解，则(　　).

A. $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$　　B. $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$

C. $\lambda=\dfrac{1}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$　　D. $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$

二、填空题

(1) 微分方程 $y'=\dfrac{y}{x+(y+1)^2}$(y 不为常函数)的通解为________.

(2) 微分方程 $y''-y=\sin x$ 满足 $y(0)=0$, $y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的特解为________.

(3) 微分方程 $y'=\dfrac{y^2-x}{2y(x+1)}$ 的通解为________.

(4) 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y+x}$ 满足 $y(1)=0$ 的特解为________.

(5) 微分方程 $y'\sec^2 y+\dfrac{x}{1+x^2}\tan y=x$ 满足 $y(0)=0$ 的特解为________.

(6) 微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解为________.

(7) 微分方程 $y''-y=\sin^2 x$ 的通解为________.

(8) 设 $f(x)$ 有连续导数,对任意 a 满足 $f(x+a)=\int_x^{x+a}\dfrac{t(t^2+1)}{f(t)}dt+f(x)$,且 $f(1)=\sqrt{2}$,则 $f(x)=$________.

(9) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数,且 $f(x)=\int_0^x f(1-t)dt+1$,则 $f(x)=$________.

三、解答题

(1) 设 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$,且 $f'(0)$ 存在,求 $f'(x)$ 及 $f(x)$.

(2) 利用变量替换 $x=\sin t, y=y(t)\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 化简方程 $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0$,并求该方程的通解.

(3) 设 $y''+(4x+e^{2y})y'^3=0$.

(Ⅰ) 若视 x 为因变量,y 为自变量,化简该方程;

(Ⅱ) 求该方程的通解.

(4) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数,且 $f(1)=1, f'(1)=2$,求 $u(x,y)$,使得

$$du=-6yf(x)dx+[x^2f'(x)-4xf(x)]dy.$$

(5) 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有二阶连续导数,$f(1)=0, f'(1)=1$,且函数 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,求 $f(x)$ 及 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

(6) 设二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=(cx+d)e^{2x}$ 有特解 $y=2e^x+(x^2-1)e^{2x}$,求该方程的通解,并求 a,b,c,d 的值.

(7) 设 $y(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上有一阶连续导数,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[y'(x)+y(x)]=k$,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$.

(8) 设 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)$, $g(x)=\int_0^x[1-f(t)]dt+1$,且 $f(0)=1$,求

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}[g(x)-f(x)]dx.$$

(9) 设 $y=y(x)$ 有一阶连续导数,$y(0)=1$,且满足

$$y'(x)+3\int_0^x y'(t)\,dt+2x\int_0^1 y(xu)\,du+e^{-x}=0,$$

求 $y=y(x)$.

(10) 设 $y=y(x)$ 是向上凸的连续曲线，其上任一点 (x,y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程.

(11)（Ⅰ）设 $a(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是非负连续函数，证明：当且仅当 $\int_0^{+\infty}a(t)\,dt$ 发散时，微分方程 $\frac{dx}{dt}+a(t)x=0$ 的每一个解 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$；

（Ⅱ）设 $a>0$，$f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续有界，证明：方程 $\frac{dx}{dt}+ax=f(t)(t\geqslant 0)$ 的所有解在 $[0,+\infty)$ 上有界.

(12) 设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$，过曲线 $y=y(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 作曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两条直线与 x 轴所围三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积记为 S_2，且 $2S_1-S_2=1$，求曲线 $y=y(x)$.

(13) 一架质量为 4.5 吨的歼击机以 600 km/h 的航速开始着陆，在减速伞的作用下滑跑 500 m 后速度减为 100 km/h，设减速伞的阻力与飞机的速度成正比，忽略飞机所受的其他外力，求减速伞的阻力系数. 若保障飞机安全着陆，跑道长度至少应为多少？

拓展题

解答题

(1) 设环境保持恒定温度 20℃，有一物体的温度在 10 秒内从 100℃ 降到 60℃，若物体温度下降的速度与该物体与环境温度之差成正比，问此物体从 100℃ 降到 25℃ 需要多少时间？

(2) 设全微分方程

$$[xy(x+y)-f(x)y]dx+[x^2y+f'(x)]dy=0,$$

其中 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，求 $f(x)$ 及全微分方程的通解.

第八章　无穷级数

基础题

一、选择题

(1) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散，则(　　).

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 必发散　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 必发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$ 必发散　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)$ 必发散

(2) 下列结论正确的是(　　).

A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n v_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛

B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛且 $u_n \leqslant v_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散($u_n \geqslant 0$)，则 $u_n \geqslant \frac{1}{n}$

(3) 下列结论正确的是(　　).

A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 必收敛

B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 必发散

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 必发散

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(v_n>0)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n v_n|$ 收敛

(4) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下列级数收敛的是(　　).

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{u_n}{n}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$

(5) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(u_n>0)$ 收敛，则下列结论正确的是(　　).

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$ 收敛　　C. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$

(6) 下列结论正确的是(　　).

A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(u_n>0)$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} n^2 u_n=0$

B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 必条件收敛

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛

(7) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}\sin(n+k)$（$k$ 为常数）(　　).

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 收敛性与 k 有关

(8) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$(　　).

A. 发散　　B. 条件收敛　　C. 绝对收敛　　D. 无法确定敛散性

二、填空题

(1) 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$，则 $F(x)=\frac{xf(x)}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数为________.

(2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 $[-1,3]$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛域为________.

(3) $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ 展开为 x 的幂级数为________.

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(\pi)=$________.

(5) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2(1-x), & \frac{1}{2}<x<1,\end{cases}$ $f(x)$ 的傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\pi x, x\in(-\infty,+\infty)$，其和函数为 $S(x)$，$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x$，则 $S\left(\frac{1}{2}\right)=$________，$S(99)=$________.

三、解答题

(1) 判别下列级数的敛散性：

(Ⅰ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$；

(Ⅱ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}(a>0,p>0)$；

(Ⅲ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt{1+x^3}\,dx}$；

(Ⅳ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)(a>0)$；

(Ⅴ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$；

(Ⅵ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)(a>0)$.

(2) 判别下列级数的敛散性，若收敛，判断是条件收敛还是绝对收敛：

(Ⅰ)设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n e^n$ 收敛,判别 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性;

(Ⅱ)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(1+n)}$;

(Ⅲ)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\ln n}$;

(Ⅳ)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{3}-1)$.

(3)求下列级数的收敛域:

(Ⅰ)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n\sqrt{n}}$;　(Ⅱ)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$;

(Ⅲ)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^n x^n$;　(Ⅳ)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{3^n}$.

(4)求下列级数的收敛域:

(Ⅰ)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$;　(Ⅱ)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{3^n+n^2}$;

(Ⅲ)$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}x^n$;　(Ⅳ)$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}+\frac{1}{2^n}\right)x^n$.

(5)求下列幂级数的收敛域及和函数:

(Ⅰ)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n2^n}$;　(Ⅱ)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$;

(Ⅲ)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}x^n$;　(Ⅳ)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n}$.

(6)将下列函数展开为 x 的幂级数,并确定收敛域:

(Ⅰ)$f_1(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$;　(Ⅱ)$f_2(x)=\ln(1-x-2x^2)$;

(Ⅲ)$f_3(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　(Ⅳ)$f_4(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

(7)将 $f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}$ 展开为 $x-5$ 的幂级数.

(8)将 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 在 $x=-2$ 处进行幂级数展开.

(9)求下列级数的和:

(Ⅰ)$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$;　(Ⅱ)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$.

(10)(Ⅰ)证明:$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$;

(Ⅱ)利用(Ⅰ)的结果求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

(11)将 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为余弦级数,并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

(12)将 $f(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 展开为以 2 为周期的傅里叶级数.

综合题

一、选择题

(1)级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\frac{\sin kn\pi}{n^2}\right]$($k$ 为常数)(　　).

A. 条件收敛　　B. 绝对收敛　　C. 发散　　D. 敛散性与 k 有关

(2)设 $a>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$ 发散，则(　　).

A. $a>\mathrm{e}$　　B. $a=\mathrm{e}$　　C. $\frac{1}{2}<a<\mathrm{e}$　　D. $0<a\leqslant\frac{1}{2}$

(3)设 $u_n=\frac{|a_n|+a_n}{2}$，$v_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}$，则下列四个级数

(Ⅰ)$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，　(Ⅱ)$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$，　(Ⅲ)$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，　(Ⅳ)$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$

的收敛性关系是(　　).

A. 若(Ⅰ)收敛，则(Ⅲ)和(Ⅳ)都收敛

B. 若(Ⅱ)收敛，则(Ⅰ)，(Ⅲ)和(Ⅳ)都收敛

C. 若(Ⅲ)和(Ⅳ)发散，则(Ⅰ)和(Ⅱ)都发散

D. (Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)(Ⅳ)的收敛性无确定的关系

(4)设有两个数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，则(　　).

A. 当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛　　B. 当 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛

C. 当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散　　D. 当 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 发散

(5)判别级数 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$ 的敛散性，正确的结论是(　　).

A. 由莱布尼茨定理，可推得该级数收敛

B. 由于添加括号后级数发散，故原级数发散

C. 由于各项取绝对值后得到的级数发散，故原级数发散

D. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1}=0$，可知原级数收敛

(6)$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=$(　　).

A. $\frac{1}{2}(\sin 1+\cos 1)$　　B. $2\sin 1+\cos 1$

C. $\sin 1+2\cos 1$　　D. $\sin 1+\cos 1$

(7)设级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ 与 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(p^2-4)x}\mathrm{d}x$ 都收敛，则(　　).

A. $1<p<2$　　B. $0<p<2$　　C. $-2<p<2$　　D. $1\leqslant p<2$

二、填空题

(1)设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，则 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x+1)^{n+1}$ 的收敛区间为________.

(2) 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R=1$,则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$的收敛域为________.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}=$________.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)(a>1)=$________.

(5) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=5$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=$________.

(6) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n>0)$发散,$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)=$________.

三、解答题

(1) 已知函数$y=y(x)$满足方程$y'=x+y$,且$y(0)=1$,讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$的敛散性.

(2) 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n[3^n+(-2)^n]}$的收敛区间,并讨论在端点处的敛散性.

(3) (Ⅰ) 设$k>0$,$x>0$,证明不等式:$kx<(1+k^2x^2)\arctan kx$;

(Ⅱ) 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\arctan kn}{n}(k>0)$是绝对收敛,还是条件收敛.

(4) 设数列$\{a_n\}$满足$a_n=a_0+nd$,$n=1,2,\cdots$,其中$a_0\neq0$,$d\neq0$为常数.

(Ⅰ) 求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域;

(Ⅱ) 求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$.

(5) 设$\frac{1}{1-x-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 证明:

(Ⅰ) $a_0=1$,$a_1=1$,$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n=0,1,2,\cdots)$;

(Ⅱ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$收敛,并求其和.

(6) 设$f(x)$在$[a,b]$上可导,且满足$a\leqslant f(x)\leqslant b$,$|f'(x)|\leqslant k<1$,$u_0\in[a,b]$,$u_n=f(u_{n-1})(u=1,2,\cdots)$,证明:

(Ⅰ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$绝对收敛;

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$存在.

(7) 讨论$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$的敛散性,若收敛,判断是绝对收敛还是条件收敛.

(8) 设$a_n=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n}e^{-nx^2}dx(n=1,2,\cdots)$,证明:级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_n$收敛.

(9) 设$a_0=0$,$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}(n=0,1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在,并求其值;

(Ⅱ) 判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{2-a_n}$是绝对收敛,还是条件收敛.

(10) 将 $f(x)=xe^x$ 在 $x=2$ 处展开为幂级数，并求 $f^{(n)}(2)$.

(11) 将 $f(x)=\dfrac{x-1}{3-x}$ 在 $x=1$ 处展开为幂级数，并求 $f^{(n)}(1)$.

(12) 将 $f(x)=\sin x+x\cos x$ 展开为 x 的幂级数，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(2n+1)!}$ 的和.

(13) 将 $f(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$ 展开为 x 的幂级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$ 的和.

(14) 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}xe^{-nx}$ 的收敛域及和函数.

(15) 设 $a_0=3,a_1=5$，且 $na_n=\dfrac{2}{3}a_{n-1}-(n-1)a_{n-1}(n>1)$，证明：当 $|x|<1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，并求其和函数.

(16) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$，证明：$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

(17) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ 满足 $\begin{cases}f''(x)-f'(x)-2f(x)=0,\\ f(0)=0,f'(0)=1,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 及 a_n.

(18) 求形如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 的级数，使其在 $(0,\pi)$ 内的和函数为 $\dfrac{1}{2}(\pi-x)$，当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，求此级数的和.

拓 展 题

解答题

(1) 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx,b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt(n=1,2,\cdots)$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{a_n}{b_n}$ 的和.

(2) 设 $a_0=1,a_1=0,(n+1)a_{n+1}=na_n+a_{n-1}(n=1,2,\cdots),S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

(Ⅰ) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，并计算级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径；

(Ⅱ) 求 $S(x)$ 满足的一阶微分方程，并求和函数 $S(x)$.

(3) 设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+2f'(x)+f(x)=0$，且

$$f(0)=1,f'(0)=0,a_n=\int_n^{+\infty}f(x)dx.$$

(Ⅰ) 求 $f(x)$ 及 a_n；

(Ⅱ) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和.

第九章　曲线积分与曲面积分

基 础 题

一、选择题

(1) 设 L 为圆周 $x^2+y^2=2x$，则 $I=\int_L x\,\mathrm{d}s=(\quad)$.

A. 2π　　B. π　　C. 1　　D. 0

(2) 设 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$($a,b,c$ 均大于零)，则 $I=\iint\limits_S(x+y+z)\mathrm{d}S=(\quad)$.

A. 4π　　B. $4\pi(a+b+c)$

C. 0　　D. $\frac{4}{3}\pi(a+b+c)$

(3) 设 $S:x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限的部分，则(　　).

A. $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}x\,\mathrm{d}S$　　B. $\iint\limits_S y\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}y\,\mathrm{d}S$

C. $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}z\,\mathrm{d}S$　　D. $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}xyz\,\mathrm{d}S$

二、填空题

(1) 设 S 为平面 $x+y+z=4$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 截出的有限部分，则 $I=\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S=$ ________.

(2) 设 L 为 $x^2+y^2=R^2(y\geqslant 0)$ 上由点 $A\left(-\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ 到点 $B(R,0)$ 的一段弧，则 $\int_L y\,\mathrm{d}s=$ ________，$\int_L y\,\mathrm{d}x=$ ________.

(3) 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $I=\oint_L(z+x^2)\mathrm{d}s=$ ________.

(4) 设曲线 L 为 $x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 与 $x+z=1$ 的交线，则 $I=\oint_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=$ ________.

(5) 设曲面 $S:|x|+|y|+|z|=1$，则 $I=\oiint\limits_S(x+y+|z|)\mathrm{d}S=$ ________.

(6) 设 L 为点 $(1,-1,2)$ 到点 $(2,1,3)$ 的直线段，则 $I=\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=$ ________.

三、解答题

(1) 设 L 为由 $r=a(a>0)$，$\theta=0$ 和 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 所围凸平面区域的边界，(r,θ) 为极坐标，

计算 $I=\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$.

(2) 设 L 为曲线 $y=1-|1-x|$ 从对应于 $x=0$ 的点到 $x=2$ 的点，计算

$$I=\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy.$$

(3) 设 L 为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}(y\geqslant 0)$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,0)$ 的一段弧，计算

$$I=\int_L [3+(2-\sqrt{2})y+e^x\sin y]dx+(\sqrt{2}x+e^x\cos y)dy.$$

(4) 计算积分 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中

(Ⅰ) L 为 $(x+2)^2+(y-2)^2=1$，取逆时针方向；

(Ⅱ) L 为 $x^2+y^2=1$，取逆时针方向；

(Ⅲ) L 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，取逆时针方向.

(5) 设 $L:x^2+y^2=R^2(R>1)$，取逆时针方向，计算 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+9y^2}$.

(6) 设曲线 $L:x^2+y^2=R^2(R>0)$，取逆时针方向，问 R 为何值时，积分 $I(R)=\oint_L y^3dx+(3x-x^3)dy$ 取得最大值，并求最大值.

(7) 设 $f(x)$ 有一阶连续导数，曲线积分 $\int_L [f(x)-e^x]\sin y dx-f(x)\cos y dy$ 与路径无关，且 $f(0)=0$，求 $f(x)$.

(8) 设平面力场为 $\boldsymbol{F}=(2xy^3-y^2\cos x)\boldsymbol{i}+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\boldsymbol{j}$，求质心在 $\boldsymbol{F}$ 作用下，沿 $L:2x=\pi y^2$ 从点 $O(0,0)$ 到点 $A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 所做的功 W.

(9) 计算 $I=\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是从点 $A(1,1)$ 沿直线到点 $B(-1,0)$，再沿曲线 $y=x^2-1$ 到点 $C(1,0)$.

(10) 设 $P(x,y)=\frac{x(\sqrt{x^2+y^2})^k}{y}$，$Q(x,y)=-\frac{x^2(\sqrt{x^2+y^2})^k}{y^2}$，$D=\{(x,y)\mid y>0\}$.

(Ⅰ) 若积分 $I=\int_L Pdx+Qdy$ 在 D 内与路径无关，求 k 的值；

(Ⅱ) 在 D 内求函数 $u(x,y)$，使得 $du=Pdx+Qdy$，并计算 $I=\int_{(1,1)}^{(2,2)} Pdx+Qdy$.

(11) 设曲线 L 为 $z=4-x^2-y^2$ 与 $z=3$ 的交线，从 z 轴正向看是逆时针方向，计算

$$I=\oint_L x^2y^3dx+zdy+ydz.$$

(12) 计算 $I=\iint_S f(x,y,z)dS$，其中 $S:x^2+y^2+z^2=1$，

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

(13) 设曲面 S 为上半圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所截出的有限部分，计算 $I=\iint_S (x^2y+yz^2+z^2x)dS$.

(14) 设 S 为 $z=x^2+y^2$ 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分的下侧，计算

$$I=\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(15) 设曲面 $S:z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$,取上侧,计算 $I=\iint_S(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(16) 设 S 为曲面 $4-y=x^2+z^2$ 上 $y\geqslant 0$ 的部分,取外侧,计算

$$I=\iint_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(17) 设曲面为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的部分,取上侧,计算

$$I=\iint_S xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(18) 设 S 是 $x^2+y^2=1,z=-1,z=1$ 所围成的圆柱体的全表面,计算

$$I=\oiint_{S_{外}}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}(S_{外}\text{ 表示外侧}).$$

(19) 一个体积为 V,表面积为 S(不含底面)的雪堆,融化速度为 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-aS$,其中 $a>0$ 为常数,设在融化期间雪堆的形状保持为 $z=h-\frac{x^2+y^2}{h}(z>0)$,其中 $h=h(t)$,问一个高度为 $h_0(h_0>0)$ 的雪堆全部融化需要多长时间?

综 合 题

一、选择题

(1) 设曲线 L 为 $x^2+y^2=1$,取逆时针方向,$f(x,y)>0$,$f(x,-y)=f(x,y)$. L_1,L_2,L_3 如图 9-1 所示,记 $I_1=\int_{L_1}f(x,y)\mathrm{d}x$,$I_2=\int_{L_2}f(x,y)\mathrm{d}s$,$I_3=\int_{L_3}f(x,y)\mathrm{d}x$,则(　　).

A. $I_1>I_2>I_3$　　B. $I_2>I_3>I_1$

C. $I_3>I_2>I_1$　　D. $I_2>I_1>I_3$

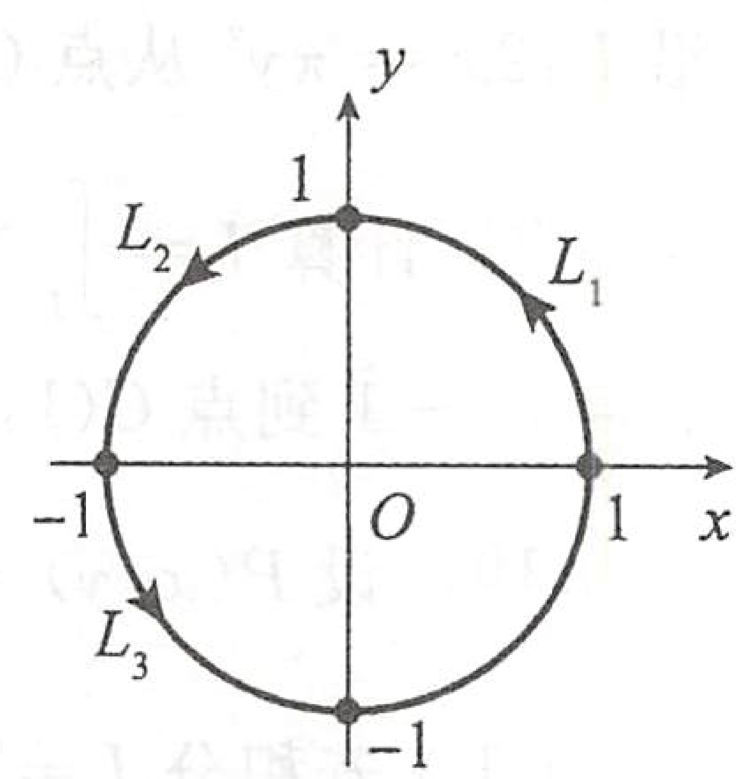


图 9-1

(2) 设 L 为闭曲线 $|x|+|y|=1$,取逆时针方向,则 $I=\oint_L\frac{ax\mathrm{d}y-by\mathrm{d}x}{|x|+|y|}=$(　　).

A. $8(a+b)$　　B. $2(a+b)$　　C. $8(a-b)$　　D. $2(a-b)$

(3) 设 L 为平面光滑简单闭曲线,取逆时针方向,L 所围区域的面积为 S,则(　　).

A. $S=\oint_L y\mathrm{d}y-x\mathrm{d}x$　　B. $S=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

C. $S=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$　　D. $S=\frac{1}{2}\oint_L y\mathrm{d}y-x\mathrm{d}x$

二、填空题

(1) 设 $L:x^2+y^2=R^2$,取顺时针方向,则 $I=\oint_L\frac{\mathrm{e}^{x^2}-x^2y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{xy^2-\mathrm{e}^{y^2}}{x^2+y^2}\mathrm{d}y=$ ________.

(2) 设积分 $I=\int_L F(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$ 与路径无关,且 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数的图形过点(1,2)且与坐标轴无交点,其中 $F(x,y)$ 可微,则 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数

为________.

(3) 设曲面 $S: x^2+y^2+z^2=2x$，其密度为 $\rho=x^2+y^2+z^2$，则曲面 S 的质量 $m=$ ________.

(4) 设光滑有向曲面 S 的边界曲线为光滑有向闭曲线 L，方向符合右手法则，则 $I=\oint_L \mathbf{grad}\,\sin(x+y+z)\mathrm{d}s=$ ________.

(5) 向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x+y+z)\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的旋度 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=$ ________，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=$ ________.

(6) 设 $\boldsymbol{\gamma}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}$ 为球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 的外单位法向量，则 $\iint\limits_S \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=$ ________.

三、解答题

(1) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，曲线积分

$$I=\int_L[xe^{2x}-6f(x)]\sin y\mathrm{d}x-[5f(x)-f'(x)]\cos y\mathrm{d}y$$

与路径无关，求 $f(x)$ 表达式.

(2) 设 $D: x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$，$L$ 为 D 的正向边界，证明：$\oint_L xe^{y^2}\mathrm{d}y-ye^{-x^2}\mathrm{d}x\geqslant\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 设 $f(x,y)$ 在 $\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1$ 上有二阶偏导数，L 为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，取顺时针方向，计算

$$I=\oint_L[-3y+f_x'(x,y)]\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y.$$

(4) 设 L 为 $y=\pi\cos x$ 从 $A(\pi,-\pi)$ 到 $B(-\pi,-\pi)$ 的曲线，计算

$$I=\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

(5) 设 $f(x)$ 有连续导数，L 为从点 $A(2,2\pi)$ 沿 $(x-1)^2+(y-\pi)^2=1+\pi^2$ 的上半圆周到点 $O(0,0)$ 的一段弧，计算 $I=\int_L f'(x)\sin y\mathrm{d}x+[f(x)\cos y-\pi x]\mathrm{d}y$.

(6) 设 $f(y)$ 有连续导数，$f(0)=0$，曲线 $\overset{\frown}{OA}$ 的极坐标方程为 $r=a(1-\cos\theta)$，$a>0$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$O(0,0)$ 与 A 分别对应于 $\theta=0$ 与 $\theta=\pi$，计算

$$I=\int_{\overset{\frown}{OA}}[f(y)e^x-\pi y]\mathrm{d}x+[f'(y)e^x-\pi]\mathrm{d}y.$$

(7) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续导数，L 为从点 $A\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段，计算 $I=\int_L\dfrac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$.

(8) 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有连续导数，且 $V(x,y)=yf(xy)\mathrm{d}x+xg(xy)\mathrm{d}y$.

(Ⅰ) 若存在函数 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u=V$，求 $f(xy)-g(xy)$；

(Ⅱ) 若 $f(x)=\varphi'(x)$，求函数 $u(x,y)$，使 $\mathrm{d}u=V$.

(9) 设曲线 L 为微分方程 $y'=f(x,y)\,(f(x,y)\neq 0)$ 确定的一条简单闭曲线，且 L 所围平面区域 D 的面积为 A，计算 $I=\oint_L xf(x,y)\mathrm{d}x-\dfrac{y}{f(x,y)}\mathrm{d}y$.（$L$ 为 D 的正向边界）

(10) 设在 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，$f(x,y)$ 有一阶连续偏导数，$f(x,y)\neq 0$，且对任意 $t>0$，有 $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$，证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$\oint_L \frac{y}{f(x,y)}\mathrm{d}x - \frac{x}{f(x,y)}\mathrm{d}y = 0.$

(11) 设曲面 S 为由圆柱面 $x^2+y^2=R^2$、平面 $z=0$ 和 $z-x=R(R>0)$ 所围立体的表面,计算 $I=\oiint\limits_S z\mathrm{d}S.$

(12) 设球面为 $x^2+y^2+z^2=R^2$,柱面为 $x^2+y^2=Rx(R>0)$,球面在柱体内的面积为 S_1,柱面在球体内的面积为 S_2,求 $\frac{S_1}{S_2}$.

(13) 设薄片型物体 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分,其上任一点的密度为 $\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,记圆锥面与柱面的交线为 C.

(Ⅰ)求 C 在 xOy 面上的投影曲线方程;

(Ⅱ)求 S 的质量.

(14) 在半径为 a 的球表面上取一点,以该点为球心作半径为 R 的球,问 R 为何值时,该球位于定球内的表面积最大?

(15) 设 $f(u)$ 有连续导数,S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与两个半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$,$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 所围立体的全表面的外侧,计算

$$I=\oiint\limits_S\left[\frac{1}{y+3}f\left(\frac{x+4}{y+3}\right)+3xy^2\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[\frac{1}{x+4}f\left(\frac{x+4}{y+3}\right)+3x^2y\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(16) 设曲面 $S:x^2+y^2+z^2=R^2,z\geqslant 0$,$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 S 向外的单位法向量,计算 $I=\iint\limits_S[(z^n-y^n)\cos\alpha+(x^n-z^n)\cos\beta+(y^n-x^n)\cos\gamma]\mathrm{d}S(n\geqslant 1).$

(17) 设曲面 $S:z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}(R>0)$,取下侧,计算

$$I=\iint\limits_S\frac{Rx\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(R+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

(18) 设 S 为椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=1$ 外侧,计算 $I=\oiint\limits_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(19) 设曲面 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=4z$ 与锥面 $z=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}$ 所围,且位于锥面上方部分的立体表面,流速场为 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}x^3+x^2y+x^2z,\ \frac{1}{3}y^3+y^2z,\ \frac{1}{3}z^3\right)$,求 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 从曲面 S 内部流向外部的流量 Φ.

(20) 设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上有二阶连续偏导数,且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$,计算 $I=\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(21) 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有一阶连续偏导数,且在边界上取值为零,证明:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_D\frac{xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(0,0),$$

其中 $D:t^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1,t>0.$

(22) 设 $f(r)(r>0)$ 有二阶连续导数,$u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 满足 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\ u)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,求函数 u 的表达式.

线性代数

第十章 行列式

基 础 题

一、选择题

(1) 设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，则 D 的第 4 行各元素的余子式之和 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=$（　　）.

A. -28　　B. 28　　C. 14　　D. -14

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均是 4 维列向量，且 4 阶行列式 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)|=a$，$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=b$，则行列式 $|(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)|=$（　　）.

A. $a+b$　　B. $a-b$　　C. $b-a$　　D. $-(a+b)$

(3) 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均是 4 维列向量，且 $|\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=1$，$|\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=3$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$（　　）.

A. 15　　B. 16　　C. 31　　D. 32

(4) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^*(k>0)$，若 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=c>0$，则 $c=$（　　）.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3k}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}k^2}{3}$　　C. $\sqrt{3}k^2$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{k^2}$

二、填空题

(1) $\begin{vmatrix}k&0&-1&1\\0&k&1&-1\\-1&1&k&0\\1&-1&0&k\end{vmatrix}=$________.

(2) 若 $\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\-1&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a\end{vmatrix}=0$，则 $\lambda=$________.

(3) $D_4=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&1\\0&0&3&1\\1&1&1&4\end{vmatrix}=$________.

(4) 行列式 $D_4=\begin{vmatrix}0&1&2&0\\1&0&0&2\\0&3&4&0\\3&0&0&4\end{vmatrix}=$________.

(5) 行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 \\ 4 & 3 & 2 & a+1 \end{vmatrix} =$ ________.

(6) 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x & -2x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，则 x^3 的系数为________.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}| < 0$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| =$ ________.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{A}| =$ ________.

(9) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}| = 2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}| =$ ________.

(10) 设 $|\boldsymbol{A}| = 2$，$|\boldsymbol{B}| = -2$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^* - \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}| =$ ________.

(11) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B} = (3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_1, 2\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2)$，且 $|\boldsymbol{B}| = 14$，则 $|\boldsymbol{A}| =$ ________.

(12) 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}| = 1$，且 $\boldsymbol{A}$ 的每列元素之和均为 $k(k \neq 0)$，则 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式之和 $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n} =$ ________.

三、解答题

(1) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$.

(2) 证明：$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}$.

(3) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

(4) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \\ b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{vmatrix},$$

其中 a_i,b_i 均不为 0.

综 合 题

一、选择题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 3,2,1，则 $|\boldsymbol{A}|$ 的代数余子式之和 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$（ ）.

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

(2) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{vmatrix}$ 的所有代数余子式 A_{ij} 之和 $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4}A_{ij}=$（ ）.

A. 4　　B. -4　　C. 1　　D. -1

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，则 $|(2\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|=$（ ）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

二、填空题

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=6$，$|\boldsymbol{B}|=1$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&3\boldsymbol{A}^*\\\left(\frac{\boldsymbol{B}}{2}\right)^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}|=$ ________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，当 $m>n$ 时，$|\boldsymbol{AB}|=$ ________.

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，且满足 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=|2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0$，则 $|2\boldsymbol{A}^*-3\boldsymbol{E}|=$ ________.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ ________.

三、解答题

(1) 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}b-a_1^2&-a_1a_2&\cdots&-a_1a_n\\-a_2a_1&b-a_2^2&\cdots&-a_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_na_1&-a_na_2&\cdots&b-a_n^2\end{vmatrix}$.

(2) 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a+b_1&a&\cdots&a\\a&a+b_2&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&a+b_n\end{vmatrix}(b_i\neq 0)$.

(3)计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

(4)计算 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix}(a^2-4bc\geqslant 0)$.

拓展题

解答题

(1)设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为3阶非零实矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$,且 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,计算行列式 $|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$.

(2)设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶非零实矩阵,且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^*$($k$ 为非零常数).

(Ⅰ)证明:$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵;

(Ⅱ)求行列式 $|\boldsymbol{A}^{-1}|+|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}|$.

李林考研数学系列

第十一章 矩 阵

基础题

一、选择题

(1)设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$，$B=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}+a_{23}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}+a_{33}&a_{33}\\a_{11}&a_{12}+a_{13}&a_{13}\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，则 $B=$ (　　).

A. AQP　　B. PAQ　　C. QAP　　D. APQ

(2)设 A 是 $n(n\geqslant3)$ 阶可逆方阵，下列结论正确的是(　　).

①$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$　　②$(kA)^*=k^{n-1}A^*(k\neq0)$

③$(A^*)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^*$　　④$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①②③④

(3)设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{bmatrix}$，则行列式 $|[(E-A)^*]^{-1}|=$ (　　).

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $-\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{16}$　　D. $-\dfrac{1}{16}$

(4)设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\2&k&3\\k-1&5&1\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&k\\3&5&1\end{bmatrix}$ 等价，则(　　).

A. $k=1$　　B. $k\neq1$　　C. $k=-1$　　D. $k\neq-1$

二、填空题

(1)设 $\alpha=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\beta=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$，$A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，则 $A^n=$ ________.

(2)设 $\alpha=(2,-1,3)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，$E$ 是 3 阶单位矩阵，则 $(A+E)^n=$ ________.

(3)设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，则 $A^n=$ ________.

(4)设 $B=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$A=P^{-1}BP$，则 $A^4-2B^2=$ ________.

(5)设 A 是 n 阶方阵，且 $|A|=2$，将 A 的第 i 行与第 j 行互换得到 B，则行列式 $|B^{-1}B^*B^{\mathrm{T}}|=$ ________.

(6) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}$,则 $r(A)=$ ______.

(7) 若 $A^n=O$,n 为正整数,则 $(E-A)^{-1}=$ ______.

(8) 若 $A^n=E$,n 为正整数,则 $(A^*)^n=$ ______.

(9) 设方阵 A 满足 $A^2-3A-2E=O$,则 $A^{-1}=$ ______.

(10) 设方阵 A 满足 $A^2=A$,则 $(A+E)^{-1}=$ ______.

(11) 设 A 是 n 阶可逆矩阵,将 A 的第 i 行和第 j 行交换得 B,则行列式 $|AB^{-1}|=$ ______.

(12) 设存在 3 阶矩阵 A,对任意的 x,y,z 有 $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}$,则 $A=$ ______.

(13) 设 $\alpha=(k,0,\cdots,0,k)^T(k\neq 0)$,且 $A=E-\alpha\alpha^T$,$A^{-1}=E+\frac{1}{k}\alpha\alpha^T$,则 $k=$ ______.

三、解答题

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\a&1&b\\4&c&6\end{pmatrix}$,且 $BA=O$,B 是 3 阶方阵,$r(B)>1$,求 A^n.

(2) 设 α,β 是 n 维列向量,且 $\alpha^T\beta=2$,证明:$A=E+\alpha\beta^T$ 可逆,并求 A^{-1}.

(3) 设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$,求 $(A^*)^{-1}$.

(4) 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$,证明:$A^2=5A-4E$,并求 A^{-1}.

(5) 设方阵 A,B 满足 $|B|\neq 0$,$(A-E)^{-1}=(B-E)^T$,求 A^{-1}(用 B 表示).

(6) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\0&4&5\end{pmatrix}$,$B=(E+A)^{-1}(E-A)$,求 $[(E+B)^2]^{-1}$.

(7) 已知方阵 $A,B,(A+B)$ 均可逆,求 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$.

(8) 设 $AB=BA$,A 可逆,证明:$A^{-1}B=BA^{-1}$.

(9) 设 A,B 都是 n 阶方阵,且 $A^2=A$,$B^2=B$,$(A+B)^2=A+B$,证明:$AB=BA$.

(10) 设 A 为 $2n+1$ 阶正交矩阵,且 $|A|=1$,证明:$A-E$ 不可逆.

(11) 设 n 阶方阵 A,B,满足 $A^2=E$,$B^2=E$,且 $|A|+|B|=0$,证明:$A+B$ 不可逆.

(12) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$,$AB+E=A^2+B$,求 B.

(13) 设 $A=\begin{pmatrix}0&2\\1&2\end{pmatrix}$,且 $(A^TB^{-1})^T-A(B^TA)^{-1}=(E-B^{-1})^T$,求 B.

(14) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{B}$.

(15) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

(16) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\boldsymbol{A}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

综合题

一、选择题

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&k\\1&k+1&1\\k&2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则(　　).

A. 当 $k=1$ 时，$r(\boldsymbol{B})=1$　　B. 当 $k=-3$ 时，$r(\boldsymbol{B})=1$

C. 当 $k=1$ 时，$r(\boldsymbol{B})=2$　　D. 当 $k=-3$ 时，$r(\boldsymbol{B})=2$

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$($a,b$ 均不为 0)，且 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，则必有(　　).

A. $a=b$　　B. $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$

C. $a+2b=0$　　D. $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{P}^n\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^m=\boldsymbol{A}$，则正整数 n,m 可以为(　　).

A. $n=m=4$　　B. $n=5,m=4$　　C. $n=4,m=5$　　D. $n=m=5$

二、填空题

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}^*=$ ________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 k，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和均为________.

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n(n\geqslant 1)=$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=$ ________.

三、解答题

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&2\\0&0&0&3\\3&2&1&0\end{pmatrix}$，求 $A^n(n\geqslant 1)$.

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$，证明：$A^2+4A=O$，并求 $(E+A)^{-1}$.

(3) 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，证明：$A^n=A^{n-2}+A^2-E(n\geqslant 3)$，并计算 A^{100}.

(4) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-2&-4\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$，证明：$A$ 可逆，并将 A 表示为初等矩阵的乘积.

(5) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，且 $A^*BA=2BA-8E$，求 B.

(6) 设矩阵 X 满足 $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\\-2&1\end{pmatrix}$，求 X.

拓 展 题

解答题

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，若矩阵 X 满足 $AX+2B=BA+2X$，求 X^2.

(2) 设分块矩阵 $P=\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}$ 为正交矩阵，A，B 分别是 m 阶和 n 阶方阵，证明：A 与 B 是正交矩阵.

第十二章 向 量

基础题

一、选择题

(1)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示　　B. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

C. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示　　D. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示

(2)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关等价于(　　).

A. 存在一组不全为 0 的数,使其线性组合不为 $\mathbf{0}$

B. 存在一个向量不能由其他向量线性表示

C. 任何一个向量均不能由其他向量线性表示

D. 其中任意两个向量线性无关

(3)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则下列向量组线性无关的是(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

(4)设向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$,(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,则下列命题

① 若向量组(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示,且 $s<t$,则必有(Ⅰ)线性相关,

② 若向量组(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示,且 $s<t$,则必有(Ⅰ)线性相关,

③ 若向量组(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示,且(Ⅰ)线性无关,则必有 $s\geqslant t$,

④ 若向量组(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示,且(Ⅰ)线性无关,则必有 $s\geqslant t$,

正确的是(　　).

A. ①④　　B. ①③　　C. ②③　　D. ②④

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}}$,其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0(i=1,2,3)$,则三条直线 $a_ix+b_iy+c_i=0(i=1,2,3)$ 恰好仅交于一点的充要条件是(　　).

A. $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$　　B. $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=1$

C. $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$　　D. $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=2$

(6)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k 和 μ,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\mu\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的(　　).

A. 充分必要条件　　B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 既非充分又非必要条件

二、填空题

(1)已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,k,4)^{\mathrm{T}}$ 线性相关,则 $k=$________.

(2)已知 3 维线性空间的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$,则向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,0,0)$ 在上述基下的坐标为________.

(3)设 3 维向量空间的两组基分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,-1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$,则从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为________.

三、解答题

(1) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,a+4,2a+5,a+7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(4,6,8,10)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(2,3,2a+3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}=(0,1,3,b)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅰ)求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩及其一个极大线性无关组;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示,求 a,b 的取值.

(2) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,4,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,4,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组,并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,b,4,7)^{\mathrm{T}}$,$a,b$ 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;a,b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,并写出表达式.

(4) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}}$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(k,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(\mu,1,0)^{\mathrm{T}}$ 有相同的秩,且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,求 k,μ 的值.

(5) 设有向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$,(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_4=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$,证明:向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

(6) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关,且可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性表示,证明:这两个向量组等价.

(7) 设向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$,$r$(Ⅰ)$=r$(Ⅱ),且向量组(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示.证明:向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

(8) 设向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$,(Ⅲ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$,且 r(Ⅰ)$=r$(Ⅱ)$=3$,r(Ⅲ)$=4$,证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为4.

(9) 设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶方阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-2,1$ 的特征向量,且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(10) 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{5\times4}$ 的秩为2,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,-1,-8,9)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量,求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一组标准正交基.

综合题

一、选择题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是 n 维列向量,向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$,(Ⅱ)$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_t$,则正确的是(　　).

A. 若(Ⅰ)线性无关,则(Ⅱ)线性无关

B. 若(Ⅱ)线性相关,则(Ⅰ)线性相关

C. 若(Ⅱ)线性无关,则(Ⅰ)线性无关

D.(Ⅰ)与(Ⅱ)具有相同的线性相关性

(2) 设三维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,记 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}_{3\times3}$,$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{B}_{3\times3}$,则(　　).

A. 存在矩阵 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$,使得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关

B. 不存在矩阵 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$,使得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关

C. 存在矩阵 $\boldsymbol{B}_{3\times3}$,使得 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 线性无关

D. 不存在矩阵 $\boldsymbol{B}_{3\times3}$,使得 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 线性相关

(3) 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,$k_1,k_2,k_3$ 为常数,且 $k_1k_3\neq0$,则(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价　　　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价　　　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价

(4) 设 n 维向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k(k<n)$ 线性无关，则 n 维向量组(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 也线性无关的充要条件是(　　).

A. $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性表示

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性表示

C. 向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)等价

D. 矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$与$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)$等价

(5) 设 4 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3,4)$ 为非零列向量，且 $\boldsymbol{\beta}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均正交，则 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=$(　　).

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解的充要条件是(　　).

A. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价　　　　B. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

C. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是等价矩阵　　　　D. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解

二、填空题

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,k+2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(k-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，但任意两个向量线性无关，则 $k=$ ________.

三、解答题

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&4&3&-3\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{bmatrix}$.

(Ⅰ) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组；

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{3\times3},\boldsymbol{Q}_{4\times4}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

(2) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示，求 a 的值，并将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$ 是 3 维非零列向量，且 $\boldsymbol{A\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明：$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(-1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,b)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅰ) 问 a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 不能同时由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

(Ⅱ) 问 a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 可同时由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，并求表达式？

(5) 设 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k(k<n)$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k$，$\lambda_i\neq0,i=1,2,\cdots,k$，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 中任何 k 个向量都线性无关.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 n 维列向量，$i=1,2,\cdots,m$，且 $m\leqslant n$，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|\neq0$.

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 3 维向量空间的两组基，若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在这两组基下的坐标分别为(x_1,x_2,x_3)与(y_1,y_2,y_3)，且 $x_1=y_1,x_2=-y_1+y_2,x_3=-y_2+y_3$.

(Ⅰ) 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵；

(Ⅱ) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$.

拓展题

一、选择题

设向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(d_1,d_2,d_3)^{\mathrm{T}}$,则三个平面$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$两两相交成三条平行直线的充分必要条件是(　　).

A. $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=1,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$

B. $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$

C. 在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$中任意两个向量均线性无关,且$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示

D. 在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$中任意两个向量均线性无关,且$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示

二、解答题

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为$n$维向量空间$\mathbf{R}^n$的一组基,且$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$.

(Ⅰ)证明:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$也是$\mathbf{R}^n$的一组基,并写出由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵$\boldsymbol{P}$;

(Ⅱ)设向量$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标为$(n,n-1,\cdots,2,1)^{\mathrm{T}}$,求$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标.

第十三章　线性方程组

基础题

一、选择题

(1) 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解，ξ_1,ξ_2 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为(　　).

A. $k_1\xi_1+k_2(\xi_1+\xi_2)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2}{2}$　　B. $k_1\xi_1+k_2(\xi_1-\xi_2)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$

C. $k_1\xi_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2}{2}$　　D. $k_1\xi_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，对方程组(Ⅰ)$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和(Ⅱ)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，必有(　　).

A.(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解

B.(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解

C.(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解，(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解

D.(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含解向量的个数 k 满足(　　).

A. $k=0$　　B. $k=1$　　C. $k>1$　　D. $k=n$

(4) 设方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，若存在 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则必有(　　).

A. $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$　　B. $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$

C. $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$　　D. $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$

(5) 设方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=b_1,\\ x_1-2x_2+x_3=b_2,\\ 2x_1+kx_2+3x_3=b_3\end{cases}$ 有解，则(　　).

A. 当 $k\neq-5$ 时，$(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$ 为任意非零列向量

B. 当 $k=-5$ 时，$(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$ 为任意列向量

C. 当 $k=-5$ 时，$b_1+b_3=4b_2$

D. 当 $k\neq-5$ 时，$b_1+b_3=4b_2$

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times m}$，则(　　).

A. 当 $m>n$ 时，$\boldsymbol{AB}$ 必可逆

B. 当 $m>n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$

C. 当 $n>m$ 时，必有 $r(\boldsymbol{AB})<m$

D. 当 $n>m$ 时，$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 必有唯一解

二、填空题

设方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+(k+4)x_2-5x_3=6, \\ -x_1-2x_2+kx_3=-3 \end{cases}$有无穷多解,则 $k=$ ________.

三、解答题

(1) 求方程组$\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4, \\ x_1+x_3-x_4=-3, \\ 3x_1+x_2+x_3=1, \\ 7x_1+7x_3-3x_4=3 \end{cases}$的通解.

(2) 设方程组$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1, \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1, \end{cases}$问 λ 为何值时,方程组无解、有唯一解、有无穷多解?当有无穷多解时,求其通解.

(3) 设有方程组 ①$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$与 ②$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$

(Ⅰ)求方程组 ① 与 ② 的基础解系;

(Ⅱ)求方程组 ① 与 ② 的非零公共解.

(4) 设有方程组(Ⅰ)$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_4=0, \end{cases}$(Ⅱ)$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,其中(Ⅱ)的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,-1,0)^{\mathrm{T}},$$

求方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的非零公共解.

(5) 设有方程组

①$\begin{cases} x_1-x_4=-2, \\ x_2-x_4=-4, \\ -4x_2-x_3+6x_4=21, \end{cases}$ ②$\begin{cases} x_1+ax_2-x_3-x_4=-5, \\ bx_2-x_3-2x_4=-11, \\ x_3-2x_4=-c+1. \end{cases}$

(Ⅰ)求方程组 ① 的通解;

(Ⅱ)当 a,b,c 为何值时,方程组 ① 与 ② 同解.

(6) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}|=0$,A_{ij} 为 $|\boldsymbol{A}|$ 的元素 a_{ij} 对应的代数余子式,且 $A_{11}\neq 0$,求方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系和通解.

(7) 已知 4×3 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $(1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$,$k$ 为任意常数,令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_3)$,求方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解.

综 合 题

一、选择题

(1) 设 $P_i(x_i,y_i)$,$i=1,2,3$ 为平面上三个不同的点,又 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$,则三点 P_1,P_2,P_3 在同一条直线上的充要条件是(　　).

A. $r(\boldsymbol{A})=1$　　B. $r(\boldsymbol{A})=2$　　C. $|\boldsymbol{A}|=0$　　D. $|\boldsymbol{A}|\neq 0$

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$m<n$，且 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 分别为 m 维、n 维非零列向量，则下列选项错误的是(   ).

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解　　B. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解

C. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 必有无穷多个解　　D. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ 必有唯一解

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件是(   ).

A. $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})<n$　　B. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

C. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同解　　D. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

(4) 设三个不同平面的方程为 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i(i=1,2,3)$ 相交于一条直线，三个平面方程组成方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\overline{\boldsymbol{A}}$，则(   ).

A. $r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$　　B. $r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$

C. $r(\boldsymbol{A})=1,r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$　　D. $r(\boldsymbol{A})=1,r(\overline{\boldsymbol{A}})=1$

(5) 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$ 是 $n\times(n-1)$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=n-1$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 都正交的两个不同的 n 维列向量，k 是任意常数，则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为(   ).

A. $k(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$　　B. $k(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$　　C. $k\boldsymbol{\beta}_1$　　D. $k\boldsymbol{\beta}_2$

二、填空题

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 均为三维列向量，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解为________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 为实矩阵，且 $A_{ij}=a_{ij}(i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，$a_{33}=1$，$|\boldsymbol{A}|=1$，则方程组 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 的解为________.

三、解答题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A})=n-2$，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,1,5,3)^{\mathrm{T}}$，$2\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1=(11,5,-6,7)^{\mathrm{T}}$，求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $(1,2,2,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,4,0)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数，记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)$.

(Ⅰ) 证明：$r(\boldsymbol{B})=2$；

(Ⅱ) 求方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×4 矩阵，$r(\boldsymbol{A})=1$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,a,-3,-5)^{\mathrm{T}}$ 与方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系等价，求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

(4) 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1:ax+2by+3c=0,$$
$$l_2:bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3:cx+2ay+3b=0,$$

证明：这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ 有特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=$

$(-1,3,2)^{T}$,且 $r(A)=1$,求方程组$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=-1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=3,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=2\end{cases}$的通解.

(6) 设 A 是3阶方阵,$A=(a_{ij})_{3\times3}$,且 $a_{ij}=A_{ij}$,$i,j=1,2,3$,其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,$a_{33}\neq0$,$b=(a_{13},a_{23},a_{33})^{T}$,求非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解.

(7) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,b 为 m 维列向量,证明:线性方程组 $A^{T}Ax=A^{T}b$ 必有解.

拓展题

解答题

(1) 设 A 是 5×4 矩阵,$r(A)=2$,已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量,且 $\alpha_1+\alpha_2=(4,6,-8,4)^{T}$,$\alpha_3=(1,2,-1,1)^{T}$,又$(0,1,-3,0)^{T}$是 $Ax=0$ 的解,求 $Ax=b$ 的通解.

(2) 设 A 是3阶矩阵,向量 $\beta=(3,3,3)^{T}$,非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 $k_1(1,2,-2)^{T}+k_2(2,1,2)^{T}+(1,1,1)^{T}$,$k_1,k_2$ 为任意常数.

(Ⅰ)证明:任意3维列向量 α 可由 A 的三个特征向量线性表示;

(Ⅱ)若 $\alpha=(1,2,-1)^{T}$,求 $A\alpha$.

李林考研数学系列

第十四章　相似矩阵

基础题

一、选择题

(1) 设 $\lambda=2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$ 有一个特征值为(　　).

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

(2) 设 4 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,1,2,3$，则 $r(\boldsymbol{A})=$(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(3) 设 $\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(1,2,2)$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则(　　).

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似　　B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

(4) 下列矩阵中，不能相似于对角矩阵的是(　　).

A. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&2&0\\3&0&6\end{pmatrix}$　　B. $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\5&0&3\end{pmatrix}$

C. $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&2&3\end{pmatrix}$　　D. $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则必有(　　).

A. 矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相等　　B. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 同时可逆或不可逆

C. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量　　D. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均与同一个对角矩阵相似

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $1,1,2$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别为对应的三个特征向量，则(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 必为 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征向量

B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ 必为 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征向量

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 必为 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征向量

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 必为 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不是 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征向量

二、填空题

(1) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&5&0\\0&0&a\end{pmatrix}$ 相似，则 $a=$________.

(2) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$，则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为________，特征向量为________.

(3) 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值________.

(4) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,1,2$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2$，则 $r(\boldsymbol{B})=$________.

三、解答题

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$;

(Ⅲ) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(2) 判别下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相似.若相似,求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(Ⅰ) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$;

(Ⅱ) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$.

(3) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 有特征向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅰ) 确定参数 a,b 及 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应的特征值 λ;

(Ⅱ) 问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角矩阵,说明理由.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,且 $\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,求 x,y 的值及可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量,且 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{A\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,并计算 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|$.

(6) 设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\a&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量.

(Ⅰ) 求 a 的值;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}$ 的二重特征值对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(8) 已知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&-1\\1&5&1\\4&12&6\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b&&\\&b&\\&&c\end{pmatrix}$,求 a,b,c 的值.

(9) 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$,$\lambda_3=-1$,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的特征向量.

（Ⅰ）求 A 的属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 A.

(10)（Ⅰ）设 A 是 n 阶实对称矩阵，且 $A^2=A$，$r(A)=r(r<n)$，计算 $|3E-A|$；

（Ⅱ）设 A 是 n 阶矩阵，且 $A^2=A$，$r(A)=r(r<n)$，计算 $|3E-A|$.

综合题

一、选择题

(1) 设 A,B 是 n 阶可逆矩阵，且 $A^{-1}\sim B^{-1}$，则下列结果

$$①AB\sim BA\quad ②A\sim B\quad ③A^2\sim B^2\quad ④A^{\mathrm{T}}\sim B^{\mathrm{T}}$$

中正确的个数为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(2) 设矩阵 B 相似于 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&2\\0&0&2&2\end{pmatrix}$，则 $r_1=r(B)$，$r_2=r(B-E)$，$r_3=r(B-2E)$ 满足（　　）.

A. $r_1<r_2<r_3$　　B. $r_2<r_3<r_1$　　C. $r_3<r_1<r_2$　　D. $r_1<r_3<r_2$

(3) 与 $A=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$ 既相似又合同的矩阵是（　　）.

A. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&2&-2\end{pmatrix}$　　B. $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}$

C. $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$　　D. $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$

(4) 下列矩阵中，与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的是（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(5) 设 $B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 不合同的矩阵的个数为（　　）.

A. 3 个　　B. 2 个　　C. 1 个　　D. 0 个

二、填空题

(1) 设 A 是3阶方阵，α 为3维列向量，$P=(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)$ 为可逆矩阵，$B=P^{-1}AP$，且 $A^3\alpha+2A^2\alpha=3A\alpha$，则 $|A+E|=$ ________.

(2) 设 $A_{3\times3}$ 是秩为1的实对称矩阵，$\lambda_1=2$ 是 A 的一个特征值，对应的特征向量为 $\alpha_1=(-1,1,1)^T$，则方程组 $Ax=0$ 的基础解系为________.

三、解答题

(1) 已知 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是3阶可逆矩阵，B 是3阶矩阵，且 $BA=(\alpha_1,-4\alpha_3,-\alpha_2)$.

(Ⅰ) 求 B 的全部特征值；

(Ⅱ) 求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}BP=\Lambda$.

(2) 设 A 是 $n(n\geqslant2)$ 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维列向量，且 $A\alpha_1=\alpha_2,A\alpha_2=\alpha_3,\cdots,A\alpha_{n-1}=\alpha_n,A\alpha_n=0,\alpha_n\neq0$.

(Ⅰ) 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关；

(Ⅱ) 求可逆矩阵 P 及三角矩阵 B，使得 $P^{-1}AP=B$.

(3) 设 $A_{3\times3}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，它们对应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

(Ⅰ) 证明：$\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关；

(Ⅱ) 若 $A^3\beta=A\beta$，求 $r(A-E)$.

(4) 设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&2\\0&1&2&0\\0&0&-1&b\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ 有四个线性无关的特征向量.

(Ⅰ) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$；

(Ⅱ) 求 $(2E-A^2)^{-1}$.

(5) 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 均为非零列向量，$A=\alpha\beta^T$.

(Ⅰ) 求 A 的全部特征值；

(Ⅱ) 问 $\alpha^T\beta$ 满足什么条件时，A 可以相似于对角矩阵 Λ，并求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

(6) 设 $n(n\geqslant2)$ 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&1&\cdots&1\\1&a&1&\cdots&1\\1&1&a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&a\end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$；

(Ⅱ) 求 $r(A^*)$.

(7) 设 A 是2阶矩阵，α 是非零向量，且 α 不是 A 的特征向量.

(Ⅰ) 证明：$\alpha,A\alpha$ 线性无关；

(Ⅱ) 记 $P=(\alpha,A\alpha)$，若 $A^2\alpha-2A\alpha=8\alpha$，证明：$A$ 相似于对角矩阵，并求 $P^{-1}AP$.

(8) 设 α,β 为3维单位列向量，且 $\alpha^T\beta=0$，记 $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$.

(Ⅰ) 证明：A 相似于对角矩阵；

(Ⅱ) 若存在3维列向量 $\gamma\neq0$，使得 $A\gamma=0$，记 $P=(\gamma,2(\alpha+\beta),\beta-\alpha)$，求 $P^{-1}AP$.

(9) 设 $A=\begin{pmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\1&a_{22}&a_{23}\\1&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ 可逆，B 是3阶实对称矩阵，且满足 $BA=\begin{pmatrix}1&2a_{12}&2a_{13}\\1&2a_{22}&2a_{23}\\1&2a_{32}&2a_{33}\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值和对应的特征向量；

（Ⅱ）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}$.

(10) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵.

（Ⅰ）证明：$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，且 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值，证明：$\boldsymbol{B}$ 相似于对角矩阵.

(11) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个单位正交特征向量，对应的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，证明：$\boldsymbol{A} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}$.

拓 展 题

解答题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \mathrm{diag}(1,2,-1)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, k+1, 2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (k-1,-k,1)^{\mathrm{T}}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1,\lambda_2 = 2$ 的特征向量，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 λ_0 对应的特征向量 $\boldsymbol{\beta} = (2,-5k,2k+1)^{\mathrm{T}}$.

（Ⅰ）求 λ_0 与 k 的值；

（Ⅱ）求矩阵 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

(2) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} k & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ -15 & 8 & -6 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，求 k 的值及可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$.

第十五章　二次型

基础题

一、选择题

(1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$ 的矩阵为(　　).

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&1\\1&\frac{1}{2}&1\\1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(2) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$ 的标准形为(　　).

A. $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　B. $f=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$

C. $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$　　D. $f=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2+y_3^2$

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&1\end{pmatrix}$ 合同,则合同变换矩阵 $\boldsymbol{P}=$(　　).

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列互换,再交换第 i 行与第 j 行得到 $\boldsymbol{B}$,则(　　).

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价、相似且合同　　B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似、合同但不等价

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似但不合同　　D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价但不相似

(5) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 的规范形为(　　).

A. $f=z_1^2$　　B. $f=z_1^2-z_2^2$

C. $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$　　D. $f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$,则 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面为(　　).

A. 椭球面　　B. 柱面　　C. 单叶双曲面　　D. 双叶双曲面

(7) 若二次曲面 $x^2+(k+2)y^2+kz^2+2xy=5$ 表示一个椭球面,则(　　).

A. $k>0$　　B. $k<0$　　C. $k>-1$　　D. $k<-1$

二、填空题

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定,则 a 的取值范围为________.

三、解答题

(1) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

（Ⅰ）求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将 f 化为标准形；

（Ⅱ）利用配方法，将 f 化为标准形.

(2) 已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$，经过正交变换化成标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换.

(3) 证明：n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

综合题

一、选择题

(1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3$ 的正、负惯性指数分别为（　　）.

A. $p=1,q=1$　　B. $p=1,q=2$　　C. $p=1,q=0$　　D. $p=0,q=2$

(2) $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 合同于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是（　　）.

①$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，　　②$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的正惯性指数相等，

③$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均正定矩阵，　　④$\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵.

A. ① 成立　　B. ④ 成立

C. ①②④ 均成立　　D. ③ 成立

(3) 方程 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=1$ 表示的曲面是（　　）.

A. 椭球面　　B. 单叶双曲面

C. 双叶双曲面　　D. 柱面

(4) 设 n 元二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_n+a_nx_1)^2,$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为实数，若二次型正定，则（　　）.

A. $1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$　　B. $1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n=0$

C. $1-(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$　　D. $1-(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n=0$

二、填空题

(1) 若 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&3\\0&3&0\end{pmatrix}$ 合同，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为________.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 后的标准形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$ 的规范形为________.

三、解答题

(1) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2ax_1x_3-2x_2x_3$ 的正负惯性指数都是 1.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.

(2) 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$，且 $\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=1$，$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=4\boldsymbol{\alpha}$ 的解向量.

（Ⅰ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$；

（Ⅱ）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形.

(3) 设方程组$\begin{cases}(k+3)x_1+x_2+2x_3=0,\\ 2kx_1+(k-1)x_2+x_3=0,\\ (k-3)x_1-3x_2+kx_3=0\end{cases}$有非零解，且$A=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&k&-2\\2&-2&9\end{pmatrix}$是正定矩阵.

(Ⅰ)求k的值；

(Ⅱ)设$x=(x_1,x_2,x_3)^T$，求$x^Tx=1$时，x^TAx的最大值.

(4) 设n阶实对称矩阵A只有两个不同的特征值$\lambda_1=1$和λ_2，且A属于$\lambda_1=1$的特征向量仅有$k(1,0,\cdots,0,1)^T(k\neq 0)$.

(Ⅰ)求矩阵A；

(Ⅱ)当λ_2满足什么条件时，A是正定矩阵.

(5) 设A是实对称矩阵，证明：A可逆的充要条件是存在方阵B，使得$AB+B^TA$为正定矩阵.

拓 展 题

解答题

(1) 设二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=nx_1^2+nx_2^2+\cdots+nx_n^2-(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$.

(Ⅰ)求二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$的秩；

(Ⅱ)求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$，并求二次型的正惯性指数.

(2) 设A为3阶实对称矩阵，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$在正交变换$x=Qy$下的标准形为$-y_1^2+2y_2^2+ay_3^2$，其中Q的第1列为$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$，且$|A|=-4$.

(Ⅰ)求a的值；

(Ⅱ)求正交矩阵Q.

(3) 设3阶实对称矩阵A满足$A^2=2A$，已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$经正交变换$x=Qy$化为$\lambda y_2^2+\lambda y_3^2(\lambda\neq 0)$，其中$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&a\\0&c&0\\b&0&1\end{pmatrix}(b>0,c>0)$.

(Ⅰ)求a,b,c的值；

(Ⅱ)求一个可逆线性变换$x=Pz$化f为规范形.

概率统计

第十六章　随机事件及其概率

基 础 题

一、选择题

(1) 设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则(　　).

A. $P(C)=P(AB)$　　B. $P(C)=P(A\cup B)$

C. $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　D. $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(2) 对任意两个事件 A 和 B，若 $P(AB)=0$，则(　　).

A. $P(A)P(B)=0$　　B. $P(A-B)=P(A)$

C. $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$　　D. $AB=\varnothing$

(3) 设 $P(A)>0,P(B)>0,P(A\mid B)=P(A)$，则下列选项不正确的是(　　).

A. A 与 B 互不相容　　B. A 与 B 相容

C. $P(B\mid A)=P(B)$　　D. $P(\overline{A}\mid\overline{B})=P(\overline{A})$

(4) 设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件，且 $0<P(C)<1$，则下列四对事件中不相互独立的是(　　).

A. $\overline{A\cup B}$ 与 C　　B. $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$　　C. $\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$　　D. $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$

(5) 设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$ 且 $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$，则(　　).

A. A 与 B 互不相容　　B. A 与 B 相互独立

C. A 与 B 对立　　D. A 与 B 不相互独立

(6) 设 A,B 为任意两个事件，且 $A\subset B,P(B)>0$，则下列选项正确的是(　　).

A. $P(A)<P(A\mid B)$　　B. $P(A)\leqslant P(A\mid B)$

C. $P(A)>P(A\mid B)$　　D. $P(A)\geqslant P(A\mid B)$

(7) 设 A,B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1,P(B)>0,P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$，则下列选项正确的是(　　).

A. $P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$　　B. $P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(AB)\neq P(A)P(B)$

二、填空题

(1) 设 $P(A\mid B)=P(B\mid A)=\frac{1}{2},P(A)=\frac{1}{3}$，则 $P(A\cup B)=$ ________.

(2) 已知事件 A,B 相互独立且互不相容，则 $\min\{P(A),P(B)\}=$ ________.

(3) 设事件 A,B,C 满足 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=P(BC)=0,P(AC)=\frac{1}{8}$，则 A,B,C 三个事件中至少出现一个的概率为________.

(4) 设 $P(A)=0.1,P(B\mid A)=0.9,P(B\mid\overline{A})=0.2$，则 $P(A\mid B)=$ ________.

(5) 设 A,B 为随机事件，且 $P(\overline{A})=0.3,P(B)=0.4,P(A-B)=0.5$，则

$P(B \mid A \cup \overline{B}) =$ ________.

(6) 设在三次独立重复试验中，事件 A 发生的概率相等，若已知 A 至少出现一次的概率为 $\frac{19}{27}$，则 A 在一次试验中发生的概率 $p =$ ________.

(7) 在区间 $(0,1)$ 内任取两个数 x, y，则 $xy \leqslant \frac{2}{9}$ 的概率为________.

(8) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$，则此人第 6 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为________.

三、解答题

(1) 设事件 A, B 相互独立，A, C 互不相容，且 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3, P(C) = 0.4$, $P(B \mid C) = 0.2$，求下列概率：

(Ⅰ) $P(A \cup B)$；(Ⅱ) $P(C \mid A \cup B)$；(Ⅲ) $P(AB \mid \overline{C})$.

(2) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个相互独立的事件，且 $P(A_k) = p_k (k = 1, 2, \cdots, n)$，求下列事件的概率：

(Ⅰ) $A = \{n$ 个事件全不发生$\}$；

(Ⅱ) $B = \{n$ 个事件不全发生$\}$；

(Ⅲ) $C = \{n$ 个事件中至少有一个发生$\}$.

(3) 对某一目标依次进行了三次独立的射击，设第一、第二、第三次射击命中的概率分别为 0.4，0.5 和 0.7，求：

(Ⅰ) 三次射击中恰好有一次命中的概率；

(Ⅱ) 三次射击中至少有一次命中的概率.

(4) 设 A, B 是两个随机事件，证明：

$$1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) \leqslant P(AB) \leqslant P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B).$$

综 合 题

一、选择题

(1) 设某人毫无准备地参加一项测验，其中有 5 道是非题，他随机地选择“是”或“非”，则该人至少答对 1 题的概率为(　　).

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{32}$　　C. $\frac{5}{32}$　　D. $\frac{31}{32}$

(2) 有一根长为 L 的木棒，将其任意折成三段，记事件 $A = \{$中间一段为三段中的最长者$\}$，则 $P(A) =$ (　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{2}{3}$

二、填空题

(1) 设甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.5 和 0.4，已知目标被命中，则它是乙射中的概率为________.

(2) 设 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.7$，则 $P(A \cup B)$ 的最大值与最小值分别是________.

(3) 设 A, B 是两个随机事件，$0 < P(B) < 1, AB = \overline{A}\,\overline{B}$，则 $P(\overline{A} \mid B) + P(A \mid \overline{B}) =$ ________.

(4) 设进行一系列独立试验，每次试验成功的概率均为 p，则在试验成功 2 次之前已经失败 3 次的概率为________.

(5) 已知10部手机中有7个合格品和3个次品，每次任取一个作测试，测试后不放回，直到将3个次品都找到为止，则需要测试7次的概率为________.

(6) 在 n 重伯努利试验中，事件 A 发生的概率为 p，则事件 A 发生奇数次的概率为________.

三、解答题

(1) 设甲盒中有4个红球和2个白球，乙盒中有2个红球和4个白球，掷一枚均匀的硬币，若正面出现，则从甲盒中任取一球，若反面出现，则从乙盒中任取一球，设每次取出的球观看颜色后放回原盒中.

(Ⅰ) 若前两次都取得红球，求第三次也取得红球的概率；

(Ⅱ) 若前两次都取得红球，求红球都来自甲盒的概率.

(2) 设一批产品中有15%的次品，进行独立重复抽样检验，若抽取20个样品，则抽出的20个样品中，可能性最大的次品数是多少?并求其概率.

拓 展 题

解答题

(1) 有三个盒子，第一个盒子中有3个黑球、1个白球，第二个盒子中有2个黑球、3个白球，第三个盒子中有3个黑球、2个白球.

(Ⅰ) 任取一个盒子，再从该盒子中取出一个球，求这个球是白球的概率；

(Ⅱ) 已知取出的是白球，求此球属于第三个盒子的概率.

(2) 从 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数中任意相继不放回地取出两个数，求取出的第二个数比第一个数大的概率.

第十七章 随机变量及其分布

基础题

一、选择题

(1) 设随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数分别为 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$，$F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，则(　　).

A. $a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$　　B. $a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$

C. $a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$　　D. $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

(2) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，且 $f(-x)=f(x)$，X 的分布函数为 $F(x)$，则对任意实数 k，有(　　).

A. $F(-k)=1-\int_0^k f(x)\mathrm{d}x$　　B. $F(-k)=\frac{1}{2}-\int_0^k f(x)\mathrm{d}x$

C. $F(-k)=2F(k)-1$　　D. $F(-k)=F(k)$

(3) 下列函数中，可作为某一随机变量的分布函数的是(　　).

A. $F(x)=\frac{1}{1+x^2}$　　B. $F(x)=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}$

C. $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-x}), & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$　　D. $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1$

(4) 设 X 是随机变量，对任意实数 x，$P\{X=x\}=0$ 的充分必要条件是(　　).

A. X 的概率密度 $f(x)$ 是连续函数　　B. X 的分布函数 $F(x)$ 是连续函数

C. X 为离散型随机变量　　D. X 是非离散型随机变量

(5) 设 $X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，记 $p_1=P\{X\leqslant\mu-4\}$，$p_2=P\{Y\geqslant\mu+5\}$，则(　　).

A. 对任意实数 μ，有 $p_1>p_2$　　B. 对任意实数 μ，$p_1<p_2$

C. 对任意实数 μ，有 $p_1=p_2$　　D. 只对 $\mu=0$，有 $p_1=p_2$

(6) 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ 的增大，$P\{|x-\mu|<\sigma\}$(　　).

A. 单调减少　　B. 单调增加

C. 保持不变　　D. 增减不确定

(7) 设 $f(x)$ 为随机变量 X 的概率密度，且 $f(1-x)=f(1+x)$，$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=0.4$，$X$ 的分布函数为 $F(x)$，则 $F(0)=$(　　).

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.4

二、填空题

(1) 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，则 $P\{X>16\mid X>8\}=$________.

(2) 设 $X\sim N(2,\sigma^2)$ 且 $P\{0<X<2\}=0.3$，则 $P\{X>0\}=$________.

(3) 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$f(x)$ 为 X 的概率密度，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$，则 $P\{X<3\}=$ ________（用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示）.

(4) 设自动机床在任何时长为 t 的时间间隔内发生故障的次数 X 服从参数为 λt 的泊松分布，Y 表示相继两次故障之间的时间间隔，则当 $t>0$ 时，$P\{Y>t\}=$ ________.

(5) 设 $X \sim N(0,1)$，则 $Y=|X|$ 的概率密度 $f_Y(y)=$ ________.

三、解答题

(1) 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-1	1	2
p	0.2	0.3	0.5

（Ⅰ）求 X 的分布函数；（Ⅱ）求 $P\{X>\frac{1}{2}\}$；（Ⅲ）$P\{-1\leqslant X\leqslant 2\}$.

(2) 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -a,\\ k_1+k_2\arcsin\frac{x}{a}, & -a<x\leqslant a,\\ 1, & x>a,\end{cases}$$

其中 $a>0$.

（Ⅰ）求常数 k_1,k_2 的值；

（Ⅱ）求 X 的概率密度；

（Ⅲ）求 $P\left\{|X|<\frac{a}{2}\right\}$.

(3) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，对 X 进行三次独立重复观察，至少有一次观测值大于 3 的概率为 $\frac{26}{27}$，求 λ 的值.

(4) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $Y=\frac{1}{X}$ 的分布函数和概率密度.

(5) 设随机变量 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，求 $Y=-2\ln X$ 的概率密度.

(6) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，$-\infty<x<+\infty$，求 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的分布函数和概率密度.

综 合 题

一、选择题

(1) 设 $f(x)$ 为随机变量 X 的概率密度，则下列选项可作为某一随机变量的概率密度的是（　　）.

A. $f(1-x)$　　B. $f\left(\frac{x}{2}\right)$　　C. $f(x^2)$　　D. $f^2(x)$

(2) 设 X_1,X_2,X_3 都服从正态分布，且 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，

$p_i = P\{-2 \leqslant X_i \leqslant 2\}(i=1,2,3)$,则(　　).

A. $p_3 > p_1 > p_2$　　B. $p_1 > p_3 > p_2$

C. $p_1 > p_2 > p_3$　　D. $p_2 > p_1 > p_3$

(3) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$,若当 $-\infty < x < +\infty$ 时,恒有 $0 \leqslant f(x) < 1$,则 X 可能服从(　　).

A. $N(1,\sigma^2)$　　B. $N(\mu,1)$　　C. $N(\mu,\sigma^2)$　　D. $N(0,\sigma^2)$

二、填空题

(1) 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,$\sigma > 0$,(x_0,y_0) 为其分布函数曲线 $y=F(x)$ 的拐点,则 $x_0 =$ ________,$y_0 =$ ________.

(2) 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,其中 $\sigma > 0$,$F(x)$ 为 X 的分布函数,则 $F(\mu - x\sigma) + F(\mu + x\sigma) =$ ________.

(3) 设随机变量 X 服从泊松分布,且 $P\{X=1\} = P\{X=2\}$,则 $P\{X>1\} =$ ________.

(4) 在伯努利试验中,设事件发生的概率 $p = \dfrac{3}{4}$,X 表示首次发生所需试验次数,n 为正整数,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\{X=2n\} =$ ________.

(5) 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\} = \dfrac{a}{k!}e^{-2}$,$k=0,1,2,\cdots$,则常数 $a =$ ________.

(6) 设 $X \sim N(0,\sigma^2)$,X 在区间 (a,b) 内取值的概率最大,其中 $a>0$,则 $\sigma^2 =$ ________.

(7) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布,k 为大于零的常数,则

$$P\{X \leqslant k+1 \mid X > k\} = \underline{\qquad\qquad}.$$

三、解答题

(1) 设随机变量 X 服从 $\lambda = 2$ 的指数分布,求 $Y = 1 - e^{-2X}$ 的分布函数和概率密度.

(2) 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$,求 $Y = \sin X$ 的分布函数和概率密度.

(3) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, & x \leqslant 0, \\ e^{-2x}, & x > 0, \end{cases}$ 求 $Y = X^2$ 的分布函数和概率密度(可用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示).

拓 展 题

解答题

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Y = X^2 + 1$ 的分布函数与概率密度.

第十八章　多维随机变量及其分布

基 础 题

一、选择题

(1) 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，则$P\{X>x_0,Y>y_0\}=(\quad)$.

A. $1+F(x_0,y_0)-F(x_0,+\infty)-F(+\infty,y_0)$

B. $F(x_0,y_0)-1+F(x_0,+\infty)+F(+\infty,y_0)$

C. $1-F(x_0,+\infty)-F(+\infty,y_0)$

D. $1-F(x_0,y_0)$

(2) 设两个相互独立的随机变量X与Y分别服从$N(0,1)$与$N(1,1)$，则$(\quad)$.

A. $P\{X+Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$　　B. $P\{X+Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$

C. $P\{X-Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$　　D. $P\{X-Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$

二、填空题

(1) 设二维随机变量(X,Y)的分布律为

Y \ X	0	1
0	$\frac{1}{4}$	a
1	b	$\frac{1}{4}$

且事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则$a=$________，$b=$________.

(2) 设X与Y相互独立且均服从参数为λ的指数分布，则$Z=\min\{X,Y\}$的分布函数$F_Z(z)=$________.

(3) 设随机变量X,Y均服从区间为$[0,4]$的均匀分布，$P\{\max\{X,Y\}\leqslant 3\}=\dfrac{9}{16}$，则$P\{\min\{X,Y\}>3\}=$________.

(4) 设随机变量X与Y相互独立，X服从参数为$\lambda=1$的指数分布，Y服从参数为0.6的$0-1$分布，则$P\{X+Y\geqslant 1.6\}=$________.

三、解答题

(1) 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	0	1
-1	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$

(Ⅰ) 求$2X+Y$，$\max\{X,Y\}$，$\min\{X,Y\}$的分布律；

(Ⅱ)求 $P\{\min\{X,Y\}\geqslant 0\}$;

(Ⅲ)问 X 与 Y 是否相互独立?说明理由.

(2) 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,-x<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$;

(Ⅱ)求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y),f_{Y|X}(y\mid x)$;

(Ⅲ)求 $P\left\{x>\frac{1}{2}\mid Y>0\right\}$.

(3) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k\mathrm{e}^{-(4x+3y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求常数 k 的值,并判别 X 与 Y 是否相互独立,说明理由;

(Ⅱ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(4) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda_1>0,\lambda_2>0$ 为常数,令 $Z=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ 0, & X>Y,\end{cases}$ 求 Z 的分布律和分布函数.

(5) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y<+\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 X 与 Y 的边缘概率密度,并判别 X 与 Y 是否相互独立;

(Ⅱ)求 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$;

(Ⅲ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且服从同一分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}, & x>2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布函数和概率密度.

(7) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,X 在区间 $(0,1)$ 内服从均匀分布,Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 (X,Y) 的联合概率密度;

(Ⅱ)设 X 和 Y 满足关于 k 的二次方程,$k^2+2Xk+Y=0$,求 k 有实根的概率.

(8) 设 X 与 Y 相互独立,X 服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布,Y 服从参数为 $\frac{1}{3}$ 的指数分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

(9) 设 (X,Y) 服从区域 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上的均匀分布,求 $Z=XY$ 的分布函数与概率密度.

(10) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X\sim N(0,\sigma^2)$,Y 服从 $[-a,a](a>0)$ 上的均匀分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度(可用 $\Phi(x)$ 表示).

(11) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从 $p=0.6$ 的 $0-1$ 分布，Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0,\end{cases}$$

记 $Z=X-Y$.

（Ⅰ）求 $P\{Z\leqslant -\frac{1}{2}\mid X=0\}$；

（Ⅱ）求 Z 的分布函数.

综合题

一、选择题

(1) 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，均服从 $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},k=1,2,\cdots,$ $0<p<1$，则 $P\{X=Y\}=($　　$)$.

A. $\dfrac{p}{1-p}$　　B. $\dfrac{1-p}{2-p}$　　C. $\dfrac{2p}{1-p}$　　D. $\dfrac{p}{2-p}$

(2) 设二维随机变量 (X_1,X_2) 的概率密度为 $f_1(x_1,x_2)$，$Y_1=2X_1,Y_2=3X_2$，则 (Y_1,Y_2) 的概率密度 $f_2(y_1,y_2)=($　　$)$.

A. $f_1(2y_1,3y_2)$　　B. $f_1\left(\frac{1}{2}y_1,\frac{1}{3}y_2\right)$

C. $\frac{1}{2}f_1(2y_1,3y_2)$　　D. $\frac{1}{6}f_1\left(\frac{1}{2}y_1,\frac{1}{3}y_2\right)$

(3) 设随机变量 X,Y 均服从 $N(0,1)$，且 X 与 Y 相互独立，则(　　).

A. $P\{X-Y\geqslant 0\}=\frac{1}{4}$　　B. $P\{X+Y\geqslant 0\}=\frac{1}{4}$

C. $P\{\min\{X,Y\}\geqslant 0\}=\frac{1}{4}$　　D. $P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=\frac{1}{4}$

二、填空题

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从二项分布 $B\left(4,\frac{1}{2}\right)$，$Y$ 服从 $\lambda=1$ 的泊松分布，则概率 $P\{1<\max\{X,Y\}\leqslant 3\}=$________.

三、解答题

(1) 在区间$[0,1]$上随机地掷两点，求这两点间距离的概率密度.

(2) 设二维随机变量 (X,Y) 在 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}0, & X\leqslant Y,\\ 1, & X>Y,\end{cases}$ $V=\begin{cases}0, & X\leqslant 2Y,\\ 1, & X>2Y,\end{cases}$ 求 (U,V) 的联合分布律，并判别 U 与 V 是否相互独立.

(3) 设随机变量 X 和 Y 都在$[a,b]$上服从均匀分布，且 X 与 Y 相互独立.

（Ⅰ）求 $Z_1=\max\{X,Y\}$ 和 $Z_2=\min\{X,Y\}$ 的概率密度；

（Ⅱ）求 (Z_1,Z_2) 的联合概率密度.

(4) 设二维随机变量 (X,Y) 服从 $D=\{(x,y)\mid y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上的均匀分布，令

$$U=\begin{cases}0, & X<0,\\ 1, & 0\leqslant X<Y,\\ 2, & Y\leqslant X,\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & X\geqslant \sqrt{3}Y,\\ 1, & X<\sqrt{3}Y.\end{cases}$$

（Ⅰ）求 (U,V) 的联合概率分布；

(Ⅱ)求 $P\{UV \neq 0\}$.

(5) 设(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+xy), & |x|<1,|y|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(Ⅰ)求 X 和 Y 的边缘概率密度,并判别 X 与 Y 是否相互独立;

(Ⅱ)记 $Z_1=X^2, Z_2=Y^2$,求 Z_1,Z_2 的分布函数及(Z_1,Z_2)的联合分布函数.

(6) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{k}{e^x+e^{-x}}$ $(-\infty<x<+\infty)$,对 X 作两次独立观察,其观测值分别记为 x_1,x_2,令 $Y_i=\begin{cases}1, & x_i\leqslant 1,\\ 0, & x_i>1\end{cases}$ $(i=1,2)$.

(Ⅰ)求 k 的值及 $P\{X_1<0,X_2<1\}$;

(Ⅱ)求(Y_1,Y_2)的概率分布.

拓展题

解答题

(1) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ Y 的分布函数为 $F_Y(y)$,令 $Z=\begin{cases}Y, & X\leqslant\frac{1}{2},\\ X, & X>\frac{1}{2},\end{cases}$ 求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$.

(2) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}(\lambda>0).$$

(Ⅰ)证明:Y 服从参数为 λ 的指数分布;

(Ⅱ)问 X 与 Y 是否相互独立?并说明理由.

李林考研数学系列

第十九章　随机变量的数字特征

基础题

一、选择题

(1) 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，则 $Y=2X+e^{-2X}$ 的期望 $EY=($　　$)$.

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

(2) 设随机变量 $X\sim B(n,p)$，且 $EX=2.4,DX=1.44$，则(　　).

A. $n=8,p=0.6$　　B. $n=6,p=0.4$

C. $n=4,p=0.5$　　D. $n=12,p=0.1$

(3) 设 EX 与 $E(X^2)$ 均存在，则(　　).

A. $E(X^2)\geqslant(EX)^2$　　B. $E(X^2)<(EX)^2$

C. $E(X^2)<EX$　　D. $E(X^2)>EX$

(4) 设随机变量 X，有 $EX=\mu,DX=\sigma^2$(μ,σ 为常数)，则对任意常数 C，下列选项正确的是(　　).

A. $E[(X-C)^2]=E(X^2)-C^2$　　B. $E[(X-C)^2]=E[(X-\mu)^2]$

C. $E[(X-C)^2]<E[(X-\mu)^2]$　　D. $E[(X-C)^2]\geqslant E[(X-\mu)^2]$

(5) 设 (X,Y) 服从二维正态分布，则 $U=X+Y$ 与 $V=X-Y$ 不相关的充要条件是(　　).

A. $EX=EY$　　B. $E(X^2)=E(Y^2)$

C. $E(X^2)+(EY)^2=E(Y^2)+(EX)^2$　　D. $E(X^2)+(EX)^2=E(Y^2)+(EY)^2$

(6) 设 $X\sim N(0,1),Y\sim N(1,4)$，且 $\rho_{XY}=1$，则(　　).

A. $P\{Y=2X+1\}=1$　　B. $P\{Y=-2X+1\}=1$

C. $P\{Y=-2X-1\}=1$　　D. $P\{Y=2X-1\}=1$

(7) 设随机变量 X 在 $[-1,1]$ 上服从均匀分布，$Y_1=\arcsin X,Y_2=\arccos X$，则 $\rho_{Y_1Y_2}=($　　$)$.

A. 1　　B. -1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

(8) 设袋中有 6 只红球，4 只白球，任意摸出一只球，记住颜色后放回袋中，共进行 4 次，设 X 表示摸到红球的次数，则 $EX=($　　$)$.

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{8}{5}$　　C. $\frac{12}{5}$　　D. $\frac{48}{5}$

二、填空题

(1) 一袋中有 N 个球，其中白球数目 X 是一个随机变量，且 $EX=n$，从袋中任取一球，则取得的球是白球的概率为________.

(2) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}(-\infty<x<+\infty)$，则 $E(X^2)=$________.

(3) 从 1,2,3,4,5 中任取一数 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一数 Y,则 $EY=$ ________.

(4) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=0.3\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)+0.7\Phi\left(\frac{x+1}{3}\right)$,其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数,则 $EX=$ ________.

(5) 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma^2,\sigma^2;\rho)$,若 $\frac{3X+Y}{2}$ 与 $\frac{X-2Y}{3}$ 不相关,则相关系数 $\rho=$ ________.

三、解答题

(1) 设 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(Ⅰ) 求 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ) 求 ρ_{XY}.

(2) 设随机变量 X,Y,Z,满足 $EX=EY=1,EZ=-1.DX=DY=DZ=1,\rho_{XY}=0$,$\rho_{XZ}=\frac{1}{2},\rho_{YZ}=-\frac{1}{2}$,求 $E(X+Y-2Z),D(X+Y+Z)$.

(3) 设 X 与 Y 相互独立,且均服从 $N\left(1,\frac{1}{2}\right)$,求 $D(|X-Y|)$.

(4) 设 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$.

(Ⅰ) 求 EX 和 DX;

(Ⅱ) 求 $\mathrm{Cov}(X,|X|)$,并判别 X 与 $|X|$ 是否不相关;

(Ⅲ) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立?

(5) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$P\{Y=-1\}=\frac{1}{4},P\{Y=1\}=\frac{3}{4},X\sim N(0,1)$.

(Ⅰ) 求 $Z=XY$ 的概率密度;

(Ⅱ) 求 $\mathrm{Cov}(Z,X)$.

(6) 设 $X\sim N(1,1),Y\sim N(-2,1)$,且 X 与 Y 相互独立.

(Ⅰ) 求 $Z=2X+Y$ 的概率密度;

(Ⅱ) 求 $E(|2X+Y|),D(|2X+Y|)$.

(7) 设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$ 上的均匀分布.

(Ⅰ) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度;

(Ⅱ) 求 $E(Z^2)$.

综合题

一、选择题

(1) 设对任意两个随机变量 X 与 Y,有 $E(XY)=EX\cdot EY$,则(　　).

A. X 与 Y 相互独立　　B. X 与 Y 不相互独立

C. $D(X+Y)=DX+DY$　　D. $D(XY)=DX\cdot DY$

(2) 设 $X\sim N(0,1),Y=X^2+X+1$,则 X 与 Y(　　).

A. 相关且相互不独立　　B. 相关且相互独立

C. 不相关且相互独立　　D. 不相关且相互不独立

(3) 设随机变量 X 与 Y 相关，相关系数为 ρ_{XY}，$Z=aX+b$(a,b 为常数)，则 $\rho_{YZ}=\rho_{XY}$ 的充分必要条件为(　　).

A. $a>0$　　B. $a<0$　　C. $a\neq 0$　　D. $a=1$

(4) 设随机变量 X 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上服从均匀分布，$U=\sin X$，$V=\cos X$，则 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV} 为(　　).

A. $\rho_{UV}=0$　　B. $|\rho_{UV}|=1$

C. $0<\rho_{UV}<1$　　D. $-1<\rho_{UV}<0$

二、填空题

(1) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$，则 $E(X^2)=$ ________.

(2) 设随机变量 X 在 $(0,a)(a\leqslant 12)$ 上服从均匀分布，则 X 位于 EX 与 DX 之间的概率为________.

(3) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且有相同的概率密度，则概率 $P\{X_n>\min\{X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}\}\}=$ ________.

(4) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，则 $E(\min\{|x|,1\})=$ ________.

(5) 设 15 000 件产品中有 1 000 件次品，从中任取 150 件进行检测，则检测到次品数 X 的期望 $EX=$ ________.

(6) 设 $(X,Y)\sim N(1,1,2,2;0)$，$U=X+2Y$，$V=X-2Y$，则 $\rho_{UV}=$ ________.

三、解答题

(1) 在区间 $(0,1)$ 内随机取 n 个数 $X_1,X_2,\cdots,X_n$.

(Ⅰ) 求最大数与最小数之间距离 d 的数学期望；

(Ⅱ) 若用 Y 表示 n 个数中大于 $\dfrac{2}{3}$ 的个数，求 EY 和 DY.

(2) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为独立同分布的随机变量，且均服从 $N(0,1)$，$Y_i=X_i-\overline{X}(i=1,2,\cdots,n)$，其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

(Ⅰ) 求 $DY_i(i=1,2,\cdots n)$；

(Ⅱ) 求 $\rho_{Y_1Y_n}$.

(3) 设随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为 $\dfrac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数.

(Ⅰ) 求 (X,Y) 的联合分布律；

(Ⅱ) 求 ρ_{XY}.

(4) 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且均服从参数为 λ 的指数分布，记 $Y=\min\{X_1,X_2\}$，$T=\max\{Y,X_3\}$.

(Ⅰ) 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

(Ⅱ) 求期望 ET.

(5) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立同分布,其相同的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta,\end{cases}\ \theta \text{ 为常数},$$

求 $Z=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$ 的数学期望.

(6) 设 X_1 与 X_2 相互独立,$X_i\sim B(i,p)(i=1,2,0<p<1)$.令

$$Y_1=\begin{cases}0, & X_1+X_2=1,\\ 1, & X_1+X_2\neq 1,\end{cases}\quad Y_2=\begin{cases}0, & X_2-X_1=2,\\ 1, & X_2-X_1\neq 2.\end{cases}$$

(Ⅰ) 求 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)$;

(Ⅱ) 确定 p 的值,使 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)$ 取值最小.

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$,$Y$ 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布.

(Ⅰ) 求 $Z=X+Y$ 的分布函数与概率密度;

(Ⅱ) 求相关系数 ρ_{XZ}.

拓 展 题

解答题

(1) 设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立,且 $X_1\sim B(1,p)$,$X_2\sim B(2,p)$,其中 $0<p<1$,令 $Y_1=2X_1+X_2$,$Y_2=X_1-X_2$.

(Ⅰ) 求相关系数 $\rho_{Y_1Y_2}$;

(Ⅱ) 问 Y_1 与 Y_2 是否相互独立?并说明理由.

(2) 设 X 是连续型随机变量,且 $P\{X\leqslant a\}=P\{X>b\}=\dfrac{1}{4}$,令

$$X_1=\begin{cases}-1, & X\leqslant a,\\ 1, & X>a,\end{cases}\qquad X_2=\begin{cases}-1, & X\leqslant b,\\ 1, & X>b.\end{cases}$$

(Ⅰ) 求 (X_1,X_2) 的联合分布及边缘分布;

(Ⅱ) 求 $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$, $D(X_1-X_2)$.

第二十章 大数定律与中心极限定理

李林考研数学系列

基础题

一、选择题

(1) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的简单随机样本，且 $E(X^k)=a_k,k=1,2,3,4$，根据中心极限定理，当 n 充分大时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从(　　).

A. $N\left(a_2,\dfrac{a_4-a_2^2}{n}\right)$　　B. $N(a_2,a_4-a_2^2)$

C. $N\left(a_1,\dfrac{a_4-a_2^2}{n}\right)$　　D. $N(a_2,a_2^2)$

(2) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，记 $Y_n=X_1+X_2+\cdots X_n$，根据列维－林德伯格中心极限定理，Y_n 近似服从正态分布(n 充分大)，则只要 $X_1,X_2,\cdots,X_n$(　　).

A. 服从同一离散型分布　　B. 服从同一连续型分布

C. 服从同一指数分布　　D. 具有相同的期望与方差

(3) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_i^2)<+\infty$，则对任意 ε，有(　　).

A. $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right|<\varepsilon\right\}=0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-E(X_i^2)\right|<\varepsilon\right\}=0$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-E(X_i^2)\right|<\varepsilon\right\}=1$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$

二、填空题

(1) 设随机变量 X_i 服从二项分布 $B(i,0.2),i=1,2,\cdots,10$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 相互独立，则根据切比雪夫不等式，有 $P\left\{6<\sum\limits_{i=1}^{10}X_i<16\right\}\geqslant$ ________.

(2) 设 X 与 Y 满足：$EX=-2,EY=2,DX=1,DY=4,\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，则根据切比雪夫不等式，有 $P\{|X+Y|\geqslant 6\}\leqslant$ ________.

(3) 设 X 在区间 $[-1,b]$ 上服从均匀分布，由切比雪夫不等式，有 $P\{|X-1|<\varepsilon\}\geqslant\dfrac{2}{3}$，则 $b=$ ________，$\varepsilon=$ ________.

(4) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{200}$ 相互独立且同分布，$P\{X_1=0\}=P\{X_1=1\}=0.5$，则根据棣莫弗－拉普拉斯中心极限定理，可知 $P\left\{\sum\limits_{i=1}^{100}(X_{2i}-X_{2i-1})^2\leqslant 59.8\right\}=$ ________. $(\Phi(1.96)=0.975)$

三、解答题

(1) 设一条生产线的合格率为 0.8，要使一批产品的合格率在 76% 与 84% 之间的概率不小于 90%，问这批产品至少要生产多少件？

(2) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n e^{-x}}{n!}, & x\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}(n\text{ 为正整数}),$$

利用切比雪夫不等式证明：$P\{0<X<2(n+1)\}\geqslant \dfrac{n}{n+1}$.

(3) 设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立，X_i 的分布律为

X_i	$-ia$	0	ia
p	$\dfrac{1}{2i^2}$	$1-\dfrac{1}{i^2}$	$\dfrac{1}{2i^2}$

其中 $i=1,2,\cdots,n$，利用大数定律，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$.

李林考研数学系列

第二十一章　数理统计的基本概念

基 础 题

一、选择题

(1) 设(X_1,X_2,X_3)为总体$X\sim N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，则统计量$U=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}$服从的分布为(　　).

A. $t(1)$　　B. $t(2)$　　C. $F(1,1)$　　D. $F(2,1)$

(2) 设随机变量X,Y均服从$N(0,1)$，则(　　).

A. $X+Y$服从正态分布　　B. X^2+Y^2服从χ^2分布

C. $\dfrac{X^2}{Y^2}$服从F分布　　D. X^2与Y^2均服从χ^2分布

(3) 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_{16})$为总体X的简单随机样本，$\overline{X}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}X_i$，且$P\{|X-\mu|<k\}=P\{|\overline{X}-\mu|<4\}$，则$k=$(　　).

A. 4　　B. 4σ　　C. 16　　D. 16σ

(4) 设$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$是来自总体$X\sim N(0,1)$的简单随机样本，则统计量$T=\dfrac{1}{4}\left(\sum\limits_{i=1}^{4}X_i\right)^2+\dfrac{1}{6}\left(\sum\limits_{i=5}^{10}X_i\right)^2$服从的分布为(　　).

A. $N(0,2)$　　B. $\chi^2(10)$　　C. $\chi^2(2)$　　D. $N(0,10)$

二、填空题

(1) 从总体$X\sim N(3.4,6^2)$中抽取样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，若$\overline{X}$位于$(1.4,5.4)$内的概率不小于0.95，则样本容量$n$至少应取________.(已知$\Phi(1.96)=0.975$)

(2) 设总体$N(\mu,4^2)$的简单随机样本为$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$，样本方差为S^2，已知$P\{S^2>a\}=0.1$，则$a\approx$________.(已知$\chi^2_{0.1}(9)=14.684$，上侧分位数)

(3) 设随机变量$X\sim F(n,n)$，且$P\{X>a\}=0.05$，则$P\left\{X>\dfrac{1}{a}\right\}=$________.

(4) 设$X\sim t(n)$，$Y\sim F(1,n)$，给定$\alpha(0<\alpha<0.5)$，常数k满足$P\{X>k\}=\alpha$，则$P\{Y>k^2\}=$________.

三、解答题

(1) 设$(X_1,X_2,\cdots,X_9)$为总体$X\sim N(0,2^2)$的简单随机样本，若a,b,c使$X=a(X_1+X_2)^2+b(X_3+X_4+X_5)^2+c(X_6+X_7+X_8+X_9)^2$服从$\chi^2$分布，求$a,b,c$的值及$\chi^2$分布的自由度.

(2) 设总体$X\sim N(0,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$为X的简单随机样本，求下列统计量的分布.

(Ⅰ)$T_1=\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{(X_1+X_2+X_3)^2}{X_4^2+\cdots+X_{10}^2}$;

(Ⅱ) $T_2=\sqrt{\dfrac{7}{3}}\cdot\dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{X_4^2+\cdots+X_{10}^2}}$;

(Ⅲ) $T_3=\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{X_4^2+\cdots+X_{10}^2}$.

综合题

一、选择题

(1) 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为总体$X\sim N(0,\sigma^2)$的简单随机样本,$S_1^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,则下列选项服从$t(n-1)$分布的统计量为(　　).

A. $\dfrac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{\sqrt{n-1}S_1}$　　B. $\dfrac{\sqrt{n-1}\,\overline{X}}{\sqrt{n}S_1}$

C. $\dfrac{\sqrt{n(n-1)}\,\overline{X}}{S_1}$　　D. $\dfrac{\overline{X}}{\sqrt{n(n-1)}S_1}$

(2) 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为总体X的简单随机样本,$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,则$E(X^2)$的矩估计量为(　　).

A. $\overline{X}^2+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$　　B. $\overline{X}^2+\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

C. $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$　　D. $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

(3) 设总体X与总体Y相互独立,且都服从$N(\mu,\sigma^2)$,$\overline{X}$与$\overline{Y}$分别为来自总体X,Y的样本均值,样本容量均为n,则当n固定时,$P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>\sigma\}$的值随着$\sigma$增大(　　).

A. 单调增加　　B. 单调减少　　C. 保持不变　　D. 增减性不确定

二、解答题

(1) 设总体$X\sim N(0,1)$,$(X_1,X_2,\cdots,X_{2n})$为X的简单随机样本,求下列统计量的分布.

(Ⅰ) $T_1=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n}X_{2i-1}X_{2i}$;(Ⅱ) $T_2=\dfrac{\sqrt{2n-1}X_1}{\sqrt{\sum\limits_{i=2}^{2n}X_i^2}}$;(Ⅲ) $T_3=\dfrac{(2n-3)\sum\limits_{i=1}^{3}X_i^2}{3\sum\limits_{i=4}^{2n}X_i^2}$.

(2) 设随机变量X_1,X_2,X_3相互独立且均服从$N(0,\sigma^2)$,证明:$T=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\dfrac{X_1+X_2+X_3}{|X_2-X_3|}$服从$t(1)$分布.

(3) 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1})$为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本,记$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,$Y=\dfrac{n}{(n+1)\sigma^2}\cdot(X_{n+1}-\overline{X})^2$,$T=\dfrac{k(X_{n+1}-\overline{X})^2}{S^2}$.

(Ⅰ) 求EY和DY;

(Ⅱ) 若T服从F分布,求k的值.

李林考研数学系列

第二十二章 参数估计

基础题

解答题

(1) 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

已知容量为 3 的样本值为 $x_1=1,x_2=2,x_3=1$，求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

(2) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\lambda)=\begin{cases}-\lambda^x\ln\lambda, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ $(0<\lambda<1)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 X 的简单随机样本，求 λ 的矩估计量.

(3) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}\cdot x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 X 的简单随机样本值.

（Ⅰ）求 θ 的矩估计值；

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计值.

(4) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}},-\infty<x<+\infty,\theta>0.$$

求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$ 及 $E(\hat{\theta}^2)$.

(5) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\leqslant x\leqslant\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 X 的简单随机样本.

（Ⅰ）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$；

（Ⅱ）求 $E(\hat{\theta})$ 和 $D(\hat{\theta})$.

(6) 某射手进行独立重复射击，每次击中目标的概率为 $p>0$，设他在第 X 次射击时首次击中目标，以 X 为总体，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 X 的简单随机样本.

（Ⅰ）求 X 的概率分布；

（Ⅱ）求参数 p 的矩估计量和最大似然估计量.

(7) 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$ 为总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\sigma>0$ 为未知参数.

（Ⅰ）求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$；

（Ⅱ）若记 $U=\sum\limits_{i=1}^{6}X_i,V=\sum\limits_{i=5}^{10}X_i$，利用最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$，求相关系数 ρ_{UV}.

(8) 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体

X 的简单随机样本.

(Ⅰ)求 μ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}$；

(Ⅱ)记 $Y = \ln X$，求 Y 的分布函数和 $E\hat{\mu}$.

(9) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$EX = \mu, DX = \sigma^2$，若 $\hat{\theta} = k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量，求 k 的值.

(10) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0 \leqslant x \leqslant \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 $\theta > 0$ 为未知参数，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 X 的简单随机样本，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$Y_n = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，证明：$\dfrac{3n+1}{3n}Y_n$ 与 $\dfrac{4}{3}\overline{X}$ 都是 θ 的无偏估计量.

(11) 设总体 $X \sim B(1,p)$，参数 $p \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$，样本容量为1，求 p 的最大似然估计值.

(12) 设总体 X 在 $\left[\theta - \dfrac{1}{2}, \theta + \dfrac{1}{2}\right]$ 上服从均匀分布，θ 为未知参数，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体 X 的样本，求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$.

(13) 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差.

(Ⅰ)对任意实数 C，证明：统计量 $T = C\overline{X} + (1-C)S^2$ 是参数 λ 的无偏估计；

(Ⅱ)求概率 $P\{X \geqslant 1\}$ 的最大似然估计量.

(14) 设总体 $X \sim U(0,\theta)(\theta > 0)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 X 的简单随机样本，$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$.

(Ⅰ)证明：$\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$，$\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n}X_n$ 是 θ 的无偏估计；

(Ⅱ)当 $n \geqslant 2$ 时，问 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 哪一个有效.

(15) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ, σ^2 为未知参数，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为总体 X 的简单随机样本值，求 μ, σ^2 的最大似然估计量.

(16) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x-\mu|}$，$-\infty < x < +\infty$，$\mu$ 为未知参数，由样本值：1 028，968，1 007，求 μ 的矩估计值和最大似然估计值.

(17) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{\lambda_2}e^{-\frac{x-\lambda_1}{\lambda_2}}, \quad -\infty < \lambda_1 < x < +\infty, \ \lambda_2 > 0,$$

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)当 λ_1 已知时，求 λ_2 的矩估计量和最大似然估计量；

(Ⅱ)求 λ_1, λ_2 的矩估计量和最大似然估计量.

(18) 设 0.50，1.25，0.80，2.00 为来自总体 X 的简单随机样本值，$Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$.（已知 $\Phi(1.96) = 0.975$）

(Ⅰ)求 EX；

(Ⅱ)求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；

(Ⅲ)求 EX 的置信度为 0.95 的置信区间.

拓展题

解答题

(1) 设相互独立的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 均服从 $N(\mu,\sigma^2)$，

$$Y_i=|X_i-\mu|\ (i=1,2,\cdots,n),\ Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i.$$

(Ⅰ) 求 Y_1 的概率密度；

(Ⅱ) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

(Ⅲ) 求 EY 和 DY.

(2) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta,\end{cases}$$

其中 $\theta(\theta>0)$ 为未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 与最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；

(Ⅱ) 问 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是否为 θ 的无偏估计量？

(Ⅲ) 将 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 修正为 $\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4$，使 $\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4$ 为 θ 的无偏估计，并比较 $\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4$ 的有效性.

第二十三章 假设检验

基础题

一、选择题

在假设检验中，检验水平 α 的意义是(　　).

A. 原假设 H_0 成立，经检验 H_0 被拒绝的概率

B. 原假设 H_0 成立，经检验 H_0 不能被拒绝的概率

C. 原假设 H_0 不成立，经检验 H_0 被拒绝的概率

D. 原假设 H_0 不成立，经检验 H_0 不能被拒绝的概率

二、填空题

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 X 的简单随机样本，其中 μ,σ^2 求知，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, Q^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则假设 $H_0:\mu=0$ 的 t 检验统计量是 $T=$________.

三、解答题

(1) 设在一批圆木中随机抽取 100 根，测其小头直径，得到样本均值为 $\overline{x}=11.2$ cm，已知标准差 $\sigma=2.6$ cm，问在显著性检验水平 $\alpha=0.05$ 下，该批圆木小头平均直径能否认为是在 12 cm 以上?(已知 $\Phi(1.645)=0.95$)

(2) 设某生产线生产袋装产品，正常情况下每袋1千克，标准差不超过15克，且每袋重量服从正态分布. 现检查机器生产情况，从中任取 10 袋，测得其均值为 $\overline{x}=998$ 克，样本均方差为 $S=30$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，问机器生产是否正常?(已知 $\chi^2_{0.05}(9)=16.919$)

李林考研数学系列图书

01

基础＋强化初期

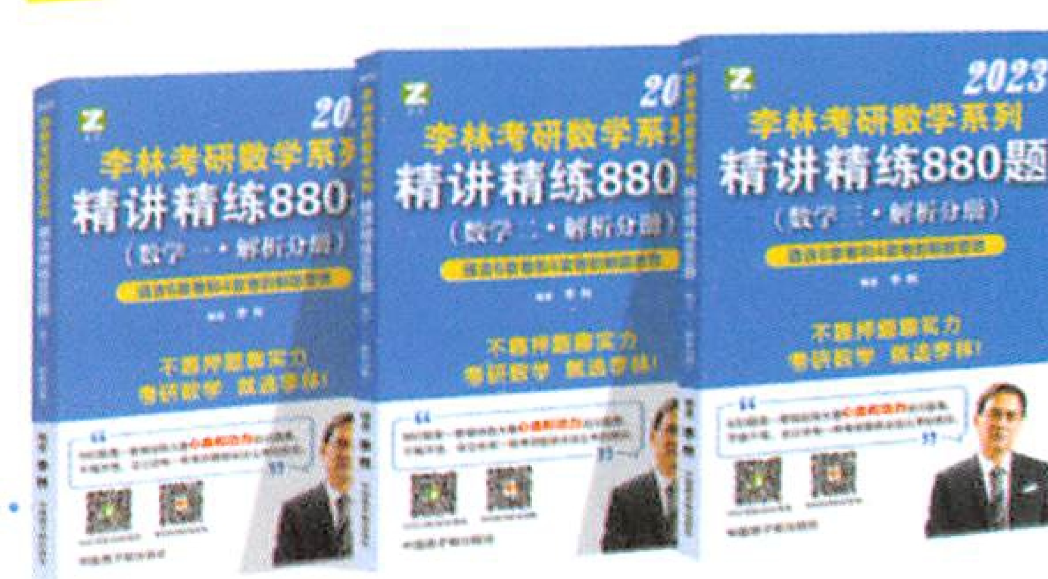
三本讲义地毯式复习
覆盖全部大纲考点

02

强化阶段

880题难度分级
题目紧扣大纲

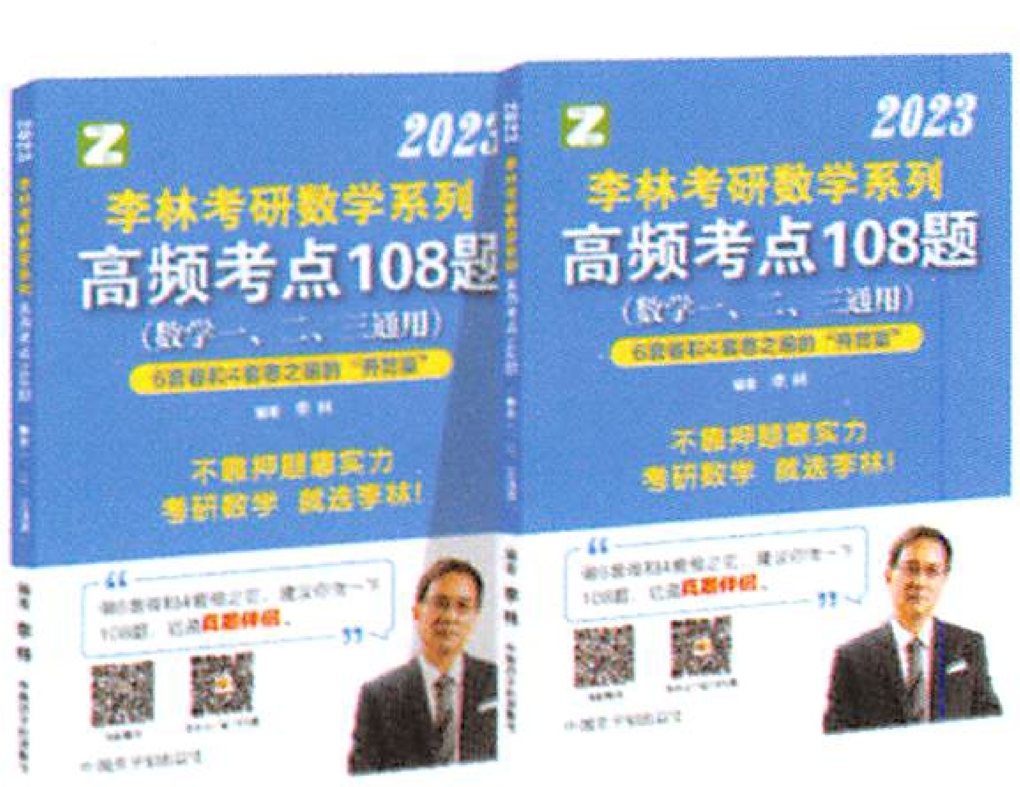
试题+解析



03

强化收尾

108题按考点分类
检验强化复习效果



04

冲刺阶段

6+4套卷冲刺
深度还原考场

策划：真 学

真学
新浪微博

真学图书
微信公众号

作者简介：李林

扫地僧一样存在的实力派考研名师，原大连理工大学教师，考研辅导经验近20年，对考研数学命题规律了如指掌，对典型错误点评一针见血，李林老师高瞻远瞩，出版的图书题目新颖，不偏不怪，让学生有种考研题就会这么考的感觉。

“李林考研数学系列”图书致力于让学生做“性价比”高的题目，达到“精做一题，胜做十题”的效果，受到莘莘学子的广泛好评。

李林考研数学系列图书：

李林考研数学系列高等数学辅导讲义（数学一、二、三通用）
李林考研数学系列线性代数辅导讲义（数学一、二、三通用）
李林考研数学系列概率论与数理统计辅导讲义（数学一、三通用）
李林考研数学系列精讲精练880题（分数学一、数学二、数学三）
李林考研数学系列高频考点108题（数学一、二、三通用）
李林考研数学系列考前冲刺6套卷（分数学一、数学二、数学三）
李林考研数学系列考前预测4套卷（分数学一、数学二、数学三）